

¿QUÉ SON LOS NÚMEROS REALES?

PARTE III

ESTEBAN MARTÍNEZ VAÑÓ

17 de octubre de 2026 a las 19:23

ÍNDICE

6. ¿Qué significan los puntos suspensivos?	2
7. Series, pero no de las de Netflix	5
8. Números decimales	7
9. Demostración del Teorema 8.7	11
10. Los números reales (otra vez)	16

PREFACIO

Continuamos con nuestra travesía sobre los números reales.

Ya mencionamos en la primera entrada que nuestra intención es construir los números reales, es decir, nuestro cuerpo ordenado Dedekind-completo, inspirándonos en los números decimales, pero para ello primero tendremos que aclarar qué significa realmente esto de los «números decimales». Por ejemplo, cuando en el instituto nos enseñan que $\frac{1}{3} = 0.3333 \dots$, ¿qué significan realmente estos puntos suspensivos? Todo esto y mucho más lo abordaremos en esta tercera y trepidante lección sobre los números reales ;)

Por si sois nuevos por aquí, esta es la tercera entrada de un pequeño curso a través del cual descubriremos juntos qué son los números reales. El público objetivo para este curso son estudiantes de bachillerato especialmente interesados en las matemáticas o estudiantes de primer curso en grados como matemáticas, física, estadística o ingeniería. Esto lo digo porque asumiremos un conocimiento mínimo de matemáticas, pero realmente cualquiera con interés puede seguirlo y utilizar los comentarios de las entradas o el correo de contacto de la web para preguntarme cualquier duda. Es decir, si de verdad os interesa el tema, os animo a seguir el curso aunque no encajéis en el perfil anterior y a preguntar todo lo que queráis sin miedo alguno.

Dicho todo esto, ¡qué comiencen las matemáticas!

6 ¿QUÉ SIGNIFICAN LOS PUNTOS SUSPENSIVOS?

Si uno recupera sus apuntes de secundaria (si es que no los quemó) y les quita el polvo, se encontrará con una gran cantidad de (inútiles) ejercicios convirtiendo números racionales en decimales. Es decir, encontrará un montón de ejercicios donde aplicando unos pasos mágicos que ya quisiera Harry Potter, obtiene cosas como que $\frac{1}{3} = 0.3333 \dots$ ($\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$ si uno quiere ser más *cool*), o que

$$\frac{273}{110} = 2.4\overline{81}.$$

Además, a todos nos enseñaron también los pasos mágicos para deshacer el hechizo anterior, es decir, para convertir expresiones como $5.14\overline{578}$ en la fracción $\frac{128516}{24975}$. Todo muy mágico, ¿pero qué significan realmente esos puntos suspensivos o esa barra encima de ciertos números? ¿De verdad es cosa de magia o simplemente nunca nos lo explicaron como tocaba?

Como podéis imaginar, la magia no pinta nada aquí, así que vayamos paso a paso. Empecemos por lo más sencillo, por los números que no involucran ningún tipo de punto ni símbolo raro. ¿Qué número estamos representando al escribir 1574? Parece una pregunta muy tonta, claramente estamos representando el número mil quinientos setenta y cuatro, pero si nos vamos más atrás, a la época del *cole*, y recordamos aquello de las unidades, decenas, centenas, etc., observaréis que lo que estamos representando con el número 1547 es aquel número formado por un bloque de 1000, cinco bloques de 100, 4 bloques de 10 y 7 bloques de 1. Matemáticamente,

$$1547 = 1000 + 5 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 7 \cdot 1.$$

¿Y por qué complicarnos así la vida? ¿A mí qué me importan las decenas o los millares? Pues te importan, porque nos permiten representar cualquier número utilizando únicamente diez símbolos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. ¿Os imagináis lo que sería tener que diseñar un símbolo nuevo para cada número?

Esto nos lo explicaron a todos en mayor o menor medida, pero por alguna extraña razón, al poner el maldito «punto decimal» entran en juego las recetas mágicas y desaparecen las matemáticas. Veamos un ejemplo. Para expresar el número 3.1415 como una fracción a todos nos enseñaron que lo que «hay que hacer» es poner en el numerador el mismo número pero sin el punto, es decir, 31415 y en el denominador un uno seguido de tantos ceros como números hay después del punto, es decir, 10000. Así, obtenemos que $3.1415 = \frac{31415}{10000}$.

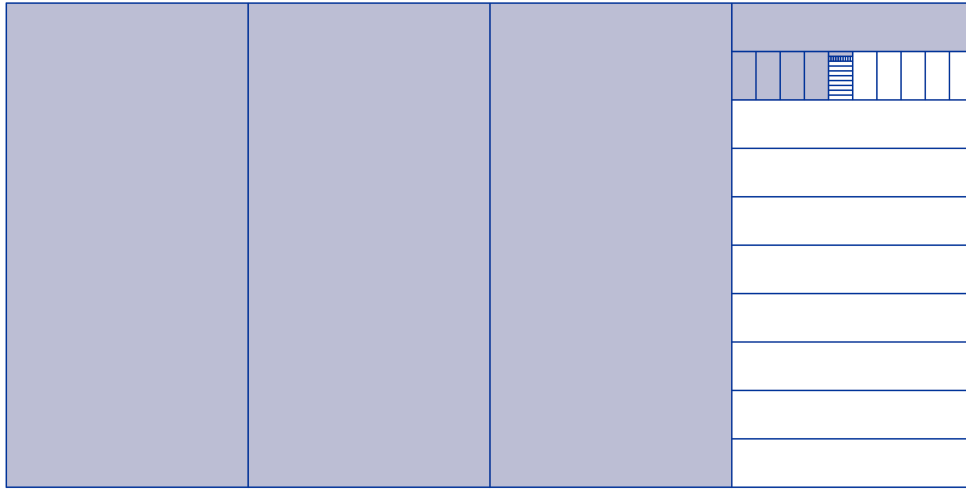


Volviendo a la sensatez, tal y como hemos visto con el número 1547, al escribir 3.1415 lo que estamos diciendo es que nuestro número está formado por 3 unidades, 1 décima

de unidad, 4 centésimas de unidad, 1 milésima de unidad y 5 diezmilésimas de unidad, es decir, que

$$3.1415 = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000},$$

y, como es de esperar, al hacer esta suma obtenemos el número racional $\frac{31415}{10000}$.



Representación gráfica del número decimal 3.1415.

