

¿QUÉ SON LOS NÚMEROS REALES? PARTE IV

ESTEBAN MARTÍNEZ VAÑÓ

19 de octubre de 2026

ÍNDICE

11. Ordenando, que es gerundio	2
12. Sumemos, que es subjuntivo	6

PREFACIO

Ya tenemos nuestro conjunto de números reales, ahora solo nos falta convertirlo en un cuerpo ordenado Dedekind-completo. En esta entrada lo dotaremos de estructura de grupo ordenado Dedekind-completo y dejaremos el producto para nuestra última lección.

Por si sois nuevos por aquí, esta es la cuarta entrada de un pequeño curso a través del cual descubriremos juntos qué son los números reales. El público objetivo para este curso son estudiantes de bachillerato especialmente interesados en las matemáticas o estudiantes de primer curso en grados como matemáticas, física, estadística o ingeniería. Esto lo digo porque asumiremos un conocimiento mínimo de matemáticas, pero realmente cualquiera con interés puede seguirlo y utilizar los comentarios de las entradas o el correo de contacto de la web para preguntarme cualquier duda. Es decir, si de verdad os interesa el tema, os animo a seguir el curso aunque no encajéis en el perfil anterior y a preguntar todo lo que queráis sin miedo alguno.

Dicho todo esto, ¡qué comiencen las matemáticas!

11 ORDENANDO, QUE ES GERUNDIO

Para definir la suma y el producto en $\mathbb{R}$ sudaremos un poco, pero definir un orden en el conjunto de números decimales $\mathbb{D}$ es tan sencillo como saber buscar en el diccionario. Sé que algunos estaréis pensando que he utilizado una analogía muy rara para señalar la sencillez de algo, pero es que no es una analogía, realmente el orden que vamos a definir en $\mathbb{D}$ es el mismo que el que utilizan los diccionarios.

Definición 11.1. Dados dos números decimales x e y diremos que x es **estrictamente menor** que y , lo que representaremos como $x \prec y$, si existe un natural $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_N < y_N$ y $x_n = y_n$ para cada $n < N$.

Aunque la definición¹ pueda parecer complicada, insisto en que únicamente estamos ordenando los números decimales como lo haríamos en un diccionario, «de forma alfabética». En efecto, dados dos números decimales distintos x e y comparamos x_0 e y_0 . Si $x_0 < y_0$, entonces decimos que $x \prec y$, si $y_0 < x_0$ entonces decimos que $y \prec x$, mientras que si $x_0 = y_0$, lo que hacemos es pasar a comparar x_1 e y_1 y repetimos el mismo procedimiento. Podríamos decir que los números decimales forman un diccionario cuyas palabras tienen infinitas letras.

Volviendo la vista a la secundaria, esta no es ni más ni menos que la forma en la que nos enseñaron a ordenar los números decimales, por lo que de momento no hemos visto nada nuevo. Sin embargo, ahora sabemos qué entienden los matemáticos por «orden» (recordad la Definición 2.1), con lo que podemos asegurar que la relación que hemos dado es realmente una relación de orden estricto:

Lema 11.2. *La relación dada en la Definición 11.1 es una relación de orden estricto total en $\mathbb{D}$.*

Demostración. Para ver que es una relación de orden estricto debemos ver que es irreflexiva y transitiva. Comencemos con la **irreflexividad**.

Supongamos, por reducción al absurdo, que existe un número decimal x cumpliendo que $x \prec x$. Por definición esto implica que existe un número natural N tal que $x_N < x_N$ y esto es claramente una contradicción.

Respecto a la **transitividad**, sean x, y, z números decimales tales que $x \prec y$ e $y \prec z$, y veamos que $x \prec z$. Por definición, existen dos naturales N_1, N_2 tales que $x_{N_1} < y_{N_1}$, mientras que $x_n = y_n$ si $n < N_1$, e $y_{N_2} < z_{N_2}$ siendo $y_n = z_n$ si $n < N_2$. Tomando entonces $N = \min\{N_1, N_2\}$ tenemos que:

- Si $N_1 \leq N_2$, entonces $N = N_1$ y

$$x_N = x_{N_1} < y_{N_1} \leq z_{N_1} = z_N.$$

Además, si $n < N$, entonces también $n < N_2$ y tenemos que $x_n = y_n = z_n$.

- Si $N_2 < N_1$ se prueba de forma análoga que $x_N < z_N$ y que $x_n = z_n$ si $n < N$.

Vemos que en cualquier caso se cumple que $x \prec z$ tal y como queríamos ver.

Finalmente, para ver que este **orden es total** debemos probar que si x e y son dos números decimales distintos, entonces $x \prec y$ o $y \prec x$. Para ello, basta observar que como $x \neq y$, existe el menor número natural N tal que $x_N \neq y_N$, con lo que o bien $x_N < y_N$, lo que implica que $x \prec y$, o bien $y_N < x_N$, lo que implica que $y \prec x$. ■

Este lema nos permite afirmar que, en particular, $\mathbb{R}$ es un conjunto totalmente ordenado. Más aún, ahora podemos ver que la aplicación $j : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ que definimos en la entrada anterior no solo nos permite identificar de forma biunívoca los números racionales con los números decimales periódicos no máximos, sino que además respeta el orden.

¹ Quienes estéis más familiarizados con los números decimales podríais encontrar este orden «extraño», pues distingue entre parejas de decimales equivalentes. Sin embargo, en el Lema 11.5 demostraremos que esta distinción no supone ningún tipo de problema una vez restringimos el orden a los números reales.

Proposición 11.3. La aplicación $j : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ respeta el orden, es decir, dados dos números racionales p, q se cumple que

$$p < q \text{ si, y solo si, } j(p) < j(q). \quad (1)$$

En otras palabras, j es un isomorfismo entre conjuntos ordenados.

Demostración. Sean $p, q \in \mathbb{Q}$ tales que $p < q$ y denotemos por $x := j(p)$ e $y := j(q)$.

Como j es inyectiva y $p \neq q$, tenemos que $x \neq y$, luego existe el menor natural N tal que $x_N \neq y_N$. Para probar entonces que $x < y$ basta con demostrar que $x_N < y_N$, luego supongamos, por reducción al absurdo, que $y_N < x_N$.

