¿QUÉ SON LOS NÚMEROS REALES? PARTE V

ESTEBAN MARTÍNEZ VAÑÓ

26 de octubre de 2026

ÍNDICE

13. Producto y cuerpo 2
14. Los números reales: su último saludo 9
15. Cálculos prácticos 11
    15.1. Algoritmo de la suma 11
    15.2. Aproximaciones de la suma y el producto 13
    15.3. Opuestos e inversos 16

PREFACIO

Llegamos al final de nuestro camino. Ya tenemos nuestro grupo ordenado Dedekind-completo y solo nos queda definir un producto y ver que todo cuadra... Pero que nadie se ponga triste. Hemos aprendido muchas cosas a lo largo de este viaje y siempre compartiremos ese recuerdo. Además, si os ha gustado este curso, no será el último que organicemos por estos lares ;)

Por si sois nuevos por aquí, esta es la quinta y última entrada de un pequeño curso a través del cual descubriremos juntos qué son los números reales. El público objetivo para este curso son estudiantes de bachillerato especialmente interesados en las matemáticas o estudiantes de primer curso en grados como matemáticas, física, estadística o ingeniería. Esto lo digo porque asumiremos un conocimiento mínimo de matemáticas, pero realmente cualquiera con interés puede seguirlo y utilizar los comentarios de las entradas o el correo de contacto de la web para preguntarme cualquier duda. Es decir, si de verdad os interesa el tema, os animo a seguir el curso aunque no encajéis en el perfil anterior y a preguntar todo lo que queráis sin miedo alguno.

Dicho todo esto, ¡qué comiencen las matemáticas!

13 PRODUCTO Y CUERPO

Para definir el producto entre números reales procederemos igual que lo hicimos con la suma: primero lo definiremos en $\mathbb{Q}$ y después lo extenderemos a $\mathbb{R}$.

Así pues, tal y como discutimos con la suma y el orden, también queremos que el producto entre números racionales sea compatible con el que definamos en $\mathbb{Q}$, es decir, que dados dos números racionales p, q se cumpla que

$$j(p \cdot q) = j(p) \odot j(q).$$

Como ya vimos, la forma de conseguir esto es definir para cada $x, y \in \mathbb{Q}$ el producto

$$x \odot y := j\left(j^{-1}(x) \cdot j^{-1}(y)\right),$$

y de modo análogo[1] a lo visto en el Proposición 12.1 podemos demostrar que $\mathbb{Q}$ será un cuerpo ordenado con el orden y las operaciones que hemos definido.

Proposición 13.1. *El conjunto $\mathbb{Q}$ de números decimales periódicos no máximos es un cuerpo ordenado.*

En concreto, el elemento neutro para la suma es $\bigcirc := 0.000\cdots$ y para el producto es $\mathbb{1} := 1.000\cdots$. Además, dado $x \in \mathbb{Q}$ su elemento opuesto, que denotaremos simplemente por $-x$, es

$$j\left(-j^{-1}(x)\right),$$

mientras que si x es no nulo, su elemento inverso, que denotaremos por $\frac{1}{x}$, es

$$j\left(\frac{1}{j^{-1}(x)}\right).$$

En otras palabras, lo que hemos demostrado es que j es un isomorfismo de cuerpos ordenados, con lo que ahora ya tenemos una identificación plena entre los números racionales y los números decimales periódicos no máximos. Así pues, podemos por ejemplo hablar del número «2» en $\mathbb{Q}$, que no es más que $\mathbb{1} \oplus \mathbb{1}$, o lo que es lo mismo, el número decimal $2.000\cdots$, así como de su inverso «$\frac{1}{2}$», el cual claramente será el número decimal $0.5000\cdots$. Además, como ya sabemos que esta identificación es biunívoca y respeta tanto las operaciones como el orden, en breve nos olvidaremos de los símbolos raros para el cero, el uno, la suma, el producto y el orden, pero de momento los mantendremos para que nadie se confunda.

Retomando ahora la definición del producto en $\mathbb{R}$, recordad que nuestra primera idea para extender la suma de $\mathbb{Q}$ a los números reales fue utilizar límites, pero en dicho momento aún no podíamos hablar de límites en $\mathbb{R}$. Sin embargo, ahora sí que podemos hacerlo, con lo que podemos perseguir dicha idea. En concreto, dados $x, y \in \mathbb{R}$ definimos su producto como

$$x * y := \lim({}^n a \odot {}^n b), \tag{1}$$

donde $\{{}^n a\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{{}^n b\}_{n=0}^{\infty}$ son sucesiones en $\mathbb{Q}$ que convergen a x e y respectivamente.

Esta definición parece tener algunos problemas (¿cuáles?), pero como hicimos con la suma, vamos a solucionarlos de uno en uno.

El primer problema que alguien podría plantear es que hemos definido el producto como el límite de una sucesión, pero podría ocurrir que dicho límite no existiera. Esta es una crítica muy acertada, pero tiene una solución sencilla gracias a todo lo que ya sabemos sobre $\mathbb{R}$. ¿Se os ocurre? Ya sabemos que $\mathbb{R}$ es un grupo ordenado Dedekind-completo y el Teorema 4.29 nos asegura que entonces también es Cauchy-completo, por lo que para demostrar que el límite que hemos definido en (1) existe, basta con demostrar que la sucesión $\{{}^n a \odot {}^n b\}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$:

[1] Si es la primera vez que estudiáis estas cosas, os recomiendo que lo demostréis para aseguraros de entenderlo todo bien.

Lema 13.2. *Sean* $\{^n a\}_{n=0}^{\infty}$ *y* $\{^n b\}_{n=0}^{\infty}$ *dos sucesiones en* $\mathbb{Q}$ *que son de Cauchy en* $\mathbb{R}$. *Entonces* $\{^n a \odot {}^n b\}_{n=0}^{\infty}$ *es de Cauchy en* $\mathbb{R}$.

En particular, si $\{^n a\}_{n=0}^{\infty}$ *y* $\{^n b\}_{n=0}^{\infty}$ *son convergentes en* $\mathbb{R}$, *entonces* $\{^n a \odot {}^n b\}_{n=0}^{\infty}$ *es también convergente en* $\mathbb{R}$.

Demostración. Dado $\varepsilon \in \mathbb{R}$ con $\varepsilon > \bigcirc$, debemos ver que existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geqslant N$, entonces

$$|(^n a \odot {}^n b) \ominus (^m a \odot {}^m b)| \prec \varepsilon.$$

En primer lugar, por la Proposición 4.16 sabemos que $\{^n a\}$ y $\{^n b\}$ están acotadas, con lo que existirá cierto $x > \bigcirc$ tal que $|^n a| \prec x$ y $|^n b| \prec x$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Más aún, por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ existe un $K \in \mathbb{Q}$ tal que $K \succ x$ (¿por qué?), luego

$$|^n a| \prec K, \tag{2}$$
$$|^n b| \prec K, \tag{3}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ahora, utilizando de nuevo la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ sabemos que existe un $\delta \in \mathbb{Q}$ tal que $\bigcirc \prec \delta \prec \varepsilon$ y como $\{^n a\}$ y $\{^n b\}$ son de Cauchy, existe un $M \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geqslant M$, entonces

$$|^n a \ominus {}^m a| \prec \frac{\delta}{\bar{2} \odot K}, \tag{4}$$
$$|^n b \ominus {}^m b| \prec \frac{\delta}{\bar{2} \odot K}, \tag{5}$$

donde estamos abreviando $\bar{2} := \mathbb{1} \oplus \mathbb{1} = 2.000\cdots$.