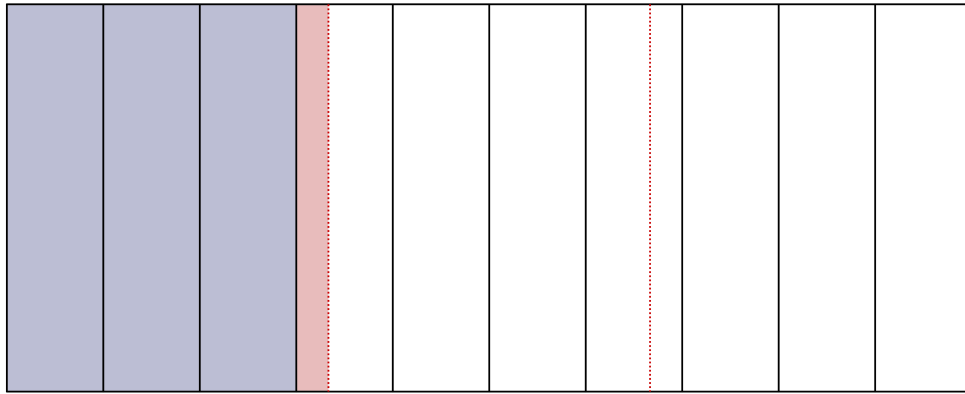
Fijaos que esto explica por qué funciona el método anterior. Si expresamos cada una de las fracciones anteriores con denominador 10000 obtenemos que

$$3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} = \frac{30000}{10000} + \frac{1000}{10000} + \frac{400}{10000} + \frac{10}{10000} + \frac{5}{10000} = \frac{31415}{10000}.$$



Memes aparte, vemos que los números decimales son una forma cómoda de expresar los números racionales como sumas de fracciones cuyos denominadores son potencias de diez y en sus denominadores únicamente aparecen los números enteros del 0 al 9. Como ocurría con el 1547, es una forma cómoda de darle nombre a cada número racional utilizando únicamente diez símbolos (once si contamos el punto). En mi opinión, hemos pasado de la magia y la incomprensión a la maravilla. ¡Podemos nombrar cualquier número racional con únicamente diez símbolos! Pero, un momento... ¿Y qué pasa con, por ejemplo, el número racional $\frac{1}{3}$?

Si queremos expresarlo de esta forma, como sumas de números racionales cuyos denominadores son potencias de diez y sus numeradores únicamente consisten en los números del 0 al 9, podemos comenzar como en la siguiente imagen:



Las líneas punteadas dividen la unidad en tres partes iguales.

Hemos rellenando 3 décimas de unidad, en color azul, pero aún nos falta por rellenar la fracción del rectángulo de color rojo. Concretamente, esta fracción será de

$$\frac{1}{3} - \frac{3}{10} = \frac{1}{30}$$

unidades de área. Si ahora rellenamos 3 centésimas de unidad más, nos acercamos un poco más a rellenar $\frac{1}{3}$ del área del rectángulo, pero aún nos falta por rellenar una fracción de

$$\frac{1}{3} - \frac{3}{10} - \frac{3}{100} = \frac{1}{300}$$

unidades del área. Si continuamos este proceso parece que siempre nos falta un poquito más por rellenar, nos lleva a pensar que

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \dots$$

donde los puntos suspensivos significan que la suma sigue y sigue con este mismo patrón. Ahora bien, una suma no puede tener infinitos sumandos... ¿no?

Es cierto que no sabemos sumar infinitas cosas de golpe, pero sí sabemos sumarlas poco a poco,

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{3}{10}, \\ s_2 &= \frac{3}{10} + \frac{3}{100} = \frac{33}{100}, \\ s_3 &= \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} = \frac{333}{1000}, \\ s_4 &= \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} = \frac{3333}{10000}, \end{aligned}$$

y con cada suma que hacemos nos acercamos más y más a la fracción $\frac{1}{3}$. Nos acercamos más y más... ¿No os suena esto de algo que ya hemos visto? En efecto, tenemos una sucesión de sumas $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ que parece converger al número racional $\frac{1}{3}$. Cada una de las sumas anteriores podemos expresarla de forma mucho más cómoda con la siguiente notación

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{3}{10^k}, \quad (1)$$

y lo que estamos afirmando es que la sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en $\mathbb{Q}$ y que su límite es $\frac{1}{3}$. Veámoslo.

Observemos que

$$s_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \dots + \frac{3}{10^{n-1}} + \frac{3}{10^n},$$

con lo que si multiplicamos por $\frac{1}{10}$ obtenemos que

$$\frac{1}{10}s_n = \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots + \frac{3}{10^n} + \frac{3}{10^{n+1}}.$$

¿Qué pasa ahora si restamos ambas expresiones? Pues que casi todos los términos se nos cancelan y nos queda únicamente que

$$s_n - \frac{1}{10}s_n = \frac{3}{10} - \frac{3}{10^{n+1}}. \quad (2)$$

Como

$$s_n - \frac{1}{10}s_n = \left(1 - \frac{1}{10}\right)s_n = \frac{9}{10}s_n,$$

despejando en (2) obtenemos que

$$s_n = \frac{3}{9} - \frac{3}{9 \cdot 10^n} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \frac{1}{10^n}.$$

Las propiedades de los límites nos dicen entonces que

$$\lim s_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \lim \frac{1}{10^n}$$

y como parece claro que $\lim \frac{1}{10^n} = 0$, podemos concluir que

$$\lim s_n = \frac{1}{3}.$$

Siguiendo la notación de (1), el límite de una sucesión de sumas como $\{s_n\}$ suele denotarse por

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k},$$

luego lo que hemos visto es que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k} = \frac{1}{3}.$$

Esto explica los puntos suspensivos y la igualdad en $0.333 \cdots = \frac{1}{3}$ y, siguiendo más o menos los mismos pasos, podríamos justificar también otras igualdades como $2.4\overline{81} = \frac{273}{110}$, pero antes de entrar en todo esto y ahora que ya tenemos una idea general de por dónde van los tiros, vamos a precisar las cosas con un poco más de calma.