Como x representa a p e y representa a q , sabemos que $\lim s_n = p$ y $\lim t_n = q$, donde

$$s_n := \sum_{k=0}^n \frac{x_k}{10^k},$$

$$t_n := \sum_{k=0}^n \frac{y_k}{10^k}.$$

Ahora bien, como $x_k = y_k$ para cada $k < N$, es claro que $s_n = t_n$ para cada $n < N$. Además, es también claro que al ser $y_N < x_N$ se cumple que $t_N < s_N$, y si es $n > N$ usando el Lema 7.4 obtenemos que

$$\begin{aligned} t_n &= t_{N-1} + \frac{y_N}{10^N} + \sum_{k=N+1}^n \frac{y_k}{10^k} \leq t_{N-1} + \frac{y_N}{10^N} + \sum_{k=N+1}^n \frac{9}{10^k} \\ &= t_{N-1} + \frac{y_N}{10^N} + \frac{1}{10^N} - \frac{1}{10^n} < t_{N-1} + \frac{y_N + 1}{10^N} \leq t_{N-1} + \frac{x_N}{10^N} \\ &= s_{N-1} + \frac{x_N}{10^N} = s_N \leq s_n. \end{aligned}$$

En definitiva, tenemos que $t_n \leq s_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y el Teorema 4.18 nos asegura entonces que $q = \lim t_n \leq \lim s_n = p$, lo cual contradice el hecho de que $p < q$.

Concluimos entonces que, en efecto, $x_N < y_N$ y con ello $j(p) < j(q)$.

Para probar el recíproco basta ver que si $q \leq p$, entonces $j(q) \leq j(p)$ (¿por qué?), pero esto es inmediato por la parte que ya hemos visto. ■

Aunque no lo parezca este resultado es muy importante. Nos dice que el orden usual que tenemos entre los números racionales y el orden que hemos definido en $\mathbb{D}$, en concreto en $\mathbb{Q}$, son esencialmente el mismo. Pensad el desastre que sería si, por ejemplo, resultara que $0.5000 \dots < 0.333 \dots$, cuando los números racionales que representan, $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ respectivamente, cumplen justo la desigualdad contraria. Si esto ocurriera no podríamos decir que $\mathbb{Q}$ representa al conjunto de los números racionales en $\mathbb{R}$, pues el orden entre ambos conjuntos no sería compatible.

Otra propiedad importante que también podemos demostrar ahora sobre los números reales es su densidad, pero podemos decir aún más, pues resulta que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$.

Teorema 11.4. El conjunto de números decimales periódicos no máximos $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, es decir, dados dos números decimales $x < z$, existe un $y \in \mathbb{Q}$ tal que $x < y < z$.

Demostración. Como $x < z$, existe cierto natural $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_N < z_N$ y $x_n = z_n$ para cada $n < N$. Además, como $x \in \mathbb{R}$ no puede ser un número decimal máximo, con lo que existe cierto $M > N$ tal que $x_M \neq 9$. Podemos definir entonces $y \in \mathbb{Q}$ como

$$y_n := \begin{cases} x_n & \text{si } n \leq N \\ 9 & \text{si } N < n \leq M \\ 0 & \text{si } n > M \end{cases}$$

y es claro que $x < y < z$. ■

El siguiente lema nos será útil más adelante, pero ahora mismo nos muestra que $\mathbb{D}$ no es denso con el orden que hemos definido y nos da otra justificación sobre por qué hemos eliminado los números decimales máximos al definir los números reales.

Lema 11.5. Sean $x, y \in \mathbb{D}$ números decimales equivalentes con x máximo e y exacto. Entonces $x \prec y$ y no existe ningún número decimal z tal que $x \prec z \prec y$.

Demostración. En primer lugar, como x e y son equivalentes y x es máximo, si denotamos por $m := n_9(x)$ tenemos que

$$y_n = \begin{cases} x_n & \text{si } n < m \\ x_n + 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n > m \end{cases}$$

Esto muestra que, claramente, $x \prec y$.

Por otra parte, supongamos, por reducción al absurdo, que existe cierto $z \in \mathbb{D}$ tal que $x \prec z \prec y$. Como $x_n = y_n$ para cada $n < m$, claramente debe ser $z_n = x_n$ para cada $n < m$ (¿por qué?). Además, como $x \prec z$ lo anterior también implica que $x_m \leq z_m$. De igual modo, como $z \prec y$ y $z_n = y_n$ para cada $n < m$, tenemos que $z_m \leq y_m$, luego $x_m \leq z_m \leq x_m + 1$ y se nos plantean únicamente dos opciones, o bien $z_m = x_m$, o bien $z_m = x_m + 1$.

Si se da la primera opción, es decir, si $z_m = x_m$, entonces tenemos que $z_n = x_n$ para cada $n \leq m$ y $z_n \leq 9 = x_n$ para cada $n > m$, pero esto contradice que $x \prec z$. Por otro lado, si se da la segunda opción, es decir, si $z_m = x_m + 1$, entonces entonces tenemos que $z_n = y_n$ para cada $n \leq m$ e $y_n = 0 \leq z_n$ para cada $n > m$, pero esto contradice que $z \prec y$.

En cualquier caso tenemos una contradicción, lo que demuestra que, tal y como queríamos ver, no existe ningún número decimal z tal que $x \prec z \prec y$. ■

Observad que este lema también nos dice que para cada pareja de decimales equivalentes tanto da tomar como número real el máximo o el exacto, porque al no existir ningún número decimal entre ambos, los dos se comparan igual con cualquier otro número decimal. Como ya os comenté, la razón para haber elegido los decimales exactos en lugar de los máximos es que resulta más cómodo trabajar con los primeros.

A pesar de este «defecto» en el orden de $\mathbb{D}$, resulta que sí es Dedekind-completo:

Lema 11.6. Todo conjunto no vacío y acotado superiormente de $\mathbb{D}$ tiene supremo en $\mathbb{D}$.

Demostración. Sea $A \subset \mathbb{D}$ un subconjunto no vacío y acotado superiormente por cierto $x \in \mathbb{D}$, y definamos el conjunto²

$$\Lambda_0 := \{a_0 : a \in A\},$$

es decir, el conjunto formado por los primeros términos de cada elemento de A . Como x es cota superior de A , dado cualquier $a \in A$ se cumple que $a_0 = x_0$ o $a_0 < x_0$, luego x_0 es cota superior de Λ_0 . Al ser Λ_0 un conjunto de números enteros acotado superiormente podemos concluir que existe su máximo (¿por qué?), el cual denotaremos por y_0 .