Definiendo entonces $N := \max\{M, K\}$ y usando que $\mathbb{Q}$ es un cuerpo ordenado tenemos que si $n, m \geqslant N$, entonces

$$\begin{aligned}
|(^n a \odot {}^n b) \ominus (^m a \odot {}^m b)| &= |((^n a \odot {}^n b) \ominus (^m a \odot {}^n b)) \oplus ((^m a \odot {}^n b) \ominus (^m a \odot {}^m b))| \\
&\preceq |(^n a \odot {}^n b) \ominus (^m a \odot {}^n b)| \oplus |(^m a \odot {}^n b) \ominus (^m a \odot {}^m b)| \\
&= (|^n b| \odot |^n a \ominus {}^m b|) \oplus (|^m a| \odot |^n b \ominus {}^m b|) \\
&\underset{(2),\,(3)}{\prec} (K \odot |^n a \ominus {}^m b|) \oplus (K \odot |^n b \ominus {}^m b|) \\
&\underset{(4),\,(5)}{\prec} \left(K \odot \frac{\delta}{\bar{2} \odot K}\right) \oplus \left(K \odot \frac{\delta}{\bar{2} \odot K}\right) = \frac{\delta \oplus \delta}{\bar{2}} = \delta \odot \frac{\mathbb{1} \oplus \mathbb{1}}{\bar{2}} = \delta \\
&\prec \varepsilon
\end{aligned}$$

tal y como queríamos ver. ∎

Vale, ahora que ya sabemos que la convergencia no es un problema, el segundo de los «peros» que podríais ponerle a la definición es que no hemos especificado qué sucesiones son $\{^n a\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{^n b\}_{n=0}^{\infty}$. Podría ocurrir que al considerar otro par de sucesiones $\{^n c\}_{n=0}^{\infty}$, $\{^n d\}_{n=0}^{\infty}$ en $\mathbb{Q}$ convergentes a x e y respectivamente, ocurriera que $\lim(^n a \odot {}^n b) \neq \lim(^n c \odot {}^n d)$. Si os fijáis, este problema lo solventamos para la suma escogiendo en la definición las aproximaciones canónicas de x e y para luego ver que podíamos escoger cualesquiera sucesiones (siempre que cumplieran lo que decía la definición, claro). Aquí podríamos haber hecho lo mismo, podríamos haber definido el producto utilizando las aproximaciones canónicas de x e y y así nos ahorraríamos todo el problema que estamos discutiendo ahora. Sin embargo, resulta que al tomar pares de sucesiones distintas como las anteriores, siempre se cumple que $\lim(^n a \odot {}^n b) = \lim(^n c \odot {}^n d)$.

Lema 13.3. *Sean* $x, y \in \mathbb{R}$ *y* $\{^n a\}_{n=0}^{\infty}, \{^n b\}_{n=0}^{\infty}, \{^n c\}_{n=0}^{\infty}$ *y* $\{^n d\}_{n=0}^{\infty}$ *sucesiones en* $\mathbb{Q}$ *tales que* $\lim {}^n a = \lim {}^n c = x$ *y* $\lim {}^n b = \lim {}^n d = y$. *Entonces* $\lim(^n a \odot {}^n b) = \lim(^n c \odot {}^n d)$.

Demostración. Por el Lema 13.2 sabemos que las sucesiones $\{{}^n a \odot {}^n b\}$ y $\{{}^n c \odot {}^n d\}$ son ambas convergentes en $\mathbb{R}$, y como ya sabemos que $\mathbb{R}$ es un grupo ordenado, el Teorema 4.17 nos garantiza que para concluir la demostración basta ver que

$$\lim(({}^n a \odot {}^n b) \ominus ({}^n c \odot {}^n d)) = \bigcirc. \tag{6}$$

Comencemos observando que por la Proposición 4.16, $\{{}^n a\}$ y $\{{}^n d\}$ están acotadas, luego (como vimos en la demostración del Lema 13.2) existirá cierto $K \in \mathbb{Q}$ con $K > \bigcirc$ tal que $|{}^n a|, |{}^n d| \prec K$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Además, como $\mathbb{Q}$ es un cuerpo ordenado tenemos que

$$\begin{aligned} |({}^n a \odot {}^n b) \ominus ({}^n c \odot {}^n d)| &\preceq |({}^n a \odot {}^n b) \ominus ({}^n a \odot {}^n d)| \oplus |({}^n a \odot {}^n d) \ominus ({}^n c \odot {}^n d)| \\ &= (|{}^n a| \odot |{}^n b \ominus {}^n d|) \oplus (|{}^n d| \odot |{}^n a \ominus {}^n c|) \\ &\preceq (K \odot |{}^n b \ominus {}^n d|) \oplus (K \odot |{}^n a \ominus {}^n c|)\,. \end{aligned}$$

Es decir, definiendo la sucesión de $\mathbb{Q}$

$${}^n A := (K \odot |{}^n b \ominus {}^n d|) \oplus (K \odot |{}^n a \ominus {}^n c|)\,,$$

sabemos que

$$\bigcirc \preceq |({}^n a \odot {}^n b) \ominus ({}^n c \odot {}^n d)| \preceq {}^n A \tag{7}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Más aún, como ya sabemos que $\mathbb{R}$ es un grupo ordenado, el Teorema 4.17 nos da que

$$\lim({}^n a \ominus {}^n c) = \lim({}^n b \ominus {}^n d) = \bigcirc,$$

y teniendo en cuenta que $\mathbb{Q}$ es un cuerpo ordenado obtenemos que

$$\lim {}^n A = \lim\left((K \odot |{}^n b \ominus {}^n d|) \oplus (K \odot |{}^n a \ominus {}^n c|)\right) = (K \odot \bigcirc) \oplus (K \odot \bigcirc) = \bigcirc. \tag{8}$$

Usando el criterio del sándwich junto a (7) y (8) obtenemos que

$$\lim |({}^n a \odot {}^n b) \ominus ({}^n c \odot {}^n d)| = \bigcirc,$$

y esto claramente (recordad el Lema 4.11) implica (6). ∎

Finalmente, como ocurría con la suma, el último «pero» que podemos ponerle a nuestro producto es que podría parecer que ahora tenemos dos productos definidos en $\mathbb{Q}$, el dado por $\odot$ y el dado por $*$, pero en este caso es muy sencillo ver que ambos coinciden:

En efecto, dados $x, y \in \mathbb{Q}$ sabemos por lo visto que

$$x * y = \lim({}^n a \odot {}^n b)$$

donde ${}^n a = x$ y ${}^n b = y$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y es claro que

$$\lim({}^n a \odot {}^n b) = x \odot y,$$

luego

$$x * y = x \odot y$$

tal y como queríamos ver.

Tal y como hicimos con la suma, ahora que sabemos que ambos productos coinciden en $\mathbb{Q}$ nos olvidaremos de la notación $*$ y simplemente utilizaremos el símbolo $\odot$ para denotar el producto en $\mathbb{R}$.

Ahora sí, ha llegado el momento que tanto tiempo llevamos esperando. Después de cinco largas entradas podemos por fin demostrar que existe un cuerpo ordenado Dedekind-completo.