7 SERIES, PERO NO DE LAS DE NETFLIX

A las sucesiones formadas a partir de sumas de otra sucesión dada se les suele llamar series:

Definición 7.1. Sea G un grupo ordenado y $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión en G . Se define la **serie** asociada a $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ como la sucesión $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ definida por

$$s_n := \sum_{k=0}^n x_k.$$

Denotaremos el límite de esta sucesión $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$, si existe, como $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, es decir,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n := \lim s_n.$$

Se han escrito libros enteros sobre series, pero a nosotros solo nos interesarán un tipo muy particular de series conocidas como **series geométricas**. Estas series son aquellas asociadas a sucesiones de la forma $x_n = r^n$ (por lo que únicamente tienen sentido en un cuerpo ordenado) y para ellas tenemos el siguiente resultado:

Teorema 7.2. Sea K un cuerpo ordenado arquimediano y $r \in K$ tal que¹ $-1 < r < 1$. Entonces la serie asociada a la sucesión² $x_n = r^n$ converge en K y

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}.$$

Como en breve comprobareis, la demostración que daremos es un calco de la que hemos visto con el ejemplo del $\frac{1}{3}$. Comencemos con un par de lemas que, por su utilidad, separaremos de la prueba del teorema:

Lema 7.3. Sea K un cuerpo ordenado arquimediano y $r \in K$ tal que $-1 < r < 1$. Entonces $\lim r^n = 0$.

Demostración. Si $r = 0$ el resultado es inmediato, por lo que supongamos, para empezar, que $0 < r < 1$.

Sea pues $\varepsilon \in K$ con $\varepsilon > 0$. Como $0 < r < 1$ tenemos que $M = \frac{1}{r} - 1 > 0$, y como K es arquimediano, existe cierto $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{\varepsilon} < NM$. Con todo, si $n \geq N$, usando la desigualdad de Bernoulli (Lema 5.3) obtenemos que

$$|r^n - 0| = r^n = \frac{1}{(1+M)^n} \leq \frac{1}{1+nM} \leq \frac{1}{nM} \leq \frac{1}{NM} < \varepsilon$$

tal y como queríamos ver.

Finalmente, si $-1 < r < 0$, entonces $0 < -r < 1$ y sabemos que $\lim (-r)^n = 0$. Con esto, dado $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $|(-r)^n| < \varepsilon$ y usando el Lema 5.2 (i) obtenemos que

$$|r^n| = |((-1) \cdot (-r))^n| = |(-1)^n (-r)^n| = |(-r)^n| < \varepsilon,$$

con lo que igualmente obtenemos el resultado buscado. ■

Lema 7.4. Sea K un cuerpo ordenado y $r \in K$ con $r \neq 1$. Entonces

$$\sum_{k=0}^n r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}.$$

Demostración. Observemos que si denotamos por

$$s_n = \sum_{k=0}^n r^k,$$

entonces

$$r \cdot s_n = r \cdot \sum_{k=0}^n r^k = \sum_{k=0}^n r^{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} r^k,$$

luego

$$s_n - r \cdot s_n = \sum_{k=0}^n r^k - \sum_{k=1}^{n+1} r^k = r^0 + \sum_{k=1}^n r^k - \sum_{k=1}^n r^k - r^{n+1} = 1 - r^{n+1}.$$

¹ A lo largo de esta entrada denotaremos los números racionales de un cuerpo K , es decir, aquellos de la forma $\frac{n}{m}1_K$, simplemente como $\frac{n}{m}$.

² Establecemos, por convenio, que $r^0 = 1$ para cualquier $r \in K$.

Como $s_n - r \cdot s_n = (1 - r)s_n$, despejando en la igualdad anterior obtenemos que

$$s_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

tal y como queríamos ver. ■

Ahora sí, la demostración del teorema es inmediata:

Demostración del Teorema 7.2. Si denotamos por $s_n = \sum_{k=0}^n r^k$, tenemos que demostrar que $\lim s_n = \frac{1}{1-r}$.

Por el Lema 7.4 tenemos que

$$s_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r} - r \frac{r^n}{1 - r},$$

y como por el Lema 7.3 sabemos que $\lim r^n = 0$, las propiedades de los límites nos permiten obtener que

$$\lim s_n = \frac{1}{1 - r} - r \frac{\lim r^n}{1 - r} = \frac{1}{1 - r},$$

que es justo lo que buscamos. ■

8 NÚMEROS DECIMALES

Hasta ahora hemos estado hablando de números decimales, pero sin especificar muy bien qué son estos números, por lo que si queremos seguir avanzando tenemos que remediar esto. Para ello, observemos que la notación decimal de un número racional no es más que una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ tal que $x_0 \in \mathbb{Z}$ (el número entero antes del punto decimal) y

$$x_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

para cada $n \geq 1$ (los dígitos decimales). Esto nos da de manera inmediata la definición buscada:

Definición 8.1. Un **número decimal** es una sucesión de números enteros $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ tal que

$$0 \leq x_n \leq 9$$

para cada $n \geq 1$.

Denotaremos el conjunto de todos los números decimales por $\mathbb{D}$.

Ya tenemos, por tanto, una definición de qué es número decimal, pero antes de continuar, veamos una pequeña observación respecto a la notación.

Cuando digamos que x es un número decimal, es decir, que $x \in \mathbb{D}$, no tenemos que entender que este « x » sea un número en sí, sino que es una sucesión de números enteros cuyos términos denotaremos, como ha sido costumbre hasta ahora, por x_n . Además, para enfatizar aún más la relación con lo dicho anteriormente, cuando queramos hablar de una sucesión $x \in \mathbb{D}$ concreta, la expresaremos como $x_0.x_1x_2x_3\cdots$. Por ejemplo, la sucesión $x \in \mathbb{D}$ tal que $x_0 = 47$ y $x_n = 1$ para cada $n \geq 1$ la expresaremos como $47.111\cdots$, mientras que la sucesión $y \in \mathbb{D}$ tal que $y_0 = -3$, $y_1 = 5$ e $y_n = 0$ para cada $n \geq 2$ la representaremos por $-3.5000\cdots$. Esta notación introduce cierta ambigüedad, pues no sabemos si la sucesión $-3.5000\cdots$ hace referencia a la sucesión y descrita anteriormente, o a la sucesión $z \in \mathbb{D}$ definida como $z_0 = -3$, $z_1 = 5$, $z_2 = z_3 = z_4 = 0$ y $z_n = 1$ para cada $n \geq 5$. Aunque esto es cierto, aplicaremos siempre un criterio de «buena fe», entendiendo que si aparece algún patrón claro antes de los puntos

suspensivos, es porque este se repite indefinidamente. En cualquier caso, en situaciones que puedan llevar a error o en las demostraciones formales siempre especificaremos completamente todos los términos de los números decimales.

Aclarado esto y con todo lo visto en las secciones anteriores, la relación entre los números decimales y los números racionales es clara:

Definición 8.2. Diremos que un número decimal $x \in \mathbb{D}$ **representa** a un número racional q (o que q **está representado** por x) si se cumple que

$$q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{10^n}. \quad (3)$$

En general, diremos que un número decimal $x \in \mathbb{D}$ representa a un número racional si existe un número racional q tal que x lo represente, es decir, tal que se cumpla (3).