Observemos entonces que si $a, b \in A$, $a_0 = y_0$ y $b_0 \neq y_0$, entonces $b_0 < y_0$, con lo que $b \prec a$. Como estamos buscando el supremo de A , esto nos dice que podemos obviar cualquier elemento de A cuyo primer término no sea igual a y_0 , luego tiene sentido definir el conjunto

$$A_0 := \{a \in A : a_0 = y_0\}.$$

² Siendo más formales, este conjunto se define como

$$\Lambda_0 := \{m \in \mathbb{Z} : \exists a \in A \text{ tal que } m = a_0\}.$$

Como este conjunto no es vacío (¿por qué?), podemos repetir otra vez la misma historia y definir

$$\Lambda_1 := \{a_1 : a \in A_0\},$$

y como todos sus elementos son enteros entre 0 y 9, existe su máximo y_1 .

Como antes, observamos que si $a, b \in A_0$, $a_1 = y_1$ y $b_1 \neq y_1$, entonces $b \prec a$, lo que nuevamente nos dice que podemos considerar únicamente los elementos de A_0 tales que $a_1 = y_1$, con lo que tiene sentido definir

$$A_1 := \{a \in A_0 : a_1 = y_1\} = \{a \in A : a_0 = y_0 \text{ y } a_1 = y_1\},$$

el conjunto de enteros entre 0 y 9 no vacío

$$\Lambda_2 := \{a_2 : a \in A_1\}$$

y su máximo y_2 .

En general, podemos continuar el proceso anterior indefinidamente, lo que formalmente se traduce en la definición recursiva donde

$$\begin{aligned}\Lambda_0 &= \{a_0 : a \in A\}, \\ y_0 &= \max \Lambda_0, \\ A_0 &= \{a \in A : a_0 = y_0\},\end{aligned}$$

y para cada $n \geq 0$

$$\begin{aligned}\Lambda_{n+1} &= \{a_{n+1} : a \in A_n\}, \\ y_{n+1} &= \max \Lambda_{n+1}, \\ A_{n+1} &= \{a \in A_n : a_{n+1} = y_{n+1}\}.\end{aligned}$$

Una simple inducción muestra que Λ_n y A_n son no vacíos para cada $n \in \mathbb{N}$ y que

$$A_n = \{a \in A : a_k = y_k \text{ para cada } k \leq n\}. \quad (2)$$

Además, es claro que la sucesión $y := \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ es un número decimal, con lo que únicamente resta ver que es el supremo de A .

Comencemos viendo que y es cota superior de A , es decir, que dado $a \in A$ se cumple que $a \preceq y$.

Si $a = y$ no tenemos nada que probar, con lo que supongamos que $a \neq y$. En este caso existe el mínimo número natural N tal que $a_N \neq y_N$ y tenemos dos opciones:

- Si $N = 0$, la definición de y_0 nos da que $a_0 < y_0$, luego que $a \prec y$.
- Si $N > 0$, entonces por la definición de N se tiene que $a_n = y_n$ para cada $n \leq N-1$, luego por (2) sabemos que $a \in A_{N-1}$. Así, como $y_N = \max \{a_N : a \in A_{N-1}\}$, obtenemos que $a_N \leq y_N$ y al ser distintos que $a_N < y_N$. Esto prueba que $a \prec y$.

En cualquier caso obtenemos que $a \prec y$ que es justo lo que buscábamos.

Finalmente veamos que y es la menor de las cotas superiores, es decir, que si $z \in \mathbb{D}$ es otra cota superior de A , entonces $y \prec z$.

Como z es cota superior de A , siguiendo lo visto al comienzo de la prueba obtenemos que $a_0 \leq z_0$ para cada $a \in A$, con lo que en particular $y_0 \leq z_0$. Así, si $y_0 < z_0$ obtenemos directamente que $y \prec z$, mientras que si $y_0 = z_0$, entonces existe el mínimo número natural $N \geq 1$ tal que $y_N \neq z_N$. Ahora, como A_N es no vacío podemos elegir un elemento suyo b , que por (2) cumplirá que $b_n = y_n$ para cada $n \leq N$. Como además $y_n = z_n$ para cada $n < N$, obtenemos que $b_n = z_n$ para cada $n < N$, y como $b \in A$ y z es cota superior de este conjunto, concluimos que $y_N = b_N \leq z_N$. Como y_N y z_N son distintos, podemos asegurar que $y_N < z_N$ y con ello que $y \prec z$, tal y como queríamos demostrar. ■

Es posible que algunos penséis que este lema también prueba que $\mathbb{R}$ es Dedekind-completo, pero no os apresuréis. Que un conjunto sea Dedekind-completo para un cierto orden, no significa que todos sus subconjuntos lo sean. Sin ir más lejos, hemos visto que $\mathbb{D}$ es Dedekind-completo, pero $\mathbb{Q}$ no lo es (¿por qué?). Por suerte para nosotros, $\mathbb{R}$ sí es Dedekind-completo y no necesitamos tirar a la basura las tres entradas anteriores.

Teorema 11.7. *El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales es un conjunto ordenado Dedekind-completo.*

Demostración. Dado A un subconjunto no vacío y acotado superiormente de $\mathbb{R}$, el Lema 11.6 nos asegura que tiene supremo en $\mathbb{D}$, es decir, que existe un $x \in \mathbb{D}$ el cual es la menor cota superior de A . Si $x \in \mathbb{R}$, entonces será el supremo de A en $\mathbb{R}$ (¿por qué?), luego supongamos que $x \notin \mathbb{R}$.

Por definición, esto quiere decir que x es un número decimal máximo y podemos considerar el único número decimal exacto $y \in \mathbb{R}$ que es equivalente a x . Usando entonces el Lema 11.5 obtenemos que y es el supremo de A .

En efecto, dicho lema nos dice que $x \prec y$ y, como x es cota superior de A , claramente también lo es y . Además, si $z \in \mathbb{R}$ es una cota superior de A , tenemos que $x \prec z$ (no puede ocurrir que $x = z$ ya que $x \notin \mathbb{R}$) y el Lema 11.5 nos muestra que no es posible que se cumpla la desigualdad $z \prec y$, luego la totalidad del orden (Lema 11.2) implica que $y \preceq z$ que es justo lo que queríamos demostrar. ■

12 SUMEMOS, QUE ES SUBJUNTIVO

Ya estamos cerca, que nadie se baje del barco ahora. Hemos dado un paso muy importante en nuestro camino hacia la construcción de un cuerpo ordenado Dedekind-completo, pues ya hemos construido dos de estas tres palabras. Nos falta el cuerpo.



Como a nosotros, a Neil deGrasse Tyson le falta el cuerpo.