Teorema 13.4. *El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales es un cuerpo ordenado Dedekind-completo. En concreto, el elemento neutro para la suma es $\bigcirc := 0.000\cdots$ y para el producto es $\mathbb{1} = 1.000\cdots$. Además, dado $x \in \mathbb{R}$ su elemento opuesto viene dado por*

$$\inf\{-{}^n x : n \in \mathbb{N}\},$$

donde $-{}^n x$ es el elemento opuesto de ${}^n x$ visto como elemento del grupo ordenado $\mathbb{Q}$, y si x es no nulo, su elemento inverso viene dado por

$$\lim \frac{1}{{}^n a},$$

donde $\{{}^n a\}_{n=0}^{\infty}$ es cualquier sucesión en $\mathbb{Q}$ cuyos elementos sean no son nulos y que converja a x.

Demostración. Como ya sabemos que $\mathbb{R}$ es un grupo ordenado Dedekind-completo, únicamente debemos demostrar que el producto que hemos definido cumple todas las propiedades que esperamos de él.

Comencemos viendo que es **asociativo**, es decir, que dados $x, y, z \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z.$$

Sin más, por definición tenemos que[2] $x \odot y = \lim({}^n x \odot {}^n y)$ e $y \odot z = \lim({}^n y \odot {}^n z)$, luego como $\{{}^n x \odot {}^n y\}$ e $\{{}^n y \odot {}^n z\}$ son sucesiones en $\mathbb{Q}$, nuevamente por definición y por la asociatividad del producto en $\mathbb{Q}$ obtenemos que

$$x \odot (y \odot z) = \lim({}^n x \odot ({}^n y \odot {}^n z)) = \lim(({}^n x \odot {}^n y) \odot {}^n z) = (x \odot y) \odot z.$$

Demostrar la **conmutatividad** es aún más simple, pues dados $x, y \in \mathbb{R}$ por la conmutatividad del producto en $\mathbb{Q}$ obtenemos que

$$x \odot y = \lim({}^n x \odot {}^n y) = \lim({}^n y \odot {}^n x) = y \odot x.$$

Ahora, como $\mathbb{1}$ es el **elemento neutro** para el producto en $\mathbb{Q}$ y ${}^n\mathbb{1} = \mathbb{1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, dado $x \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$x \odot \mathbb{1} = \lim({}^n x \odot {}^n \mathbb{1}) = \lim {}^n x = x.$$

Veamos ahora que si $x \neq \bigcirc$, entonces tiene **inverso**.

Comencemos demostrando que si $x \neq \bigcirc$, entonces existe al menos una sucesión $\{{}^n a\}$ en $\mathbb{Q}$ de términos no nulos y tal que $\lim {}^n a = x$.

En efecto, como $x \neq \bigcirc$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_N \neq 0$, y con ello ${}^n x \neq \bigcirc$ para cada $n \geqslant N$. Definiendo entonces la sucesión $\{{}^n a\}_{n=0}^{\infty}$ dada por ${}^n a = {}^{N+n} x$, es inmediato que está en $\mathbb{Q}$, ninguno de sus elementos es nulo y, al ser una subsucesión de $\{{}^n x\}$, se tiene que $\lim {}^n a = x$.

Veamos ahora que si $\{{}^n a\}$ es cualquier sucesión en las condiciones anteriores, entonces la sucesión $\{\frac{1}{{}^n a}\}$ converge en $\mathbb{R}$, para lo cual basta con ver que es de Cauchy.

Como sabemos que $|x| \succ \bigcirc$, por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ existe cierto $K \in \mathbb{Q}$ tal que $\bigcirc \prec K \prec |x|$. Como además $\lim |{}^n a| = |x|$, el Teorema 4.18 (i) nos asegura que existe un $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$\bigcirc \prec K \prec |{}^n a| \tag{9}$$

para cada $n \geqslant M$.

Ahora, dado $\varepsilon \in \mathbb{R}$ con $\varepsilon \succ \bigcirc$, de nuevo existe un $\delta \in \mathbb{Q}$ tal que $\bigcirc \prec \delta \prec \varepsilon$, y como $\lim {}^n a = x$, existe un $L \in \mathbb{N}$ tal que[3]

$$|{}^n a \ominus x| \prec (K \odot K) \odot \frac{\delta}{\bar{2}} \tag{10}$$

[2] Recordad que si $x \in \mathbb{R}$ por $\{{}^n x\}$ nos referimos a sus aproximaciones canónicas.

[3] Recordemos que $\bar{2} := \mathbb{1} \oplus \mathbb{1}$.

para cada $n \geqslant L$.

Con todo, definiendo $N := \max\{M, L\}$ se tiene que si $n, m \geqslant N$, entonces (por ser $\mathbb{Q}$ un cuerpo ordenado)

$$\left|\frac{1}{{}^n a} \ominus \frac{1}{{}^m a}\right| = \frac{|{}^m a \ominus {}^n a|}{|{}^n a| \odot |{}^m a|} \underset{(9)}{\prec} \frac{|{}^m a \ominus {}^n a|}{K \odot K} \preceq \frac{|{}^m a \ominus x| \oplus |{}^n a \ominus x|}{K \odot K} \underset{(10)}{\prec} \frac{\delta}{\overline{2}} \oplus \frac{\delta}{\overline{2}} = \delta \prec \varepsilon.$$

Esto prueba que, en efecto, la sucesión $\{\frac{1}{{}^n a}\}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$, luego convergente.

Finalmente, si es $y = \lim \frac{1}{{}^n a}$, entonces es claro que

$$x \odot y = \lim\left({}^n a \odot \frac{1}{{}^n a}\right) = \lim \mathbb{1} = \mathbb{1},$$

lo que prueba que y es el inverso de x.

Veamos ahora la **distributividad** del producto respecto a la suma, es decir, que dados $x, y, z \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z).$$

Como $\mathbb{R}$ es un grupo ordenado sabemos que

$$y \oplus z = \lim({}^n y \oplus {}^n z),$$

donde la sucesión $\{{}^n y \odot {}^n z\}$ está en $\mathbb{Q}$. Además, también sabemos que, por definición, $\lim({}^n x \odot {}^n y) = x \odot y$, y $\lim({}^n x \odot {}^n z) = x \odot z$, luego usando que $\mathbb{R}$ es un grupo ordenado y la distributividad del producto en $\mathbb{Q}$ obtenemos que

$$x \odot (y \oplus z) = \lim({}^n x \odot ({}^n y \oplus {}^n z)) = \lim(({}^n x \odot {}^n y) \oplus ({}^n x \odot {}^n z)) = (x \odot y) \oplus (x \odot z).$$

Finalmente, solo nos queda por ver que el producto **preserva el orden**, es decir, que dados $x, y, z \in \mathbb{R}$ tales que $x \prec y$ y $z \succ \bigcirc$, se cumple que $x \odot z \prec y \odot z$.

Como $z \succ \bigcirc$ sabemos que existe una sucesión $\{{}^n c\}_{n=0}^{\infty}$ en $\mathbb{Q}$ tal que ${}^n c \succ \bigcirc$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim {}^n c = z$ (¿por qué?). Además, como $x \prec y$, por el Teorema 4.18 (i) existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que ${}^n x \prec {}^n y$ para cada $n \geqslant N$. Con todo, como $\mathbb{Q}$ es un cuerpo ordenado se tiene que

$${}^n x \odot {}^n c \prec {}^n y \odot {}^n c$$

para cada $n \geqslant N$, y utilizando el Teorema 4.18 (ii), concluimos que $x \odot z \preceq y \odot z$. Además, no puede darse la igualdad, pues si $x \odot z = y \odot z$, como $z \succ \bigcirc$, multiplicando por su inverso obtenemos que $x = y$.