Antes de continuar, debemos resaltar aquí una pequeña advertencia. Una sucesión como $-3.5000 \dots$ claramente representa a un número racional, de hecho al número

$$-3 + \frac{5}{10} = -\frac{5}{2}.$$

Esto puede resultar chocante, ya que habitualmente entendemos que el número decimal « -3.5 » representa al racional $-\frac{7}{2}$. La confusión radica en que al escribir « -3.5 » realmente queremos escribir algo como « $-(3.5)$ », es decir, el opuesto del número racional representado por « 3.5 », pero cuando nosotros escribimos $-3.5000 \dots$ no estamos hablando del opuesto de ningún número, simplemente estamos representando de forma cómoda los términos de una sucesión de $\mathbb{D}$, que resulta que se corresponde con cierto número racional, concretamente $-\frac{5}{2}$. Insisto, para nosotros ahora mismo no tiene ningún sentido escribir algo como « $-x$ » cuando x sea un número decimal, es decir, un elemento de $\mathbb{D}$, por lo que, teniendo esto en cuenta, no puede existir ningún tipo de confusión sobre a qué número racional representa $-3.5000 \dots$.

Aclarada esta posible confusión notacional, cualquiera con alma de matemático se haría las siguientes preguntas:

1. ¿Todo número decimal representa a algún número racional?
2. ¿Todo número racional está representado por algún número decimal?
3. En caso de que la anterior pregunta sea afirmativa, ¿es esta representación única?

Todos sabemos, o al menos en algún momento supimos, la respuesta a las dos primeras preguntas, aunque me temo que, tal y como explicaba al principio de la entrada, era más una cuestión de fe que de realmente conocer la respuesta. En cualquier caso, a todos nos contaron que los números decimales que se corresponden con números racionales son exactamente los decimales periódicos, es decir, aquellos en los que a partir de algún momento sus términos comienzan a repetirse. Es importante entender esto bien. A veces he visto cosas del estilo de «un número es racional si está representado por un número decimal cuyos términos siguen un patrón», y esto no es cierto. Por ejemplo, en breve veremos que aunque los términos del número decimal $0.101001000100001000001 \dots$ siguen claramente un patrón, no representa a ningún número racional.

Conocemos pues, la respuesta, pero necesitamos precisarla, ya que parece haber algo de confusión con qué significa eso de que cierto $x \in \mathbb{D}$ sea «periódico».

Definición 8.3. Decimos que un número decimal $x \in \mathbb{D}$ es **periódico**, si existen dos números naturales $m, p \in \mathbb{N}$ tales que para cada $k \in \mathbb{N}$

$$x_{m+k} = x_{m+(k \bmod p)},$$

donde $k \bmod p$ es el resto de dividir k entre p .

Denotaremos el conjunto de todos los números decimales periódicos por $\mathbb{D}_{\text{per}}$.

Aunque esta definición pueda sonar un poco «forzada», captura exactamente lo que queríamos. El natural m en la definición nos indica un punto de la sucesión a partir del cual hay sucesión finita de términos que se repite³, mientras que el natural p nos indica la longitud de esta sucesión finita de términos. Por ejemplo, si consideramos la sucesión

$$x = 4.102375375375 \dots$$

tenemos que cumple la definición anterior para $m = 4$ y $p = 3$. En efecto, dado $k \in \mathbb{N}$ tenemos tres opciones al dividirlo entre 3:

- Que el resto sea 0, luego $k = 3q$ para algún natural q y, por tanto,

$$x_{m+k} = x_{4+3q} = 3 = x_4 = x_{m+(k \bmod p)}.$$

- Que el resto sea 1, luego $k = 3q + 1$ para algún natural q y, por tanto,

$$x_{m+k} = x_{5+3q} = 7 = x_5 = x_{m+(k \bmod p)}.$$

- Que el resto sea 2, luego $k = 3q + 2$ para algún natural q y, por tanto,

$$x_{m+k} = x_{6+3q} = 5 = x_6 = x_{m+(k \bmod p)}.$$

Respecto a la tercera pregunta, resulta que, por desgracia, la representación decimal de un número racional no tiene por qué ser única. Por ejemplo, si consideramos $q = \frac{1}{2}$, es claro que el número decimal $x = 0.5000 \dots$ lo representa, pero resulta que el decimal $y = 0.4999 \dots$ también lo hace.

En efecto, para $s_n = \sum_{k=0}^n \frac{y_k}{10^k}$ se cumple que si $n \geq 2$

$$s_n = \frac{4}{10} + \sum_{k=2}^n \frac{9}{10^k} = \frac{4}{10} + 9 \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{10^{k+2}} = \frac{4}{10} + \frac{9}{100} \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{1}{10}\right)^k,$$

con lo que por el Lema 7.4 obtenemos que

$$s_n = \frac{4}{10} + \frac{9}{100} \frac{10 - \frac{1}{10^{n-2}}}{9} = \frac{4}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{10^n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{10^n},$$

y por el Lema 7.3 concluimos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n}{10^n} = \frac{1}{2}.$$

Esta falta de unicidad podría ser un golpe muy duro para la representación decimal, ya que si no tenemos unicidad, difícilmente vamos a poder asociar ciertos números decimales con los números racionales. Imaginad que algún número racional tuviera infinitas representaciones decimales distintas, ¿cuál elegiríamos como representante? ¿Bajo qué criterio? Por suerte, aunque no tenemos unicidad, tenemos algo muy parecido, pero para explicarlo necesitaremos introducir algo más de notación:

Definición 8.4. Diremos que un número decimal $x \in \mathbb{D}$ es **exacto** si existe un natural $N \geq 0$ tal que $x_n = 0$ para cada $n \geq N$. Además, si $x \in \mathbb{D}$ es exacto, definimos $n_0(x)$ como el mayor natural tal que $x_{n_0(x)} \neq 0$ (si $x = 0.000 \dots$ definimos $n_0(x) = 0$). Análogamente, diremos que x es **máximo** si existe un natural $N \geq 0$ tal que $x_n = 9$ para cada $n \geq N$ y definimos $n_9(x)$ como el mayor natural tal que $x_{n_9(x)} \neq 9$ (si $x = 9.999 \dots$ definimos $n_9(x) = 0$).

Si nos fijamos en el ejemplo anterior, $\frac{1}{2}$ está representado tanto por un decimal exacto como por uno máximo, y esto no es casualidad.