Es decir, nos falta definir una suma y un producto en $\mathbb{R}$ que cumplan todas las propiedades usuales que nos enseñaron en el colegio. Del producto nos encargaremos en la siguiente (y última) entrada, pero la suma podemos atacarla ya.

Antes de comenzar con la construcción de la suma, quiero enfatizar algo sobre esta sección. A continuación veremos algunas demostraciones algo técnicas, pero quiero que mientras las leáis vayáis reproduciéndolas en un papel a través de ejemplos concretos. ¿Por qué os pido esto? Pues porque, aunque ciertamente algunas demostraciones se vuelven técnicas al formalizar el caso general, realmente todas ellas son bastante obvias si uno parte de ejemplos concretos.

Ahora sí, volviendo a la suma, una posible idea sería diseñar un algoritmo parecido al que nos enseñaron en el instituto para sumar números decimales exactos, pero que abarque la totalidad de los números decimales (no máximos). Aunque esto es posible (lo veremos en la siguiente entrada), creo que resulta bastante engorroso porque hay que tener en cuenta que podemos «llevarnos una» infinitas veces, por lo que buscaremos otro enfoque.

Tal y como ocurría con el orden, queremos que la suma en $\mathbb{Q}$ también sea compatible con la suma que definamos en $\mathbb{Q}$, es decir, si denotamos esta posible suma por $\oplus$, queremos que dados dos números racionales p, q se cumpla que

$$j(p + q) = j(p) \oplus j(q). \quad (3)$$

Vale, aún no sabemos cómo definir $\oplus$, pero como sí o sí tiene que cumplir la igualdad anterior... ¿Y si simplemente forzamos una definición que la cumpla? Observad que si llamamos $x = j(p)$ e $y = j(q)$, podemos despejar p y q obteniendo $p = j^{-1}(x)$ y $q = j^{-1}(y)$, es decir, los números racionales que representan x e y , con lo que podemos transformar la igualdad anterior en

$$x \oplus y = j(p) \oplus j(q) = j(p + q) = j(j^{-1}(x) + j^{-1}(y)),$$

y leyendo únicamente el principio y el final de la cadena de igualdades anterior observamos que todo queda expresado únicamente en términos de x e y .

Es decir, si definimos para cada $x, y \in \mathbb{Q}$ la suma

$$x \oplus y := j(j^{-1}(x) + j^{-1}(y)),$$

donde fijaos que $x \oplus y$ es también un elemento de $\mathbb{Q}$, entonces es inmediato comprobar que j cumple (3) para todo par de números racionales.

Pongamos un ejemplo para que nadie se pierda.

Imaginad que queremos sumar los números decimales periódicos no máximos $x = -54.147252525 \dots$ e $y = 17.11221122 \dots$, ¿cómo lo hacemos? El primer paso es hallar $j^{-1}(x)$ y $j^{-1}(y)$, es decir, los racionales a los que representan x e y . Siguiendo lo visto en la Sección 9 (o las recetas mágicas del instituto, si aún no la habéis leído) sabemos que

$$j^{-1}(x) = -54 + \frac{14725 - 147}{99000} = -\frac{2665711}{49500}$$

y

$$j^{-1}(y) = \frac{171122 - 17}{9999} = \frac{5185}{303}.$$

Tenemos entonces que

$$j^{-1}(x) + j^{-1}(y) = -\frac{183684311}{4999500}$$

con lo que

$$x \oplus y = j(j^{-1}(x) + j^{-1}(y)) = j\left(-\frac{183684311}{4999500}\right) = -37.25946374637 \dots$$

Con esta nueva operación, podemos demostrar fácilmente que $\mathbb{Q}$ es un grupo ordenado.

Proposición 12.1. *El conjunto $\mathbb{Q}$ de números decimales periódicos no máximos es un grupo ordenado.*

En concreto, el elemento neutro es $\bigcirc := 0.000 \dots$ y dado $x \in \mathbb{Q}$ su elemento opuesto, que denotaremos simplemente por $-x$, es

$$j(-j^{-1}(x)).$$

Demostración. La asociatividad y la conmutatividad os las dejo como ejercicio, mientras que el elemento neutro es, como todos esperábamos, el número decimal $\bigcirc := 0.000 \dots$. En efecto, como $j^{-1}(\bigcirc) = 0$, dado $x \in \mathbb{Q}$ tenemos que

$$x \oplus \bigcirc = j \left(j^{-1}(x) + j^{-1}(\bigcirc) \right) = j \left(j^{-1}(x) + 0 \right) = j \left(j^{-1}(x) \right) = x.$$

Además, dado $x \in \mathbb{Q}$ su elemento opuesto será

$$y = j \left(-j^{-1}(x) \right),$$

pues

$$x \oplus y = j \left(j^{-1}(x) + j^{-1}(y) \right) = j \left(j^{-1}(x) - j^{-1}(x) \right) = j(0) = \bigcirc.$$

Finalmente, debemos ver que si $x, y, z \in \mathbb{Q}$ y $x \prec y$, entonces $x \oplus z \prec y \oplus z$, es decir, que

$$j \left(j^{-1}(x) + j^{-1}(z) \right) \prec j \left(j^{-1}(y) + j^{-1}(z) \right).$$

Como sabemos que j respeta el orden (Proposición 11.3), lo anterior es equivalente a ver que

$$j^{-1}(x) + j^{-1}(z) < j^{-1}(y) + j^{-1}(z),$$

luego a ver que $j^{-1}(x) < j^{-1}(y)$. Utilizando de nuevo la Proposición 11.3, vemos que esta última desigualdad es equivalente a ver que $x \prec y$, lo cual es cierto por hipótesis. ■

Ya sabemos cómo sumar números decimales periódicos no máximos y además cómo hacerlo de modo que se corresponda de forma biunívoca con la suma usual de los números racionales, ¿pero qué ocurre con los números decimales no periódicos?

La idea que seguiremos será ver que si x e y son dos números reales, entonces podemos «aproximarlos» a través de números decimales periódicos no máximos³ ${}^n x$ e ${}^n y$, como estos últimos sí sabemos cómo sumarlos, podemos definir la suma de x e y como el número real al que se «aproximan» las sumas ${}^n x \oplus {}^n y$. De forma un poco más precisa, al hablar de «aproximación» lo que nos gustaría es poder utilizar límites, es decir, encontrar sucesiones $\{{}^n x\}_{n=0}^{\infty}$, $\{{}^n y\}_{n=0}^{\infty}$ de elementos de $\mathbb{Q}$ tales que $\lim {}^n x = x$ y $\lim {}^n y = y$, y definir la suma de x e y como el límite de la suma de estas sucesiones, es decir, como $\lim({}^n x \oplus {}^n y)$. Sin embargo, la definición que vimos de límite (Definición 4.10) exigía que nuestro conjunto fuera al menos un grupo ordenado y precisamente buscamos definir una suma en $\mathbb{R}$, por lo que si utilizáramos límites para definir la suma estaríamos ante un nuevo caso de «pescadilla que se muerde la cola». Por suerte, en la segunda entrada ya vimos un resultado que relacionaba el límite de cierto tipo especial de sucesiones con un concepto que depende únicamente del orden, ¿lo recordáis? Me refiero al Teorema 4.21, que nos decía que en un grupo ordenado Dedekind-completo toda sucesión creciente y acotada superiormente converge a su supremo.