En definitiva, $x \odot z \prec y \odot z$ tal y como queríamos ver. ■

Ya lo hemos conseguido, después de tanto trabajo por fin hemos construido nuestro cuerpo ordenado Dedekind-completo. Ya podemos asegurar que sabemos, con todo lujo de detalles, qué son los números reales. Sin embargo, aún nos quedan un par de detalles por remediar que harán que nos olvidemos, por fin, de la horrible notación que hemos estado utilizando.

Ya hemos visto que $\mathbb{Q}$ es una copia perfecta de $\mathbb{Q}$, pero tal vez muchos os hayáis preguntado por qué hemos utilizado la letra «$\mathbb{Q}$» para denotar el conjunto de los números decimales periódicos no máximos, cuando dicha letra la utilizamos también en entradas anteriores para denotar la copia densa de los números racionales que todo cuerpo ordenado contiene. En principio podría ser simplemente un abuso de notación, algo muy común en matemáticas, pero en este caso resulta que no es así, sino que realmente son el mismo conjunto. Es decir, al aplicar la construcción dada en el Teorema 3.3 a nuestro cuerpo ordenado Dedekind-completo $\mathbb{R}$, resulta que la copia densa de los números racionales que nos da dicho teorema es precisamente el conjunto de números decimales periódicos no máximos:

Proposición 13.5. *Dado* $x \in \mathbb{R}$ *se cumple que* $x \in \mathbb{Q}$ *si, y solo si, existen dos números enteros* n, m *tales que* $m \geqslant 1$ *y* $x = \frac{n\mathbb{1}}{m\mathbb{1}}$.

Demostración. En primer lugar, es muy sencillo demostrar por inducción que

$$j(n) = n\mathbb{1}$$

para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Con ello, si $x \in \mathbb{Q}$, denotemos por $q := j^{-1}(x)$. Sabemos entonces que existen $n, m \in \mathbb{Z}$ con $m \geqslant 1$ tales que $q = \frac{n}{m}$ y como j es un isomorfismo de cuerpos tenemos que

$$x = j(q) = \frac{j(n)}{j(m)} = \frac{n\mathbb{1}}{m\mathbb{1}}.$$

Recíprocamente, si $x = \frac{n\mathbb{1}}{m\mathbb{1}}$ con $n, m \in \mathbb{Z}$, análogo a lo anterior tenemos que

$$x = \frac{n\mathbb{1}}{m\mathbb{1}} = \frac{j(n)}{j(m)} = j\left(\frac{n}{m}\right) \in \mathbb{Q},$$

luego se cumple la equivalencia descrita. ■

Un último apunte sobre nuestra construcción es que nos permite demostrar de forma inmediata los resultados que la han motivado:

Teorema 13.6. *Dado* $x \in \mathbb{D}$ *se cumple que*

$$^{m}x = \sum_{n=0}^{m} \frac{x_n\mathbb{1}}{(10\mathbb{1})^n}$$

para cada $m \in \mathbb{N}$, *luego si* $x \in \mathbb{R}$

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n\mathbb{1}}{(10\mathbb{1})^n}.$$

En particular, si $x \in \mathbb{R}$ *y para algún* $y \in \mathbb{R}$ *se cumple que*

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n\mathbb{1}}{(10\mathbb{1})^n},$$

entonces $y = x$. *Más aún, si* $y \in \mathbb{D}$ *se cumplen*:

(i) *Si* $y \notin \mathbb{R}$, *entonces* $\lim {}^{n}y = z$, *siendo* z *el decimal exacto equivalente a* y.

(ii) *Si* $z \in \mathbb{R}$, $\lim {}^{n}y = z$ *y* z *no es un decimal exacto, entonces* $y = z$.

(iii) *Si* $z \in \mathbb{R}$, $\lim {}^{n}y = z$ *y* z *es un decimal exacto, entonces* $y = z$ *o* z *e* y *son equivalentes.*

Demostración. Como j es un isomorfismo de cuerpos se cumple que dado $m \in \mathbb{N}$

$$j^{-1}\left(\sum_{n=0}^{m} \frac{x_n\mathbb{1}}{(10\mathbb{1})^n}\right) = \sum_{n=0}^{m} \frac{j^{-1}(x_n\mathbb{1})}{j^{-1}\left((10\mathbb{1})^n\right)} = \sum_{n=0}^{m} \frac{x_n}{10^n} = j^{-1}({}^{m}x),$$

y por la inyectividad de j^{-1} obtenemos que, en efecto,

$$^{m}x = \sum_{n=0}^{m} \frac{x_n\mathbb{1}}{(10\mathbb{1})^n}.$$

En particular, si $x \in \mathbb{R}$, por el Lema 12.2 y el Teorema 4.21 sabemos que $\lim {}^{n}x = x$ y obtenemos que

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n\mathbb{1}}{(10\mathbb{1})^n}.$$

Pasemos ahora a **demostrar (i)**.

Dado $y \in \mathbb{D}$ con $y \notin \mathbb{R}$, tenemos que y es un decimal máximo y por el Lema 8.5 existe z el único decimal exacto equivalente a y. Ahora, por el Lema 7.3, sabemos que $\lim \frac{1}{(10\mathbb{1})^n} = \bigcirc$, con lo que dado $\varepsilon \in \mathbb{R}$ con $\varepsilon > \bigcirc$, existe un $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{(10\mathbb{1})^n} \prec \varepsilon \tag{11}$$

para cada $n > M$.

Además, si denotamos por $m := n_9(y)$, lo visto nos asegura que

$$z = {}^m z = \sum_{n=0}^{m} \frac{z_n \mathbb{1}}{(10\mathbb{1})^n} = \sum_{n=0}^{m} \frac{y_n \mathbb{1}}{(10\mathbb{1})^n} \oplus \frac{1}{(10\mathbb{1})^m}. \tag{12}$$

Con todo, si definimos $N := \max\{M, m\}$, para cualquier $n > N$ se cumple que

$$\begin{aligned} |{}^n y \ominus z| &= \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{y_k \mathbb{1}}{(10\mathbb{1})^k} \ominus z \right| = \left| \sum_{k=0}^{m} \frac{y_k \mathbb{1}}{(10\mathbb{1})^k} \oplus \sum_{k=m+1}^{n} \frac{9\mathbb{1}}{(10\mathbb{1})^k} \ominus z \right| \\ &\underset{(12)}{=} \left| z \ominus \frac{1}{(10\mathbb{1})^m} \oplus \sum_{k=m+1}^{n} \frac{9\mathbb{1}}{(10\mathbb{1})^k} \ominus z \right| \\ &\underset{\text{Lema 7.4}}{=} \left| z \ominus \frac{1}{(10\mathbb{1})^m} \oplus \left(\frac{1}{(10\mathbb{1})^m} \ominus \frac{1}{(10\mathbb{1})^n} \right) \ominus z \right| = \frac{1}{(10\mathbb{1})^n} \underset{(11)}{\prec} \varepsilon, \end{aligned}$$

lo que prueba que, en efecto, $\lim {}^n y = z$.

La **demostración de (ii)** es ahora inmediata, porque si $\lim {}^n y = z$ y z no es un decimal exacto, entonces de (i) obtenemos que $y \in \mathbb{R}$, luego $\lim {}^n y = y$ y de la unicidad del límite obtenemos que $y = z$.