³ En el instituto a esta sucesión finita de términos que se repite lo llamábamos el **periodo** del número decimal.

Lema 8.5. Si un número racional q está representado por un decimal exacto x , entonces también está representado por el número decimal máximo y definido como

$$y_n := \begin{cases} x_n & \text{si } n < n_0(x) \\ x_n - 1 & \text{si } n = n_0(x) \\ 9 & \text{si } n > n_0(x) \end{cases} \quad (4)$$

Análogamente, si q está representado por un decimal máximo x , entonces también está representado por el número decimal exacto y definido como

$$y_n := \begin{cases} x_n & \text{si } n < n_9(x) \\ x_n + 1 & \text{si } n = n_9(x) \\ 0 & \text{si } n > n_9(x) \end{cases} \quad (5)$$

Demostración. Demostraremos el primer caso y os dejo el segundo como ejercicio, ya que es completamente análogo.

Supongamos por tanto que q está representado por un número decimal exacto x , es decir, que

$$q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{10^n} = \sum_{n=0}^{n_0(x)} \frac{x_n}{10^n}.$$

Por comodidad denotaremos $m := n_0(x)$, y observemos que para $n > m$ tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{y_k}{10^k} &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x_k}{10^k} + \frac{x_m - 1}{10^m} + \sum_{k=m+1}^n \frac{9}{10^k} = \sum_{k=0}^m \frac{x_k}{10^k} + 9 \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{10^k} - \frac{1}{10^m} \\ &= q + 9 \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{10^k} - \frac{1}{10^m}. \end{aligned}$$

Además, por el Lema 7.4 tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{10^k} &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{10^k} - \sum_{k=0}^m \frac{1}{10^k} = \frac{1}{9} \left(\left(10 - \frac{1}{10^n} \right) - \left(10 - \frac{1}{10^m} \right) \right) \\ &= \frac{1}{9} \left(\frac{1}{10^m} - \frac{1}{10^n} \right), \end{aligned}$$

luego juntando ambas igualdades obtenemos que

$$\sum_{k=0}^n \frac{y_k}{10^k} = q - \frac{1}{10^n}.$$

Por el Lema 7.3 concluimos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n}{10^n} = q,$$

luego que efectivamente y representa a q . ■

Este lema motiva nuestra última definición sobre los números decimales:

Definición 8.6. Decimos que dos números decimales x e y son **equivalentes** si uno de ellos es exacto, el otro es máximo e y cumple (4) o (5) según sea x exacto o máximo, respectivamente.

Ahora que ya tenemos claros todos los conceptos que necesitamos podemos enunciar, con total precisión, ese resultado que todos sabemos del instituto:

Teorema 8.7. Un número decimal $x \in \mathbb{D}$ representa a un número racional si, y solo si, es un decimal periódico, es decir, si $x \in \mathbb{D}_{\text{per}}$.

Además, todo número racional q está representado por algún decimal periódico y se cumple que:

- Si $q = \frac{a}{10^n}$ para algún número entero a y cierto $n \geq 0$, entonces q está representado por exactamente dos decimales periódicos x e y , los cuales son equivalentes.
- Si q no es de la forma anterior, entonces está representado por un único decimal periódico x , el cual no es ni exacto ni máximo.

Como podemos comprobar, este teorema se corresponde con lo que nos enseñaron y responde a nuestras tres preguntas:

1. Únicamente los números decimales periódicos representan números racionales. Esto quiere decir que si $x \in \mathbb{D}_{\text{per}}$, entonces representa un número racional, mientras que si $x \notin \mathbb{D}_{\text{per}}$, entonces no representa a ningún número racional, es decir, no existe ningún racional q que cumpla que $q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{10^n}$.
2. Todo número racional está representado por algún número decimal, concretamente por algún decimal periódico.
3. La representación puede no ser única, pero sí sabemos que dado un número racional q como mucho existen dos números decimales periódicos x e y que representan a q y, en dicho caso, sabemos que son equivalentes.

Ahora ya tenemos todas las respuestas que buscábamos, pero nos surgen nuevas preguntas:

¿Cómo podemos asegurar que este teorema es verdad? Y, en la práctica, ¿cómo podemos calcular el racional al que representa un decimal periódico? ¿Y el o los decimales periódicos que representan a un cierto número racional dado?

Por suerte, todas estas respuestas las podemos obtener sin más que demostrar el susodicho teorema.

9 DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 8.7

Esta es la sección más técnica de la entrada y nada de su contenido es realmente necesario para el resto del curso. Por tanto, podéis saltároslo en una primera lectura, y volver a ella en cualquier momento en el que deseéis desvelar los trucos que se esconden detrás de todos esos pasos mágicos que nos enseñaron en el instituto para convertir racionales a decimales y viceversa.

Dicho esto, comencemos viendo que si $x \in \mathbb{D}_{\text{per}}$, entonces **representa a un número racional**, es decir, que la sucesión

$$s_n = \sum_{k=0}^n \frac{x_k}{10^k}$$

converge en $\mathbb{Q}$.

Puesto que la idea de la prueba puede obtenerse a partir de un ejemplo concreto, veremos aquí la demostración aplicada al caso en el que $x = 34.2144258258258 \dots$, mientras que la demostración formal puede consultarse [aquí](#).

Observemos que x cumple la definición de decimal periódico con $m = 5$ y $p = 3$, lo que quiere decir que

$$x_{5+k} = x_{5+(k \bmod 3)}.$$

En particular, tenemos que

$$\begin{aligned} x_{5+3u} &= x_5 = 2, \\ x_{5+3u+1} &= x_6 = 5, \\ x_{5+3u+2} &= x_7 = 8. \end{aligned}$$

Así, dado un número natural n lo suficiente grande, digamos $n = 10002$, podemos expresarlo como $n = 5 + 3u + r$ con $0 \leq r < 2$ (es decir, aplicamos el algoritmo de la división a $n - 5$), en nuestro caso $10002 = 5 + 3 \cdot 3332 + 1$, y se tiene que

$$s_{10002} = 34 + \frac{2}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{4}{10^4} + \frac{2}{10^5} + \frac{5}{10^6} + \frac{8}{10^7} + \cdots + \frac{2}{10^{10001}} + \frac{5}{10^{10002}}.$$