Pues bien, como aún no podemos hablar de límites, lo que sí podemos hacer es intentar aproximar cualquier número real x como el supremo de alguna sucesión creciente de elementos de $\mathbb{Q}$:

Lema 12.2. *Sea x un número real. Entonces, la sucesión $\{{}^n x\}_{n=0}^{\infty}$ contenida en $\mathbb{Q}$ y definida como*

$${}^n x_k = \begin{cases} x_k & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

es creciente y cumple que $\sup \{{}^n x : n \in \mathbb{N}\} = x$ (donde el supremo lo tomamos en $\mathbb{R}$).

³ Para no confundirnos con los subíndices o pensar que hablamos de potencias, denotaremos las sucesiones de números reales de la forma $\{{}^n x\}_{n=0}^{\infty}$. Enfatizándolo un poco más, la sucesión $\{{}^n x\}_{n=0}^{\infty}$ está formada por números decimales, es decir, cada ${}^n x$ es un elemento de $\mathbb{D}$ y, por tanto, es en sí otra sucesión cuyos elementos representaremos por ${}^n x_k$ para evitar cualquier tipo de confusión. Por ejemplo, ${}^4 x$ podría ser el número decimal $14.2017555 \dots$ y entonces ${}^4 x_0 = 14$, ${}^4 x_2 = 0$ y ${}^4 x_4 = 7$.

Antes de ver la demostración, observad que la definición de cada ${}^n x$ es la que todos esperamos, pues

$${}^n x = x_0.x_1x_2\dots x_{n-1}x_n000\dots,$$

es decir, ${}^n x$ es el número decimal exacto resultante de «eliminar la cola decimal de x ».

Demostración. En primer lugar debemos ver que ${}^n x \preceq {}^{n+1} x$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Observemos que, por la definición de ${}^n x$ y ${}^{n+1} x$, tenemos que ${}^n x_k = x_k = {}^{n+1} x_k$ para cada $k \leq n$, mientras que ${}^n x_{n+1} = 0$. Por tanto, si $x_{n+1} > 0$ tenemos que ${}^n x_{n+1} < x_{n+1} = {}^{n+1} x_{n+1}$ y esto muestra que ${}^n x \prec {}^{n+1} x$. Por otra parte, si $x_{n+1} = 0$, entonces ${}^n x_k = 0 = {}^{n+1} x_k$ para cada $k \geq n+1$, lo que implica que ${}^n x = {}^{n+1} x$.

En cualquier caso obtenemos que ${}^n x \preceq {}^{n+1} x$ tal y como queríamos demostrar.

Veamos ahora que x es cota superior del conjunto $\{{}^n x : n \in \mathbb{N}\}$, es decir, que ${}^n x \preceq x$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Si ${}^n x = x$, entonces es claro que ${}^n x \preceq x$, por lo que supongamos que son distintos. En dicho caso, como ya hemos visto muchas veces, existe el menor natural N tal que ${}^n x_N \neq x_N$ y como ${}^n x_k = x_k$ para cada $k \leq n$, concluimos que $N > n$. Esto implica que ${}^n x_N = 0$ y al ser $x_N \geq 0$ obtenemos que ${}^n x_N < x_N$, lo que muestra que ${}^n x \prec x$.

Finalmente, debemos ver que x es la menor de las cotas superiores de $\{{}^n x : n \in \mathbb{N}\}$.

Sea pues $z \in \mathbb{R}$ una cota superior de $\{{}^n x : n \in \mathbb{N}\}$ distinta de x y $N \in \mathbb{N}$ el menor natural tal que $x_N \neq z_N$. Tenemos entonces que $z_k = x_k = {}^N x_k$ para cada $k < N$ y $z_N \neq {}^N x_N$, luego como ${}^N x \preceq z$, debe ser ${}^N x_N < z_N$, es decir, $x_N < z_N$ y esto prueba que $x \prec z$ como queríamos demostrar. ■

Dado un número real x , la sucesión $\{{}^n x\}$ definida en el lema anterior la denominaremos **aproximación canónica** de x , y gracias a ella podemos definir la suma de dos números reales x y y , que de momento representaremos como $x \star y$, como

$$x \star y := \sup \{{}^n x \oplus {}^n y : n \in \mathbb{N}\}. \quad (4)$$

Si cerráramos aquí la discusión sobre la definición de esta suma, sin decir nada más, deberíais ir raudos y veloces al botón de contacto de la web y mandarme un correo (muy enfadados) diciendo que os estoy estafando, porque sin justificación la definición anterior no tiene ningún sentido. ¿Qué quiero decir con esto? Pues que hemos definido la suma de x y y como el supremo de cierto conjunto, ¿pero quién nos asegura que dicho supremo exista? Por suerte, como ya hemos visto que $\mathbb{R}$ es Dedekind-completo, únicamente necesitamos comprobar que para cualesquiera números reales x y y el conjunto $\{{}^n x \oplus {}^n y : n \in \mathbb{N}\}$ siempre está acotado superiormente:

Basta definir $x', y' \in \mathbb{Q}$ tales que $x'_0 = x_0 + 1$, $y'_0 = y_0 + 1$ y $x'_k = y'_k = 0$ si $k > 0$, y ver que ${}^n x \oplus {}^n y \prec x' \oplus y'$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como ya hemos visto que $\mathbb{Q}$ es un grupo ordenado, para ver lo anterior basta con demostrar que ${}^n x \prec x'$ e ${}^n y \prec y'$, pero esto es inmediato por la definición de $x', y', {}^n x$ y ${}^n y$.

Ahora sí, tenemos definida una suma en todo $\mathbb{R}$, ¿pero no os sigue molestando algo? Si tomamos $x, y \in \mathbb{Q}$ cual es la suma «buena», $x \oplus y$ o $x \star y$? Afortunadamente, no tenemos que elegir.