Finalmente, para **demostrar (iii)** basta observar que si $y \in \mathbb{R}$, entonces de forma análoga a lo anterior se obtiene que $y = z$, mientras que si $y \notin \mathbb{R}$, por (i) sabemos que $\lim {}^n y = w$ siendo w el decimal exacto equivalente a y, luego por la unicidad del límite obtenemos que $z = w$, luego que z e y son equivalentes. ■

Con todo lo que hemos visto podemos por fin olvidarnos de la horrible notación que hemos estado empleando y simplemente denotar el cero, el uno, la suma y el producto con los símbolos habituales. Además, para cada entero $n \in \mathbb{Z}$ también denotaremos los números reales $n\mathbb{1}$ simplemente por «n». La Proposición 13.5 nos dice entonces que los elementos de $\mathbb{Q}$ son exactamente los números reales de la forma $\frac{n}{m}$ con $n, m \in \mathbb{Z}$, con lo que podemos identificar completamente $\mathbb{Q}$ con $\mathbb{Q}$, y olvidarnos de la letra «$\mathbb{Q}$».

Un último apunte sobre la notación es que ahora sí que existe riesgo de confusión al escribir, por ejemplo, $-3.145145\cdots$, por lo que para evitar ambigüedades utilizaremos paréntesis para diferenciar los números reales $(-3).145145\cdots$ y $-3.145145\cdots$ que es el opuesto de $3.145145\cdots$. Además, al tratar con decimales exactos escribiremos simplemente 4.674, en lugar de $4.674000\cdots$ y para los decimales periódicos escribiremos $7.2\overline{147}$ en lugar de $7.2147147\cdots$

Con todos estos convenios de notación y todo lo visto, vemos que ahora tienen un sentido preciso expresiones como

$$\frac{7}{3} = 2.\overline{3},$$

o

$$3.14 - \frac{15}{4} = -0.61 = -\frac{61}{100} = (-1).39,$$

o incluso

$$4.1\overline{53} = 4 + \frac{1}{10} + \frac{5}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{5}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \cdots$$

Es decir, hemos recuperado la notación habitual que todos esperamos para los números reales, pero sigue quedando un pequeño detalle que a más de uno podría hacerle chasquear los dientes. Para nosotros el número decimal $0.999\cdots$ no es un número real, pero cualquiera que sepa un poco sobre números reales y no haya seguido nuestra construcción levantará una ceja al leerlo. Nuestro último objetivo será por tanto reconciliarnos con los números decimales máximos.

14 LOS NÚMEROS REALES: SU ÚLTIMO SALUDO

Recordemos que ya sabemos qué son los números reales desde nuestra primera lección. Vimos que, en virtud del Teorema 3.1, podemos llamar «números reales» a cualquier cuerpo ordenado Dedekind-completo, y lo que hemos hecho durante el resto del curso ha sido mostrar que realmente existe al menos un cuerpo con estas características. Ahora bien, la grandeza e importancia del Teorema 3.1 reside en que, una vez establecida la existencia de uno de estos cuerpos, podemos olvidarnos completamente de la construcción concreta que hayamos utilizado. Es decir, ahora que sabemos que existen, podemos simplemente llamar números reales a los elementos de un cuerpo ordenado Dedekind-completo que fijemos, no importa cuál, y trabajar con ellos utilizando únicamente sus propiedades algebraicas y analíticas, sin que nos importe lo más mínimo si los elementos de este conjunto son sucesiones de enteros, subconjuntos de números racionales o clases de equivalencia de sucesiones de racionales[4]. Esto es lo que haremos desde ahora, pero para poder dar este paso nos queda una última pregunta por responder.

Todos los que hemos trabajado con números reales, sabiendo o no lo que realmente son, hemos aprendido en algún momento sobre la notación o representación decimal de los mismos. Con nuestra construcción esta representación decimal es algo explícito, pues nuestros números reales son precisamente cierto subconjunto de los números decimales, pero nos queda por especificar qué significa exactamente esto de la «representación decimal» en un cuerpo ordenado Dedekind-completo arbitrario:

Definición 14.1. Sea K un cuerpo ordenado y Z su subconjunto de números enteros. Definimos el conjunto de **números decimales** de K, que denotaremos por $\mathbb{D}_K$, como el conjunto de sucesiones de elementos de Z tales que, salvo su primer elemento, todos los demás están entre 0 y 9. Representaremos los números decimales de K con letras en negrita: $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, etc.

Dado entonces $x \in K$ y $\mathbf{x} = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ un número decimal de K, diremos que x **está representado** por $\mathbf{x}$, que $\mathbf{x}$ **representa** a x o que $\mathbf{x}$ es una **representación decimal** de x, si se cumple que

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{10^n}.$$

Esta última serie suele denotarse como $x_0.x_1x_2x_3\cdots$.

Conviene aclarar que la definición que acabamos de ver de número decimal es algo atípica, por lo que lo justo es explicar las diferencias con la «definición convencional» y que cada uno de vosotros opte por la vía[5] que más le guste:

[4] Estas dos últimas son alusiones a otras construcciones famosas de los números reales. Al final de la entrada os daré referencias por si alguien tiene curiosidad.

[5] Os recomiendo consultar la Sección 1.4 del libro Análisis matemático de Carlos Ivorra para explorar esta otra vía. Además, en su exposición podréis observar dos resultados adicionales que aquí nos hemos dejado en el tintero:

- La representación decimal de un número real no es más que una extensión de la representación decimal de los números enteros, por lo que ambos resultados pueden unificarse en uno solo.
- Aunque aquí solo hemos hablado de representación «decimal», las definiciones y resultados pueden extenderse a cualquier otra base, dando lugar a las conocidas representaciones binaria o hexadecimal.

- Normalmente se definen los números decimales como los límites de las sucesiones que nosotros hemos llamado «números decimales». Es decir, lo que nosotros hemos llamado «números decimales» podríamos haberlo denominado «expresiones decimales» y después definir los números decimales como las series de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{10^n}$ donde $\{x_n\}$ es una expresión decimal. Bajo esta definición los números decimales son realmente elementos del cuerpo, luego para el caso que nos ocupa serían realmente números reales y no meras representaciones de los mismos.

  A mí me gusta más pensar en los números decimales como una representación de los números reales, por eso prefiero tratarlos como sucesiones, para luego recuperar la igualdad con los números reales a través de la notación $x_0.x_1x_2x_3\cdots$, que representa precisamente la serie anterior.

  En resumen, con cualquiera de los dos enfoques tiene sentido decir que, por ejemplo, $1.333\cdots = \frac{4}{3}$, y en ambos enfoques significa lo mismo, la única diferencia reside en qué llamamos «número decimal». Que cada uno tome el camino que desee.

- Normalmente los números decimales se definen únicamente con $x_0 \geqslant 0$ y para tratar con números negativos se toma simplemente el opuesto de la serie anterior.

  Este enfoque es perfectamente válido, pero en mi opinión no se pierde nada al extender la definición y nos da una representación adicional para los números negativos. De nuevo, que cada uno tome el camino que desee.

Subjetividades aparte, esta definición (en cualquiera de sus dos versiones) generaliza el concepto de número decimal a cualquier cuerpo ordenado. Además, por no alargar más la exposición no vamos a dar la definición explícita, pero es obvio que en cada cuerpo ordenado podemos igualmente definir el concepto de decimal periódico, decimal exacto o máximo, así como el concepto de equivalencia entre números decimales. Con todo, tenemos el siguiente resultado general:

Teorema 14.2. *Sea* R *un cuerpo ordenado Dedekind-completo,* Z *su subconjunto de números enteros y* Q *su subconjunto de números racionales. Se cumplen*:

(i) *Todo elemento de* R *está representado por un número decimal de* R.