Multiplicando por 10^7 tenemos entonces que

$$10^7 s_{10002} = 342144258 + \frac{2}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{8}{10^3} + \cdots + \frac{2}{10^{9994}} + \frac{5}{10^{9995}},$$

mientras que multiplicando por 10^4 obtenemos que

$$10^4 s_{10002} = 342144 + \frac{2}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{8}{10^3} + \cdots + \frac{2}{10^{9997}} + \frac{5}{10^{9998}},$$

y restando ambas expresiones obtenemos que

$$(10^7 - 10^4) s_{10002} = 342144258 - 342144 - \frac{8}{10^{9996}} - \frac{2}{10^{9997}} - \frac{5}{10^{9998}}.$$

Podéis probar a hacer lo mismo para distintos naturales n , pero siempre se obtiene que

$$(10^7 - 10^4) s_n = 342144258 - 342144 - \frac{x_{n-2}}{10^{n-6}} - \frac{x_{n-1}}{10^{n-5}} - \frac{x_n}{10^{n-4}},$$

luego que

$$s_n = \frac{342144258 - 342144}{9990000} - \frac{1}{9990000} \left(\frac{x_{n-2}}{10^{n-6}} + \frac{x_{n-1}}{10^{n-5}} + \frac{x_n}{10^{n-4}} \right).$$

Al tomar límites en la expresión anterior, como cada x_k está entre 0 y 9 (en nuestro caso, realmente solo pueden valer 2, 5 u 8), es obvio que los tres últimos sumandos tienden a cero, con lo que finalmente obtenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_k}{10^k} = \frac{342144258 - 342144}{9990000}.$$

¿Os suena el número racional al que representa x ? Efectivamente, no es ni más ni menos que el que obtendríamos si aplicáramos ciegamente la *formulita* que nos dieron en el instituto para «convertir» un número decimal periódico a un número racional. Resulta que no era magia al fin y al cabo, sino unos simples cálculos aritméticos. De hecho, al hacer la demostración para un $x \in \mathbb{D}_{\text{per}}$ general obtenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_k}{10^k} = \frac{\sum_{k=0}^{m+p-1} x_k 10^{m+p-k-1} - \sum_{k=0}^{m-1} x_k 10^{m-k-1}}{10^{m-1} (10^p - 1)} \quad (6)$$

la cual, si os fijáis bien, es justamente esa fórmula mágica que nos dieron en el instituto.⁴

Veamos ahora que si q es un número racional, entonces está **representado por algún número decimal periódico**.

Consideremos, por ejemplo, el número racional $q = \frac{21257}{990}$. Recordemos que lo que buscamos es expresar q de la forma

$$\frac{21257}{990} = q_0 + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{100} + \frac{q_3}{1000} + \cdots \quad (7)$$

⁴ Realmente, solo es la misma fórmula que nos dieron en el instituto para el caso en el que $x_0 \geq 0$, pero si $x_0 < 0$ podemos «apañarnos» fácilmente. Basta definir $y = 0.x_1 x_2 x_3 \cdots$ y $t_n = \sum_{k=0}^n \frac{y_k}{10^k}$, y observar que

$$s_n = x_0 + t_n$$

para cada $n \geq 1$. Como sabemos que para y la expresión dada en (6) sí coincide con la famosa fórmula que nos dieron en el instituto y $\lim s_n = x_0 + \lim t_n$, para obtener el racional al que representa x basta con obtener el racional al que representa y , para el cual sí podemos usar la famosa fórmula, y sumarle x_0 .

donde $q_0 \in \mathbb{Z}$ y q_1, q_2 , etc. son enteros entre 0 y 9. Parece entonces una buena idea empezar dividiendo el numerador entre el denominador de q , pues así obtenemos que

$$21257 = 21 \cdot 990 + 467,$$

o dividiendo a ambos lados entre 990 que

$$\frac{21257}{990} = 21 + \frac{467}{990},$$

y podemos decir que $q_0 = 21$. Como poner nombre a las cosas siempre ayuda, también podemos denotar el resto de la división anterior por r_0 , es decir, $r_0 = 467$. Si ahora reordenamos los sumandos en la expresión anterior, utilizando (7) tenemos que

$$\frac{r_0}{990} = \frac{467}{990} = \frac{21257}{990} - 21 = q - q_0 = \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{100} + \frac{q_3}{1000} + \cdots,$$

y si multiplicamos a ambos lados por 10 obtenemos que

$$\frac{10 \cdot r_0}{990} = \frac{4670}{990} = q_1 + \frac{q_2}{10} + \frac{q_3}{100} + \cdots \quad (8)$$

¿No os suena esto de algo? ¡Estamos otra vez en la misma situación que al principio! Así que, igual que hicimos antes, podemos dividir 4670 entre 990 y tenemos que

$$\frac{4670}{990} = 4 + \frac{710}{990}.$$

Hemos obtenido entonces que $q_1 = 4$ y $r_1 = 710$, y por (8) concluimos que

$$\frac{r_1}{990} = \frac{710}{990} = \frac{4670}{990} - 4 = \frac{4670}{990} - q_1 = \frac{q_2}{10} + \frac{q_3}{100} + \cdots,$$

con lo que multiplicando de nuevo por 10 se obtiene que

$$\frac{10 \cdot r_1}{990} = \frac{7100}{990} = q_2 + \frac{q_3}{10} + \cdots \quad (9)$$

Ya nos sabemos la película. Dividimos 7100 entre 990 y obtenemos que

$$\frac{7100}{990} = 7 + \frac{170}{990},$$

con lo que $q_2 = 7$, $r_2 = 170$ y por (9) tenemos que

$$\frac{r_2}{990} = \frac{170}{990} = \frac{7100}{990} - 7 = \frac{7100}{990} - q_2 = \frac{q_3}{10} + \frac{q_4}{100} + \cdots,$$

o multiplicando por 10,

$$\frac{10 \cdot r_2}{990} = \frac{1700}{990} = q_3 + \frac{q_4}{10} + \cdots \quad (10)$$

Podemos continuar haciendo exactamente lo mismo. Dividimos 1700 entre 990 para obtener que

$$\frac{1700}{990} = 1 + \frac{710}{990},$$

con lo que $q_3 = 1$, $r_3 = 710$ y por (10) se tiene que

$$\frac{r_3}{990} = \frac{710}{990} = \frac{1700}{990} - 1 = \frac{1700}{990} - q_3 = \frac{q_4}{10} + \frac{q_5}{100} + \cdots,$$

o multiplicando por 10

$$\frac{10 \cdot r_3}{990} = \frac{7100}{990} = q_4 + \frac{q_5}{10} + \cdots \quad (11)$$

Pero, un momento... ¡La expresión que nos ha quedado es exactamente la misma que en (9)! Ya no necesitamos volver a dividir, sabemos que $q_4 = q_2 = 7$, después volveremos a obtener una expresión como la de (10) que nos dice que $q_5 = q_3 = 1$ y, de nuevo, volveremos a una expresión como la de (9). ¡Hemos encontrado el patrón! Después de tanta división tenemos que

$$\frac{21257}{990} = 21.47171 \dots$$

Parece que hemos tenido mucha suerte, pues después de hacer algunas divisiones hemos encontrado que el patrón se repetía y, a partir de ahí, ya no hemos necesitado hacer más divisiones. ¿Pero ha sido suerte o siempre ocurrirá esto? ¿Podemos asegurar que llegado un punto siempre comenzarán a repetirse estas divisiones? Para verlo vamos a prestar un poco más de atención a lo que hemos hecho en el ejemplo anterior.