Lema 12.3. Si $x, y \in \mathbb{Q}$, entonces

$$x \oplus y = x \star y.$$

Antes de ver la demostración, quiero que observéis cómo en esta utilizaremos el hecho de que $\mathbb{Q}$ es un grupo ordenado para poder utilizar límites y sus propiedades, y así ahorrarnos el trabajar directamente con supremos, lo cual es mucho menos intuitivo.

Demostración. Debemos ver que

$$x \oplus y = \sup \{{}^n x \oplus {}^n y : n \in \mathbb{N}\}.$$

En primer lugar, observemos que por el Lema 12.2 sabemos que ${}^n x \preceq x$ e ${}^n y \preceq y$ para cada $n \in \mathbb{N}$, luego como $\mathbb{Q}$ es un grupo ordenado sabemos que ${}^n x \oplus {}^n y \preceq x \oplus y$.

Hemos demostrado pues que $x \oplus y$ es cota superior del conjunto $\{{}^n x \oplus {}^n y : n \in \mathbb{N}\}$, y solo resta probar que es la menor de las cotas superiores, es decir, que si $z \in \mathbb{R}$ es una cota superior de dicho conjunto, entonces $x \oplus y \preceq z$.

Supongamos, por reducción al absurdo, que no es así, es decir, que $z \prec x \oplus y$. Por el Lema 11.4, sabemos entonces que existe cierto $c \in \mathbb{Q}$ tal que $z \prec c \prec x \oplus y$. Ahora bien, el Lema 12.2 nos asegura que las sucesiones $\{{}^n x\}$ e $\{{}^n y\}$ son crecientes y que $x = \sup \{{}^n x : n \in \mathbb{N}\}$ e $y = \sup \{{}^n y : n \in \mathbb{N}\}$, luego como $\mathbb{Q}$ es un grupo ordenado, el Teorema 4.21 nos dice que $\lim {}^n x = x$ y $\lim {}^n y = y$. Usando entonces el Teorema 4.17 (ii) tenemos que $\lim ({}^n x \oplus {}^n y) = x \oplus y$, y como ${}^n x \oplus {}^n y \preceq z \prec c$ para cada $n \in \mathbb{N}$, el Teorema 4.18 (ii) nos muestra que $x \oplus y \preceq c$, lo cual es la contradicción buscada. ■

Como el lema anterior nos asegura que las operaciones $\oplus$ y $\star$ coinciden en $\mathbb{Q}$, desde ahora denotaremos la suma en $\mathbb{R}$ con el símbolo « $\oplus$ » en lugar de utilizar el símbolo « $\star$ ».

Ahora que ya tenemos definida una suma en $\mathbb{R}$ y que hemos solucionado todos los posibles problemas que pudiera tener, estamos casi listos para demostrar que, como buscábamos, $\mathbb{R}$ es un grupo ordenado Dedekind-completo, pero antes demostraremos un par de lemas que nos facilitarán mucho las cosas.

En primer lugar, observemos que podemos trabajar con cualquier sucesión creciente a la hora de calcular la suma, y no únicamente con las aproximaciones canónicas:

Lema 12.4. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y $\{{}^n a\}_{n=0}^\infty, \{{}^n b\}_{n=0}^\infty, \{{}^n c\}_{n=0}^\infty, \{{}^n d\}_{n=0}^\infty$ sucesiones crecientes de elementos de $\mathbb{Q}$ tales que

$$x = \sup \{{}^n a : n \in \mathbb{N}\} = \sup \{{}^n c : n \in \mathbb{N}\}$$

e

$$y = \sup \{{}^n b : n \in \mathbb{N}\} = \sup \{{}^n d : n \in \mathbb{N}\}.$$

Entonces

$$\sup \{{}^n a \oplus {}^n b : n \in \mathbb{N}\} = \sup \{{}^n c \oplus {}^n d : n \in \mathbb{N}\}.$$

En particular,

$$x \oplus y = \sup \{{}^n a \oplus {}^n b : n \in \mathbb{N}\} = \sup \{{}^n c \oplus {}^n d : n \in \mathbb{N}\}.$$

Demostración. Se prueba de forma completamente análoga a lo visto para ${}^n x \oplus {}^n y$ que los conjuntos $\{{}^n a \oplus {}^n b : n \in \mathbb{N}\}$ y $\{{}^n c \oplus {}^n d : n \in \mathbb{N}\}$ están acotados superiormente, con lo que existe su supremo en $\mathbb{R}$.

Veamos que

$${}^m a \oplus {}^m b \preceq \sup \{{}^n c \oplus {}^n d : n \in \mathbb{N}\} \quad (5)$$

para cada $m \in \mathbb{N}$, lo que prueba que

$$\sup \{{}^n a \oplus {}^n b : n \in \mathbb{N}\} \preceq \sup \{{}^n c \oplus {}^n d : n \in \mathbb{N}\}. \quad (6)$$

Distingamos cuatro casos:

- Existen ciertos $M, N \in \mathbb{N}$ tales que ${}^M a = x$ y ${}^N b = y$.

Como ${}^M a$ y ${}^N b$ son elementos de $\mathbb{Q}$, en particular $x, y \in \mathbb{Q}$ y, como $\mathbb{Q}$ es un grupo ordenado, podemos usar el Teorema 4.21 (i) para obtener que

$$x = \lim {}^n a = \lim {}^n c,$$

$$y = \lim {}^n b = \lim {}^n d.$$

El Teorema 4.17 (ii) nos dice entonces que $x \oplus y = \lim({}^n a \oplus {}^n b) = \lim({}^n c \oplus {}^n d)$, y como $\{{}^n a \oplus {}^n b\}$ y $\{{}^n c \oplus {}^n d\}$ son crecientes y están acotadas superiormente, el Teorema 4.21 (ii) nos muestra que

$$\begin{aligned} \sup \{{}^n a \oplus {}^n b : n \in \mathbb{N}\} &= \lim({}^n a \oplus {}^n b) = x \oplus y = \lim({}^n c \oplus {}^n d) \\ &= \sup \{{}^n c \oplus {}^n d : n \in \mathbb{N}\}, \end{aligned}$$

lo que prueba (6).