(ii) *Todo número decimal de* R *representa a un número real. Además, dos números decimales de* R *representan al mismo elemento de* R *si, y solo si, son iguales o equivalentes.*

(iii) $x \in Q$ *si, y solo si, está representado por un número decimal periódico de* R. *Además, si* x *es de la forma* $\frac{a}{10^n}$ *para ciertos* $a \in Z$ *y* $n \in \mathbb{N}$, *entonces estará representado por exactamente dos números decimales de* R, *los cuales serán equivalentes entre sí, mientras que si* $x \notin Q$ *o es racional, pero no de la forma anterior, entonces estará representado por un único número decimal de* R.

La demostración de este teorema es vuestro trabajo de final de curso, pero no os asustéis, es muy sencillo de demostrar si utilizáis los resultados que hemos visto en el curso y el hecho de que existe un isomorfismo de cuerpos entre R y el conjunto de números reales que hemos construido. Como siempre, los comentarios de la entrada así como el correo de contacto están disponibles si alguien tiene cualquier duda al respecto.

Ahora sí, con este nuevo resultado tenemos todas las herramientas necesarias para olvidarnos de cualquier construcción concreta de los números reales. Todos los resultados sobre números reales que encontréis en cualquier libro pueden demostrarse a partir de las propiedades de los cuerpos ordenados, la completitud y el Teorema 14.2.[6] Por tanto, desde ahora nos olvidaremos de nuestra construcción concreta y fijaremos un cuerpo ordenado Dedekind-completo $\mathbb{R}$ (no importa cual sea) al que llamaremos «el conjunto

[6] Realmente, este último teorema es también una consecuencia de lo anterior, pero es útil tenerlo presente como «herramienta básica».

de los números reales» y denotaremos por $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ sus subconjuntos de números naturales, enteros y racionales respectivamente.

Con este nuevo convenio siguen siendo ciertas todas las igualdades que vimos al final de la sección anterior, pero además ahora también tiene sentido decir que $0.\overline{9} \in \mathbb{R}$, así como la siguiente igualdad que reconcilia los decimales exactos y máximos:

$$1 = 1.000\cdots = 0.\overline{9}.$$

15 CÁLCULOS PRÁCTICOS

Aunque ya sabemos sin lugar a dudas qué son los números reales, no está del todo claro cómo podemos operar con ellos de forma práctica, pero como os prometí en la lección anterior, vamos a ponerle remedio.

15.1 Algoritmo de la suma

Comencemos viendo un algoritmo para la suma de números reales a través de sus representaciones decimales.

Cuando sumamos dos números enteros, por ejemplo, 276 y 655, aunque tal vez nunca os hayáis dado cuenta, el algoritmo que a todos nos enseñaron consiste en descomponer cada número en su forma decimal

$$\begin{aligned} 276 &= 2\cdot 100 + 7\cdot 10 + 6,\\ 655 &= 6\cdot 100 + 5\cdot 10 + 5, \end{aligned}$$

y sumar sacando factor común las potencias de 10

$$276 + 655 = (2+6)\cdot 100 + (7+5)\cdot 10 + (6+5).$$

El problema ahora surge en que, por ejemplo, al sumar 6 y 5 obtenemos un número mayor que 9, en concreto 11, luego lo que hacemos es descomponerlo nuevamente como $11 = 10 + 1$ y volver a sacar factor común

$$276 + 655 = (2+6)\cdot 100 + (7+5+1)\cdot 10 + 1.$$

De aquí es de donde surge el famoso «me llevo una», y si lo repetimos ahora con las decenas obtenemos que $7 + 5 + 1 = 13 = 10 + 3$, luego

$$\begin{aligned} 246 + 655 &= (2+6)\cdot 100 + (10+3)\cdot 10 + 1 = (2+6)\cdot 100 + 100 + 3\cdot 10 + 1\\ &= (2+6+1)\cdot 100 + 3\cdot 10 + 1. \end{aligned}$$

Repitiendo ahora con las centenas obtenemos finalmente que $276 + 655 = 931$.

Si intentáramos hacer lo mismo con los números reales nos encontraríamos con un gran problema, pues si no están representados por decimales exactos, no hay una «primera posición» a partir de la cual comenzar a sumar y a contar las que «nos llevamos». Para solucionar este problema, la idea es que, en lugar de ir sumando y contando las que nos llevamos al mismo tiempo, contaremos primero las que nos llevamos, y después sumaremos cada dígito por separado.

Esto quiere decir que, en primer lugar, definiremos una sucesión $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ que vale 1 si nos llevamos una al sumar los dígitos en la n-ésima posición y 0 en caso contrario, y después utilizaremos esta sucesión para obtener cada dígito de nuestra suma. Por tanto, el primer paso será pensar en qué situaciones puede ocurrir que $e_n = 1$. Pensándolo un poco, si $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son números decimales, e_n solo puede ser 1 en dos situaciones: si $x_n + y_n > 9$, o bien si $x_n + y_n = 9$, pero $x_{n+1} + y_{n+1} > 9$. Bueno, realmente puede

ocurrir en más situaciones, puesto que si $x_{n+1} + y_{n+1} = 9$, pero $x_{n+2} + y_{n+2} > 9$, entonces también deberemos «llevarnos una» en la posición n-ésima (con números enteros, este es el caso al sumar, por ejemplo, 4227 y 1775).

En definitiva, dados dos números decimales $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ definimos la sucesión

$$e_n := \begin{cases} 1 & \text{si } x_n + y_n > 9 \text{ o } x_n + y_n = 9 \text{ y existe un } m > n \\ & \text{tal que } x_m + y_m > 9 \text{ y } x_i + y_i = 9 \text{ para cada } n < i < m \\ 0 & \text{si se da otro caso} \end{cases} \tag{13}$$

Sabiendo ya cuando nos «llevamos una», podemos pasar a sumar cada dígito por separado:

- Si $x_n + y_n < 9$, entonces incluso aunque nos hayamos llevado una al sumar x_{n+1} e y_{n+1}, sabemos que $x_n + y_n + 1 \leqslant 9$, luego el valor de este dígito en la suma será simplemente $x_n + y_n + e_{n+1}$.
- Si $x_n + y_n = 9$, entonces el valor de este dígito en la suma es 9 si no nos habíamos llevado ninguna, pero será 0 si nos habíamos llevado alguna, y podemos juntar ambos casos estableciendo que el valor de este dígito en la suma es $9(1 - e_{n+1})$.
- Finalmente, si $x_n + y_n > 9$, entonces el valor de este dígito en la suma será las unidades de $x_n + y_n + e_{n+1}$, lo cual podemos conseguirlo con la fórmula $x_n + y_n + e_{n+1} - 10$.

En definitiva, definimos

$$s_n := \begin{cases} x_n + y_n + e_{n+1} & \text{si} \quad x_n + y_n < 9 \text{ o } n = 0 \\ 9(1 - e_{n+1}) & \text{si} \quad n > 0 \text{ y } x_n + y_n = 9 \\ x_n + y_n + e_{n+1} - 10 & \text{si} \quad n > 0 \text{ y } x_n + y_n > 9 \end{cases} \tag{14}$$

Calculando las sucesiones $\{e_n\}$ y $\{s_n\}$ podemos obtener el valor de cualquier suma de números reales:

Teorema 15.1. *Sean $x, y \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ e $\mathbf{y} = \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ representaciones decimales de los mismos y $\mathbf{e} = \{e_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\mathbf{s} = \{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ las sucesiones definidas en (13) y (14) respectivamente. Entonces, se cumple que $\mathbf{s}$ es una representación decimal de $x + y$, es decir, que $\mathbf{s} \in \mathbb{D}_{\mathbb{R}}$ y*

$$x + y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{10^n}.$$

Demostración. En primer lugar, observemos que como $e_n \in \{0, 1\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, de la propia definición se obtiene que $s_n \in \mathbb{Z}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y que $0 \leqslant s_n \leqslant 9$ para cada $n \geqslant 1$, luego $\mathbf{s} \in \mathbb{D}_{\mathbb{R}}$.