Si tenemos un número racional $q = \frac{a}{b}$, en nuestro ejemplo $a = 21257$ y $b = 990$, y queremos obtener su representación decimal, lo primero que hemos hecho ha sido dividir a entre b , con lo que obtenemos

$$a = q_0 \cdot b + r_0,$$

que en nuestro caso eran $q_0 = 21$ y $r_0 = 467$. Después, fijaos que para obtener q_1 lo que hemos hecho ha sido dividir 4670 entre 990, es decir, dividir $10r_0$ entre b , obteniendo

$$10r_0 = q_1 \cdot b + r_1,$$

en nuestro ejemplo $q_1 = 4$ y $r_1 = 710$. ¿Y qué hemos hecho después para obtener q_2 ? Pues exactamente lo mismo, dividir 7100 entre 990, es decir, $10r_1$ entre b . En general, vemos que si ya hemos obtenido los primeros n decimales de q , digamos $q_0, q_1, \dots, q_n$ y los restos asociados $r_0, r_1, \dots, r_n$, la forma de obtener el $n + 1$ -ésimo decimal es dividir $10r_n$ entre b para obtener

$$10r_n = q_{n+1} \cdot b + r_{n+1}. \quad (12)$$

Esto nos proporciona un algoritmo para obtener los decimales de q :

1. Calculamos q_0 y r_0 sin más que dividir a entre b .
2. Calculamos q_1 y r_1 a partir de la fórmula (12) con $n = 0$.
3. Calculamos q_2 y r_2 a partir de la fórmula (12) con $n = 1$.
4. Calculamos q_3 y r_3 a partir de la fórmula (12) con $n = 2$.
5. ...

Pero, ¿qué pasa si el algoritmo nunca se detiene? En nuestro ejemplo hemos detectado que, a partir de cierto punto, las divisiones que teníamos que hacer eran siempre las mismas y esto nos ha permitido detenernos, pero no ha sido cosa de suerte, esto siempre ocurrirá. Fijaos que siempre dividimos por el denominador de q , en nuestro ejemplo entre 990, con lo que los restos que nos van quedando estarán siempre entre 0 y 989. ¿Qué pasa entonces si hacemos 991 divisiones? Pues que los restos tienen que repetirse en algún momento, ya que en el peor de los casos al hacer las primeras 990 divisiones obtendremos cada uno de los posibles restos (todos los números enteros entre 0 y 989), pero al hacer la división número 991, por fuerza, el resto que nos quede tiene que ser alguno de los que ya hemos obtenido anteriormente. Lo que esto nos está diciendo es que al aplicar el algoritmo anterior para obtener los decimales de q , en algún momento obtendremos un resto r_n que será igual a algún r_m anterior (en nuestro ejemplo $m = 1$ y $n = 3$), y aquí está la magia. Para obtener q_{n+1} y r_{n+1} lo que haremos será dividir $10r_n$ entre b , pero como $r_n = r_m$, realmente estamos haciendo una división que ya habíamos hecho anteriormente, la de dividir $10r_m$ entre b . Al hacer esta última división obtuvimos q_{m+1} y r_{m+1} , con lo que al hacer la nueva división de $10r_n$ entre b obtendremos el mismo cociente y resto, es decir, obtendremos que $q_{n+1} = q_{m+1}$ y que $r_{n+1} = r_{m+1}$. A partir de aquí ocurrirá otra vez lo mismo. Como $r_{n+1} = r_{m+1}$ al hacer la división

de $10r_{n+1}$ con b , realmente estaremos haciendo la división de $10r_{m+1}$ con b y esto nos dice que $q_{n+2} = q_{m+2}$ y que $r_{n+2} = r_{m+2}$. Vamos, que a partir de q_{n+1} los decimales de q se repetirán de forma periódica y, por lo tanto, no necesitamos seguir haciendo divisiones. ¡Nuestro algoritmo sí que termina!

Con todo lo que hemos visto tenéis casi todos los ingredientes para construir la demostración formal y os animo a que lo intentéis, pero si os atascáis (u os da pereza pensar más) podéis consultarla [aquí](#). Además, os dejo como un ejercicio interesante para los que os guste la programación el hacer un pequeño programa que calcule los decimales de cualquier número racional ;)

Ya hemos demostrado que todo decimal periódico representa a un número racional y que todo racional está representado por algún decimal periódico, ¿pero como podemos asegurar que **ningún decimal no periódico puede representar a un número racional**? La respuesta nos la da el siguiente lema cuya demostración puede consultarse [aquí](#).

Lema 9.1. *Si un número racional está representado por dos decimales distintos x e y , entonces son equivalentes.*

¿Veis por qué este lema responde a la pregunta anterior? Os doy un momento para que lo penséis... ¿Ya? Listos o no, vamos a responderla.

Sea q un número racional y supongamos, por reducción al absurdo, que x es un número decimal no periódico que lo representa. Ya hemos visto que q está también representado por cierto número decimal periódico y , luego q está representado por dos números decimales distintos. El lema anterior nos dice entonces que x e y son equivalentes, por lo que uno de ellos es exacto y el otro máximo, luego en cualquier caso ambos son periódicos y esto contradice nuestra suposición de que x no lo era.

Estamos ya muy cerca del final de la demostración, solo nos queda demostrar los dos últimos puntos sobre el **número de representaciones decimales de un número racional en función de su forma**. Comencemos por el primer punto.

Si $q = \frac{a}{10^n}$ para ciertos enteros $a, n \in \mathbb{Z}$ con $n \geq 0$, basta con ver que q está representado por un decimal exacto para demostrar lo deseado.