- Existe cierto $M \in \mathbb{N}$ tal que ${}^M a = x$ y ${}^n b \prec y$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Dado $m \in \mathbb{N}$, como $y = \sup \{{}^n d : n \in \mathbb{N}\}$ y ${}^m b \prec y$, existe cierto $k \in \mathbb{N}$ tal que ${}^m b \prec {}^k d \preceq y$. Además, como $x = {}^M a \in \mathbb{Q}$, utilizando que este último conjunto es un grupo ordenado obtenemos que⁴

$$x \oplus ({}^m b \ominus {}^k d) \prec x,$$

luego como $x = \sup \{{}^n c : n \in \mathbb{N}\}$, existe cierto $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$x \oplus ({}^m b \ominus {}^k d) \prec {}^p c \preceq x.$$

Finalmente, tomando $t \geq \max\{k, p\}$ tenemos que

$$\begin{aligned} {}^m a \oplus {}^m b &\preceq x \oplus {}^m b = x \oplus ({}^m b \ominus {}^k d) \oplus {}^k d \prec {}^p c \oplus {}^k d \preceq {}^t c \oplus {}^t d \\ &\preceq \sup \{{}^n c \oplus {}^n d : n \in \mathbb{N}\}, \end{aligned}$$

lo que prueba (5).

- Existe cierto $N \in \mathbb{N}$ tal que ${}^N b = y$ y ${}^n a \prec x$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Se demuestra de forma completamente análoga al caso anterior.

- ${}^n a \prec x$ y ${}^n b \prec y$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Dado $m \in \mathbb{N}$, existen $k, p \in \mathbb{N}$ tales que ${}^m a \prec {}^p c \preceq x$ y ${}^m b \prec {}^k d \preceq y$, luego tomando $t \geq \max\{k, p\}$ se tiene que

$${}^m a \oplus {}^m b \prec {}^p c \oplus {}^k d \preceq {}^t c \oplus {}^t d \preceq \sup \{{}^n c \oplus {}^n d : n \in \mathbb{N}\},$$

lo que prueba (5).

Exactamente los mismos argumentos sirven para demostrar la desigualdad contraria a (6), y esto prueba la igualdad buscada. ■

Por otro lado, el Lema 12.2 también nos permite demostrar el siguiente resultado que muestra que los elementos de $\mathbb{Q}$ realmente aproximan tan bien como queramos a cualquier número real:

Lema 12.5. Sean $x, c \in \mathbb{R}$ con c positivo, es decir, tal que $c \succ \bigcirc$. Entonces existen $a, b \in \mathbb{Q}$ tales que $a \prec x \prec b$ y $b \ominus a \prec c$.

Demostración. Distingamos dos casos en función de si x es un decimal exacto o no.

Si x es exacto, entonces $x \in \mathbb{Q}$ y podemos definir $q = j^{-1}(x)$. Además, por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ existe cierto $d \in \mathbb{Q}$ tal que $\bigcirc \prec d \prec c$, y podemos definir $\varepsilon = j^{-1}(d) > 0$. Tomando entonces $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2}{N} < \varepsilon$ y definiendo

$$\begin{aligned} r &= q - \frac{1}{N}, \\ s &= q + \frac{1}{N}, \end{aligned}$$

⁴ Por « $\ominus$ » nos referimos a la resta en $\mathbb{Q}$, es decir, dados $x, y \in \mathbb{Q}$

$$x \ominus y := x \oplus (-y),$$

donde $-y$ es el opuesto de y tal y como se describe en la Proposición 12.1.

se tiene que $r < q < s$ y $s - r = \frac{2}{N} < \varepsilon$. Basta entonces tomar $a := j(r)$ y $b := j(s)$ y es claro que $a \prec x \prec b$ y

$$b \ominus a = b \oplus j(-j^{-1}(a)) = b \oplus j(-r) = j(j^{-1}(b) + j^{-1}(j(-r))) = j(s - r) \\ \prec j(\varepsilon) = d \prec c.$$

Supongamos ahora que x no es un decimal exacto.

Como $c \succ \bigcirc$ tenemos que $c_n \geq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y que existe un $M \in \mathbb{N}$ tal que $c_M > 0$. Además, como x no es máximo, existe un $N > M$ tal que $x_N < 9$.

Definamos entonces $p \in \mathbb{Q}$ tal que $p_n = 0$ si $n \neq N$ y $p_N = 1$, $a := {}^N x$ y $b := {}^N x \oplus p$, que será un decimal exacto cumpliendo que $b_n = x_n$ si $n < N$, $b_N = x_N + 1$ y $b_n = 0$ si $n > N$ (¿por qué?). Usando el Lema 12.2 y que x no es exacto obtenemos que $a \prec x \prec b$ y que $b \ominus a = p \prec c$ (pues $c_n \geq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $p_M = 0 < c_M$), tal y como queríamos demostrar. ■

Ahora ya estamos listos para demostrar que hemos construido nuestro primer grupo ordenado Dedekind-completo:

Teorema 12.6. *El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales es un grupo ordenado Dedekind-completo.*

Además, su elemento neutro es el número decimal $\bigcirc := 0.000 \dots$ y dado $x \in \mathbb{R}$ su elemento opuesto viene dado por

$$\inf \{-{}^n x : n \in \mathbb{N}\},$$

donde $-{}^n x$ es el elemento opuesto de ${}^n x$ visto como elemento del grupo ordenado $\mathbb{Q}$.

Demostración. Ya vimos en el Teorema 11.7 que $\mathbb{R}$ es un conjunto ordenado Dedekind-completo, con lo que únicamente debemos ver que es un grupo ordenado con la suma que hemos definido.

Comencemos demostrando la **asociatividad**, es decir, que dados $x, y, z \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z.$$

Como $\mathbb{Q}$ es un grupo ordenado, tenemos que la sucesión $\{{}^n x \oplus {}^n y\}$ es creciente y, por definición,

$$x \oplus y = \sup \{{}^n x \oplus {}^n y : n \in \mathbb{N}\}.$$

Usando entonces el Lema 12.4 obtenemos que

$$(x \oplus y) \oplus z = \sup \{({}^n x \oplus {}^n y) \oplus {}^n z\}. \quad (7)$$

Análogamente, la sucesión $\{{}^n y \oplus {}^n z\}$ es creciente e

$$y \oplus z = \sup \{{}^n y \oplus {}^n z : n \in \mathbb{N}\},$$

con lo que el Lema 12.4 nos da nuevamente que

$$x \oplus (y \oplus z) = \sup \{{}^n x \oplus ({}^n y \oplus {}^n z)\}. \quad (8)$$

Finalmente, de la asociatividad de la suma en $\mathbb{Q}$ se tiene que

$$x \oplus (y \oplus z) \underset{(8)}{=} \sup \{{}^n x \oplus ({}^n y \oplus {}^n z)\} = \sup \{({}^n x \oplus {}^n y) \oplus {}^n z\} \underset{(7)}{=} (x \oplus y) \oplus z,$$

tal y como queríamos ver.