Veamos ahora que

$$x_n + y_n = s_n + 10e_n - e_{n+1} \tag{15}$$

para cada $n \geqslant 1$.

Distinguimos tres casos:

- Si $x_n + y_n < 9$, entonces $e_n = 0$ y $s_n = x_n + y_n + e_{n+1}$, luego claramente se cumple la igualdad descrita.
- Si $x_n + y_n = 9$ distinguimos dos subcasos:
  - Si $e_{n+1} = 1$, entonces $s_n = 0$ y, como $x_n + y_n = 9$, obtenemos de forma inmediata que $e_n = 1$ (¿por qué?), luego se cumple trivialmente la igualdad buscada.
  - Si $e_{n+1} = 0$, entonces $s_n = 9$ y, como $x_n + y_n = 9$, obtenemos de forma inmediata que $e_n = 0$ (¿por qué?), luego se cumple trivialmente la igualdad buscada.

- Si $x_n + y_n > 9$, entonces $e_n = 1$ y $s_n = x_n + y_n + e_{n+1} - 10$, luego se cumple la igualdad deseada.

Por otro lado, observemos que

$$x_0 + y_0 = s_0 - e_1,$$

mientras que si $n \geqslant 1$, por (15) tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{10^k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{y_k}{10^k} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x_k + y_k}{10^k} = s_0 - e_1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{s_k + 10e_k - e_{k+1}}{10^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{s_k}{10^k} - e_1 + e_1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{e_k}{10^{k-1}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{e_{k+1}}{10^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{s_k}{10^k} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{e_{k+1}}{10^k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{e_{k+1}}{10^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{s_k}{10^k} - \frac{e_{n+1}}{10^n}.\end{aligned}$$

En definitiva, hemos demostrado que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{10^k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{y_k}{10^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{s_k}{10^k} - \frac{e_{n+1}}{10^n} \tag{16}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Como

$$0 \leqslant \frac{e_{n+1}}{10^n} \leqslant \frac{1}{10^n},$$

el criterio del sándwich nos muestra que $\lim \frac{e_{n+1}}{10^n} = 0$, con lo que tomando límites en (16) obtenemos que, en efecto,

$$x + y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_k}{10^k}$$

tal y como queríamos ver. ■

15.2 Aproximaciones de la suma y el producto

Aunque el algoritmo de la subsección anterior nos permite sumar números reales de forma práctica, un algoritmo similar para el producto se vuelve bastante complicado. Además, en ocasiones es más útil poder **aproximar** nuestras sumas o productos con la precisión que deseemos que calcularlos de forma exacta, lo cual es incluso imposible para números irracionales cuyos decimales no tengan un patrón claro.

Comencemos viendo cómo aproximar la suma de dos números reales x e y.

Si son $\mathbf{x} = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ e $\mathbf{y} = \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ representaciones decimales de x e y respectivamente, tenemos que

$$x + y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k + y_k}{10^k},$$

luego para cada $n > m$

$$\begin{aligned}\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{x_k + y_k}{10^k} - \sum_{k=0}^{m} \frac{x_k + y_k}{10^k} \right| &= \left| \sum_{k=m+1}^{n} \frac{x_k + y_k}{10^k} \right| = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{x_k + y_k}{10^k} \\ &\leqslant 18 \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{10^k} = 2\left(\frac{1}{10^m} - \frac{1}{10^n} \right) \\ &< \frac{1}{10^{m-1}} - \frac{1}{10^{n-1}},\end{aligned}$$

con lo que tomando límites obtenemos que

$$\left| x + y - \sum_{k=0}^{m} \frac{x_k + y_k}{10^k} \right| \leqslant \frac{1}{10^{m-1}} \tag{17}$$

para cada $m \in \mathbb{N}$.

Como sí sabemos sumar números racionales de forma práctica, (17) nos dice cómo aproximar la suma de x e y con la precisión que queramos.

Pasemos ahora a ver cómo aproximar el producto de x e y.

De forma completamente análoga a lo visto anteriormente se obtiene que, dado $m \in \mathbb{N}$,

$$\left| x - \sum_{k=0}^{m} \frac{x_k}{10^k} \right| \leqslant \frac{1}{10^m}, \tag{18}$$

y lo mismo ocurre para y. Además, es fácil ver que[7]

$$x_0 - 1 < x \leqslant x_0 + 1,$$
$$y_0 - 1 < y \leqslant y_0 + 1,$$

luego definiendo

$$C := \max\{x_0 + 1, 1 - x_0, y_0 + 1, 1 - y_0\} > 0$$

se tiene que $|x| < C$ y $|y| < C$, y denotando

$$p_m := \sum_{k=0}^{m} \frac{x_k}{10^k},$$
$$q_m := \sum_{k=0}^{m} \frac{y_k}{10^k},$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} |x \cdot y - p_m \cdot q_m| &\leqslant |x \cdot y - x \cdot q_m| + |x \cdot q_m - p_m \cdot q_m| = |x|\,|y - q_m| + |q_m|\,|x - p_m| \\ &\leqslant \frac{|x| + |q_m|}{10^m} \leqslant \frac{|x| + |y| + |y - q_m|}{10^m} < \frac{2C + 1}{10^m}. \end{aligned}$$

En definitiva,

$$\left| x \cdot y - \sum_{k=0}^{m} \frac{x_k}{10^k} \cdot \sum_{k=0}^{m} \frac{y_k}{10^k} \right| < \frac{2C + 1}{10^m}, \tag{19}$$

para cada $m \in \mathbb{N}$.

Como hemos comentado, gracias a (17) y a (19) podemos aproximar las sumas y productos de números reales con la precisión que deseemos, pero más aún, el siguiente resultado nos permite utilizar estas aproximaciones para conocer con precisión los decimales exactos de $x + y$ o de $x \cdot y$ en la mayoría de casos:

Lema 15.2. *Sean $x, y \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ e $\mathbf{y} = \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ representaciones decimales no máximas de x e y respectivamente y $m \in \mathbb{N}$ tal que $0 < y_{m+1} < 9$. Entonces, si*

$$|x - y| < \frac{1}{10^{m+1}},$$

se cumple que $x_n = y_n$ para cada $n \leqslant m$.

[7] Recordad que tenemos que demostrarlo en general, no para nuestra construcción particular.

Demostración. Definamos

$$z := y + \frac{1}{10^{m+1}}$$

y

$$w := y - \frac{1}{10^{m+1}},$$

y sean **z** y **w** dos representaciones decimales no máximas de z y w respectivamente. Se cumplen:

- Como $|x - y| < \frac{1}{10^m}$, es claro que $w < x < z$.
- $z_n = y_n$ si $n \neq m+1$ y $z_{m+1} = y_{m+1} + 1$.[8]
- $w_n = y_n$ si $n \neq m+1$ y $w_{m+1} = y_{m+1} + 1$.

Veamos ya que $x_n = y_n$ para cada $n \leqslant m$.