En efecto, si q está representado por un decimal exacto x , el Lema 8.5 nos dice que también lo está por un decimal máximo y , y que además x e y son equivalentes. Más aún, si q estuviera representado por algún otro número decimal z distinto de x , entonces el Lema 9.1 nos diría que x y z son equivalentes, pero por la definición de equivalencia esto implica que $z = y$. Por tanto, q está representado por exactamente dos números decimales x e y los cuales son equivalentes.

Veamos pues que, en efecto, q está representado por un decimal exacto.

Para ello aplicamos el algoritmo de la división a los enteros a y 10^n , obteniendo que

$$a = q_0 \cdot 10^n + r_0$$

para ciertos enteros q_0 y r_0 , con $0 \leq r_0 < 10^n$. Distingamos dos casos:

- Si $r_0 = 0$, entonces $q = q_0 \in \mathbb{Z}$ y es claro que q está representado por el decimal exacto $x = q_0.000 \dots$.
- Si $r_0 > 0$, entonces podemos expresarlo como

$$r_0 = \sum_{k=0}^m y_k 10^k$$

para ciertos enteros y_k con $0 \leq y_k \leq 9$ y de modo que $y_m \neq 0$, es decir, la descomposición decimal de r_0 . Además, observemos que como $r_0 < 10^n$ e $y_m \neq 0$, se cumple que $m < n$. Con todo, tenemos que

$$q = q_0 + \frac{r_0}{10^n} = q_0 + \sum_{k=0}^m \frac{y_k}{10^{n-k}} = q_0 + \sum_{j=n-m}^n \frac{y_{n-j}}{10^j},$$

y con ello que q está representado por el decimal exacto x definido como

$$x_k := \begin{cases} q_0 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } 0 < k \leq n - m - 1 \\ y_{n-k} & \text{si } n - m \leq k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

Finalmente, si q es un número racional que no es de la forma $\frac{a}{10^n}$, entonces no puede estar representado por ningún decimal exacto ni máximo.

En efecto, si q está representado por un decimal exacto x , denotando $m := n_0(x)$ se tiene que

$$q = \sum_{n=0}^m \frac{x_n}{10^n} = \frac{\sum_{n=0}^m x_n 10^{m-n}}{10^m},$$

luego que es de la forma $\frac{a}{10^m}$ para algún entero a . El Lema 8.5 nos asegura también que q no está representado por ningún decimal máximo (¿por qué?).

Con todo lo visto, podemos asegurar entonces que q está representado por un número decimal periódico x que no es ni exacto ni máximo, y únicamente nos resta ver que dicho decimal es el único que lo representa. Nuevamente, esto es inmediato gracias al Lema 9.1, pues si existiera otro decimal y distinto de x que representa a q , entonces dicho lema nos dice que x e y son equivalentes, luego en particular que x es exacto o máximo, y hemos visto que esto no es posible.

Ahora sí, por fin, hemos terminado la demostración del Teorema 8.7.

10 LOS NÚMEROS REALES (OTRA VEZ)

Ahora que ya tenemos un conocimiento profundo sobre los números decimales y su relación con los números racionales, estamos listos para definir los números reales.

Ya sabemos que todo número racional está representado por un número decimal periódico, y que si un número decimal no es periódico, entonces no representa a ningún número racional. Es decir, tenemos un conjunto de números, los números decimales, que podemos dividir en dos subconjuntos disjuntos, los periódicos y los no periódicos, y de modo que los periódicos se corresponden con los números racionales. ¿No os suena esto de algo? ¿No os están viniendo esos malditos recuerdos que os gritan que los números reales son los racionales junto a los irracionales? Pues bien, ahora podemos darle un sentido a esto sin caer en las paradojas que mencionamos en la primera entrada, pero antes debemos prestar atención a un pequeño detalle.

Hemos visto que los números racionales están representados dentro de los números decimales a través de los decimales periódicos, pero a nosotros nos gustaría que la correspondencia fuera biunívoca, es decir, que cada número racional tuviera asociado un único número decimal periódico y viceversa. Por desgracia, ya hemos visto que esto no es así, que algunos números racionales están representados por dos números decimales distintos, pero por suerte, también hemos visto que cuando esto ocurre, estos dos decimales son equivalentes, con lo que en particular uno es exacto y otro máximo. Esto nos dice que si nos olvidamos de los números decimales máximos, entonces sí que que obtenemos unicidad en la representación.

De forma más precisa, el Teorema 8.7 nos permite asegurar que si denotamos por $\mathbb{Q}$ el conjunto de los números decimales periódicos no máximos, entonces la función $j : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ que a cada número racional q le hace corresponder el único número decimal periódico no máximo $j(q)$ que lo representa es una biyección.

Teniendo en cuenta todo lo dicho, creo que a nadie le sorprenderá ya la siguiente definición:⁵

Definición 10.1. Definimos el conjunto de los números reales, que denotaremos por $\mathbb{R}$, como el conjunto de los números decimales no máximos.⁶

Así pues, si denotamos por $\mathcal{F}$ el conjunto de los números decimales no periódicos, sabemos que ninguno de ellos representará a un número racional, con lo que podemos interpretarlos como los números irracionales. Además tenemos que

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathcal{F},$$

lo que por fin da sentido a la infame definición de la secundaria. Sin embargo, recordad que nuestro objetivo es construir un cuerpo ordenado completo y, de momento, únicamente tenemos un conjunto $\mathbb{R}$ y un subconjunto suyo $\mathbb{Q}$ que podemos identificar con los números racionales, pero no tenemos ningún tipo de orden, ni nada que se parezca a una suma y un producto.

No sufráis queridos lectores, en las próximas entradas nos encargaremos de definir un orden, una suma y un producto en $\mathbb{R}$ que lo convertirán en nuestro maravilloso cuerpo ordenado completo, ¡así que no os las perdáis!

⁵ Podríamos haber eliminado también los decimales exactos y la teoría de las siguientes entradas se desarrollaría de forma análoga, pero creo que todos estaremos de acuerdo en que es más cómodo trabajar con decimales exactos que con decimales máximos.

⁶ Si alguno de vosotros tiene más conocimientos, se habrá dado cuenta que nuestra definición de equivalencia entre números decimales define una relación de equivalencia en $\mathbb{D}$, por lo que podríamos haber definido los números reales como el conjunto cociente de $\mathbb{D}$ por dicha relación. Esta definición nos llevaría exactamente al mismo tipo de construcción, pero yo os pregunto, ¿para qué complicar las cosas cuando la mayoría de clases de equivalencia solo tendrán un elemento y el resto tendrán únicamente dos?