Veamos ahora la **conmutatividad**, es decir, que dados $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$x \oplus y = y \oplus x.$$

Esto es inmediato a partir de la conmutatividad de la suma en $\mathbb{Q}$, pues esta implica que ${}^n x \oplus {}^n y = {}^n y \oplus {}^n x$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y así

$$x \oplus y = \sup \{ {}^n x \oplus {}^n y \} = \sup \{ {}^n y \oplus {}^n x \} = y \oplus x.$$

Para demostrar ahora que $\bigcirc$ es el **elemento neutro**, basta con observar que ${}^n \bigcirc = \bigcirc$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y recordar que $\bigcirc$ es el elemento neutro de la suma en $\mathbb{Q}$ (ver la Proposición 12.1), pues con esto tenemos que para cualquier $x \in \mathbb{R}$

$$x \oplus \bigcirc = \sup \{ {}^n x \oplus {}^n \bigcirc \} = \sup \{ {}^n x \oplus \bigcirc \} = \sup \{ {}^n x \} = x.$$

Veamos ahora que todo número real tiene un **opuesto** para la suma, es decir, que dado $x \in \mathbb{R}$ existe cierto $y \in \mathbb{R}$ tal que $x \oplus y = \bigcirc$. En particular, veamos que esto se cumple al tomar

$$y := \inf \{ -{}^n x : n \in \mathbb{N} \}$$

donde $-{}^n x$ es el elemento opuesto de ${}^n x$ visto como elemento del grupo ordenado $\mathbb{Q}$.

En primer lugar, observemos que como la sucesión $\{ {}^n x \}$ es creciente, el hecho de que $\mathbb{Q}$ sea un grupo ordenado implica que la sucesión $\{ -{}^n x \}$ es decreciente. Además, es fácil ver que está acotada inferiormente (¿por qué?), con lo que al ser $\mathbb{R}$ Dedekind-completo podemos asegurar que y está bien definido.

Ahora, observemos que ${}^n y \preceq y \preceq -{}^n x$ para cada $n \in \mathbb{N}$, luego

$${}^n x \oplus {}^n y \preceq {}^n x \oplus (-{}^n x) = \bigcirc.$$

Como esto es cierto para todo número natural n concluimos que $\bigcirc$ es cota superior del conjunto $\{ {}^n x \oplus {}^n y : n \in \mathbb{N} \}$, y únicamente nos queda ver que es la menor de las cotas superiores para garantizar que $x \oplus y = \bigcirc$.

Para ver esto, debemos probar que si $z \in \mathbb{R}$ es tal que $z \prec \bigcirc$, entonces no es cota superior de $\{ {}^n x \oplus {}^n y : n \in \mathbb{N} \}$. Por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ (Teorema 11.4) existe un $c \in \mathbb{Q}$ tal que $z \prec c \prec \bigcirc$ y por el Lema 12.5 existen $a, b \in \mathbb{Q}$ tales que $a \prec y \prec b$ y $b \oplus a \prec -c$ (siendo $-c$ el opuesto de c en $\mathbb{Q}$). Estas desigualdades junto a la definición de y implican que existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que

$$\begin{aligned} y \preceq -{}^n x \prec b, \\ a \prec {}^m y \preceq y, \end{aligned}$$

luego tomando $k = \max \{ n, m \}$ y recordando que $\mathbb{Q}$ es un grupo ordenado

$${}^k x \oplus {}^k y \succeq {}^n x \oplus {}^m y \succ -b \oplus a \succ c \succ z,$$

lo que demuestra que, efectivamente, z no es cota superior de $\{ {}^n x \oplus {}^n y : n \in \mathbb{N} \}$.

Por último, debemos ver que la suma que hemos definido **respeto el orden**, es decir, que dados $x, y, z \in \mathbb{R}$ tales que $x \prec y$, se cumple que $x \oplus z \prec y \oplus z$.

Para ello observemos que como $x \prec y = \sup \{ {}^n y \}$, debe existir cierto $N \in \mathbb{N}$ tal que $x \prec {}^N y$, luego tenemos que

$${}^n x \preceq x \prec {}^N y$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Usando que $\mathbb{Q}$ es un grupo ordenado obtenemos que si $n \leq N$, entonces

$${}^n x \oplus {}^n z \preceq {}^N x \oplus {}^N z \prec {}^N y \oplus {}^N z \preceq y \oplus z,$$

mientras que si $n > N$, entonces

$${}^n x \oplus {}^n z \prec {}^N y \oplus {}^n z \preceq {}^N y \oplus {}^n z \preceq y \oplus z.$$

En cualquier caso obtenemos que

$${}^n x \oplus {}^n z \prec y \oplus z$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ y esto implica que

$$x \oplus z = \sup\{{}^n x \oplus {}^n z : n \in \mathbb{N}\} \preceq y \oplus z.$$

Finalmente, observemos que la desigualdad debe ser estricta, pues si fuera $x \oplus z = y \oplus z$, entonces denotando por w el opuesto de z se tiene que

$$x = (x \oplus z) \oplus w = (y \oplus z) \oplus w = y,$$

pero hemos partido del supuesto de que $x \prec y$. ■

Ahora que sabemos que $\mathbb{R}$ es un grupo ordenado, el Teorema 4.21 nos da de forma inmediata que

$$x \oplus y = \lim({}^n x \oplus {}^n y).$$

Más aún, por el Teorema 4.17 (ii) tenemos que si $\{{}^n a\}_{n=0}^{\infty}, \{{}^n b\}_{n=0}^{\infty}$ son dos sucesiones de números reales convergentes a x e y respectivamente, entonces

$$x \oplus y = \lim({}^n a \oplus {}^n b),$$

con lo que no es necesario calcular la suma a partir de las aproximaciones canónicas, ni siquiera a partir de sucesiones crecientes, sino que podemos utilizar cualesquiera sucesiones en $\mathbb{R}$ que nos faciliten los cálculos.

Con todo lo que hemos visto ya sabemos que en $\mathbb{R}$ existe una suma que cumple todo lo que queremos, pero no queda del todo claro cómo podemos sumar dos números reales en la práctica. De esto nos ocuparemos en la siguiente y última entrada, y además también definiremos un producto en $\mathbb{R}$ para poder obtener, por fin, nuestro deseado cuerpo ordenado Dedekind-completo. ¡No os la perdáis que ya estamos muy cerca de la meta!