Si no fuera así, existiría el menor $N \leqslant m$ tal que $x_N \neq y_N$. Ahora bien, si $x_N < y_N = w_N$, entonces $x \leqslant w$ (¿por qué?), mientras que si $z_N = y_N < x_N$, entonces $z \leqslant x$, pero como $w < x < z$, en cualquier caso obtenemos una contradicción. ■

Por ejemplo, consideremos los números π y $\sqrt{2}$, y denotemos sus representaciones decimales por $\{\pi_n\}$ y $\{\sqrt{2}_n\}$. Por (17) sabemos que para obtener una aproximación de su suma con un error menor a $\frac{1}{10^r}$ basta con calcular

$$\sum_{n=0}^{r+1} \frac{\pi_n + \sqrt{2}_n}{10^n}.$$

Por otra parte, para calcular el producto con el mismo error, necesitamos calcular primero

$$C = \max\{\pi_0 + 1, 1 - \pi_0, \sqrt{2}_0 + 1, 1 - \sqrt{2}_0\} = \{4, -2, 2, 0\} = 4,$$

y por (19) basta con hacer el producto

$$\sum_{n=0}^{r+1} \frac{\pi_n}{10^n} \cdot \sum_{n=0}^{r+1} \frac{\sqrt{2}_n}{10^n}$$

pues $\frac{2C+1}{10^{r+1}} < \frac{1}{10^r}$. En concreto, como[9]

$$\pi = 3.1415926535897...$$

y

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730...,$$

para $r = 11$ tenemos que

$$\sum_{n=0}^{12} \frac{\pi_n + \sqrt{2}_n}{10^n} = 4.5558062159627$$

---

[8] Aunque esto parece obvio, la demostración formal es consecuencia del Teorema 14.2:
Como $0 < y_{m+1} + 1 \leqslant 9$, tenemos que la sucesión $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ definida como $a_n = y_n$ si $n \neq m+1$ y $a_{m+1} = y_{m+1} + 1$ es un número decimal no máximo. Además, para cada $n > m$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{y_k}{10^k} + \frac{1}{10^{m+1}},$$

con lo que tomando límites

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y_k}{10^k} + \frac{1}{10^{m+1}} = y + \frac{1}{10^{m+1}} = z.$$

Así, tenemos que **a** es una representación decimal de z y el Teorema 14.2 nos dice que $\mathbf{a} = \mathbf{z}$ o que son equivalentes, pero como ambos son decimales no máximos, solo puede ocurrir que sean iguales, que es justo lo que queríamos ver.

[9] Cómo obtener la representación decimal de π o $\sqrt{2}$ es otra historia muy distinta que tal vez abordemos algún día.

y

$$\sum_{n=0}^{12} \frac{\pi_n}{10^n} \cdot \sum_{n=0}^{12} \frac{\sqrt{2}_n}{10^n} = 4.442882938156945833806697.$$

Además, gracias al Lema 15.2 podemos asegurar que

$$\pi + \sqrt{2} = 4.55580621596\cdots$$

y

$$\pi \cdot \sqrt{2} = 4.44288293815\cdots$$

15.3 Opuestos e inversos

Para finalizar con esta sección, veamos ahora cómo podemos calcular de forma práctica la representación decimal de opuestos e inversos de números reales.

Observemos que dado $x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} = \{x_n\}_{\infty}^{n=0}$ una representación decimal no máxima de x y $n \geqslant 1$, como el Lema 7.4 nos asegura que

$$1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k} + \frac{1}{10^n},$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} -\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{10^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{-x_k}{10^k} &= (-x_0 - 1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{-x_k}{10^k} + 1 \\ &= (-x_0 - 1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{9 - x_k}{10^k} + \frac{10 - x_n}{10^n}. \end{aligned}$$

Tomando límites obtenemos entonces que

$$-x = (-x_0 - 1) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9 - x_k}{10^k},$$

luego el número decimal $\{y_n\}$ dado por

$$y_n = \begin{cases} -x_0 - 1 & \text{si} \quad n = 0 \\ 9 - x_n & \text{si} \quad n > 0 \end{cases}$$

es una representación decimal de $-x$.

Por ejemplo, para el número e sabemos que

$$e = 2.718281828459045...,$$

luego

$$-e = -2.718281828459045... = (-3).281718171540954...$$

Finalmente, para calcular el inverso de un número real positivo[10] x, consideramos $\mathbf{x} = \{x_n\}$ una representación decimal de x y tomamos $N \in \mathbb{N}$ el menor natural tal que $x_N \neq 0$. Tenemos entonces que para cada $n \geqslant N$, si denotamos por

$$q_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{10^k}$$

[10] Si $x < 0$, entonces $-x > 0$ y como

$$\frac{1}{x} = -\frac{1}{-x},$$

basta con poder aproximar el inverso de $-x$.

se cumple que (¿por qué?)

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{q_n}\right| = \frac{|q_n - x|}{x \cdot q_n} \leqslant \frac{1}{10^n {q_N}^2}. \tag{20}$$

Por ejemplo, para calcular el inverso del número e, si denotamos por $\{e_n\}$ su representación decimal y por

$$E_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{e_k}{10^k},$$

como $e_0 = 2 \neq 0$, tenemos que para cada $n \geqslant 0$

$$\left|\frac{1}{e}-\frac{1}{E_n}\right| \leqslant \frac{1}{4 \cdot 10^n} < \frac{1}{10^n},$$

luego, por ejemplo, para $n = 11$ tenemos que

$$\frac{1}{E_{11}} = \frac{100000000000}{271828182845} = 0.36787944117\cdots$$

y el Lema 15.2 nos asegura que

$$\frac{1}{e} = 0.3678794411\cdots$$

Aunque, como hemos visto, tenemos algoritmos que nos permiten obtener tantos decimales como deseemos de cualquier operación básica con números reales, creo que es importante destacar que estos algoritmos nos son demasiado eficientes (pues suelen involucrar operaciones con números racionales de numeradores y denominadores enormes) y que existen otros muchísimo mejores. Dejo ya a cargo vuestro el informaros sobre el tema ;)

QUE LAS MATEMÁTICAS OS ACOMPAÑEN

Aunque nuestro viaje ha finalizado, espero que el de muchos de vosotros no haya hecho más que comenzar. Si os ha gustado el tema, me gustaría recomendaros que profundicéis un poco más en el mismo e investiguéis otras construcciones de los números reales mucho más comunes como son las cortaduras de Dedekind[11], que muestran mucho mejor la interpretación geométrica de los números reales, o la construcción de Cantor[12], la cual es técnicamente más simple.

Más aún, si os ha picado el bicho de las matemáticas os animo a que sigáis aprendiendo y compartiendo matemáticas, y por qué no un poquito de *spam*, a que os suscribáis a esta web (podéis hacerlo en la página de inicio, al final del todo) que seguirá siendo, espero que por muchos años, un lugar donde compartir matemáticas a todos los niveles.

Hemos llegado al final, pero antes de irme me gustaría pediros un favor. Si habéis seguido el curso, no importa la fecha que sea, y tenéis cualquier comentario sobre el mismo, bueno, malo o nefasto, me encantaría escucharlo para poder aprender y mejorar de cara a próximos cursos y entradas :)

En poco tiempo volveremos con muchas más matemáticas, pero hasta entonces, que las matemáticas os acompañen.

[11] Podéis consultar esta construcción en las Secciones 2.1 y 2.2 del libro de Geometría de Carlos Ivorra

[12] Podéis consultarla en el Capítulo 1 del libro de Análisis matemático de Carlos Ivorra.