¿QUÉ SON LOS NÚMEROS REALES?

Parte II

ESTEBAN MARTÍNEZ VAÑÓ

15 de octubre de 2026 a las 11:54

ÍNDICE

4. Solucionando los problemas analíticos 2
   4.1. Grupos ordenados 2
   4.2. Distancia y valor absoluto 3
   4.3. Conjuntos acotados inferiormente 4
   4.4. Límites en grupos ordenados 6
   4.5. Completitud geométrica y analítica 11
5. Buenas y malas noticias algebraicas 18

PREFACIO

Continuamos con nuestra travesía sobre los números reales. En la entrada anterior vislumbramos la cima de la montaña e incluso trazamos un posible plan para alcanzarla, pero el viaje solo acaba de comenzar.

En esta segunda entrada del curso veremos que, tal y como prometimos, añadir la completitud a un cuerpo ordenado también soluciona los problemas algebraicos y analíticos. Para ver esto necesitaremos estudiar el concepto de límite de una sucesión, el cual también será extremadamente útil en nuestra construcción de los números reales, ¡así que prestad atención!

Por si sois nuevos por aquí, esta es la segunda entrada de un pequeño curso a través del cual descubriremos juntos qué son los números reales. El público objetivo para este curso son estudiantes de bachillerato especialmente interesados en las matemáticas o estudiantes de primer curso en grados como matemáticas, física, estadística o ingeniería. Esto lo digo porque asumiremos un conocimiento mínimo de matemáticas, pero realmente cualquiera con interés puede seguirlo y utilizar los comentarios de las entradas o el correo de contacto de la web para preguntarme cualquier duda. Es decir, si de verdad os interesa el tema, os animo a seguir el curso aunque no encajéis en el perfil anterior y a preguntar todo lo que queráis sin miedo alguno.

Dicho todo esto, ¡qué comiencen las matemáticas!

4 SOLUCIONANDO LOS PROBLEMAS ANALÍTICOS

Recordemos que uno de los problemas de los números racionales es que podemos construir sucesiones de estos números de modo que la distancia entre sus términos es cada vez menor, con lo cual parecen aproximarse a cierto «número», pero resulta que dicho «número» no puede ser racional. Vimos además que geométricamente esto deja la recta llena de huecos que los números racionales no pueden rellenar, y que una forma de «rellenarlos» es considerar un cuerpo ordenado Dedekind-completo. Ahora bien, ¿no podría ocurrir que en un cuerpo con estas características también aparecieran sucesiones como las descritas, es decir, tales que sus términos estén cada vez más próximos entre sí, pero que no se aproximen a ningún elemento del cuerpo?

Nuestra intuición geométrica nos dice que esto no puede ocurrir, pero para verlo con detalle tendremos que precisar mejor los conceptos involucrados, lo cual nos llevará algo de tiempo e introducir muchas definiciones y resultados nuevos.

4.1 Grupos ordenados

Por razones que quedarán claras en las siguientes entradas, a lo largo de esta entrada trabajaremos con un tipo de estructura algebraica más general que los cuerpos ordenados. No os asustéis, no necesitáis aprender nada nuevo, más bien lo contrario, necesitáis olvidar que en los cuerpos tenemos dos operaciones y quedarnos únicamente con una de ellas.

Definición 4.1. Diremos que un conjunto G junto a una operación $\oplus$ y una relación de orden estricto total $<$ es un **grupo ordenado** si cumple:

(i) La operación $\oplus$ es **asociativa**, es decir, dados $x, y, z \in X$ se cumple que

$$x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z.$$

(ii) La operación $\oplus$ es **conmutativa**, es decir, dados $x, y \in X$ se cumple que

$$x \oplus y = y \oplus x.$$

(iii) La operación $\oplus$ tiene **elemento neutro**, es decir, existe cierto elemento $\diamond \in X$ que cumple que

$$x \oplus \diamond = x$$

para cualquier $x \in X$.

(iv) Todo elemento x de X tiene un **elemento opuesto**, es decir, existe otro elemento $y \in X$ tal que

$$x \oplus y = \diamond.$$

(v) El orden es compatible con la operación, es decir, para cualesquiera $x, y, z \in X$ satisfaciendo que $x < y$, se cumple que

$$x \oplus z < y \oplus z.$$

Todo lo que dijimos sobre la notación para cuerpos ordenados sigue siendo igualmente válido para los grupos ordenados, por lo que en general expresaremos su operación con el símbolo $+$ y su elemento neutro por 0, salvo que haya riesgo de confusión. Además, observad que todo cuerpo ordenado es también un grupo ordenado simplemente olvidándonos de su producto, por lo que todo lo que demostremos para grupos ordenados será también cierto para cuerpos ordenados (de ahí que digamos que son una estructura más general).

Como ya hicimos con los cuerpos, supondremos siempre que nuestros grupos ordenados no son triviales, es decir, que G no reduce al conjunto cuyo único elemento es el

0. En particular, esto implica que en G siempre hay al menos un elemento $x \in G$ que cumple que $x > 0$ (¿por qué?).

4.2 Distancia y valor absoluto

Al hablar de la distancia entre dos números racionales nos referimos a la diferencia entre el mayor y el menor de ellos, pero observad que esta definición de distancia no involucra ninguna propiedad especial de los números racionales, por lo que podríamos definirla para cualquier grupo ordenado. Ahora bien, existe una forma mucho más cómoda de expresar esta definición, pues observad que dados dos números racionales p y q se cumple que «la diferencia entre el mayor y el menor de ellos» es exactamente igual al «valor absoluto de su diferencia».

Todo lo dicho motiva la siguiente definición.

Definición 4.2. Sea G un grupo ordenado y $x \in G$. Definimos el **valor absoluto** de x, denotado por $|x|$ o $|x|_G$ si existe riesgo de confusión, como

$$|x| := \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Dados dos elementos $x, y \in G$, definimos la **distancia** entre x e y, denotada por $d(x,y)$ o $d_G(x,y)$ si existe riesgo de confusión, como $d(x,y) := |x-y|$.

Como podéis observar, simplemente hemos generalizado las nociones conocidas para los números racionales a cualquier grupo ordenado. Además, esta generalización del concepto de distancia cumple ciertas propiedades tan útiles que los matemáticos decidieron llamar «distancia» a cualquier función que las cumpla. Aunque esto es un tema para otro viaje, presentaremos dichas propiedades, pues también nos serán de mucha utilidad.

Lema 4.3. *Sea G un grupo ordenado y $x, y, z \in G$. Se cumplen*:

(i) $d(x,x) = 0$.

(ii) *Si* $d(x,y) = 0$, *entonces* $x = y$.

(iii) $d(x,y) = d(y,x)$.

(iv) $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$.

Observad que todo tiene sentido. El primer punto nos dice que la distancia entre un punto y él mismo es cero, mientras que el segundo nos dice que si la distancia entre dos puntos es nula, entonces es que realmente son el mismo punto. La tercera propiedad nos dice que la distancia entre x e y es la misma que la distancia entre y y x, como debería ser, mientras que el último punto nos dice que si queremos medir la distancia entre x y z, no «ganaremos terreno» visitando primero un punto intermedio y. A esta última propiedad se la conoce como **desigualdad triangular**.

Como hemos definido la distancia en términos del valor absoluto, para demostrar el lema anterior necesitaremos también algunas propiedades importantes del valor absoluto que no son más que generalizaciones de las propiedades que todos conocemos.

Lema 4.4. *Sea G un grupo ordenado y $x, y \in G$. Se cumplen*:

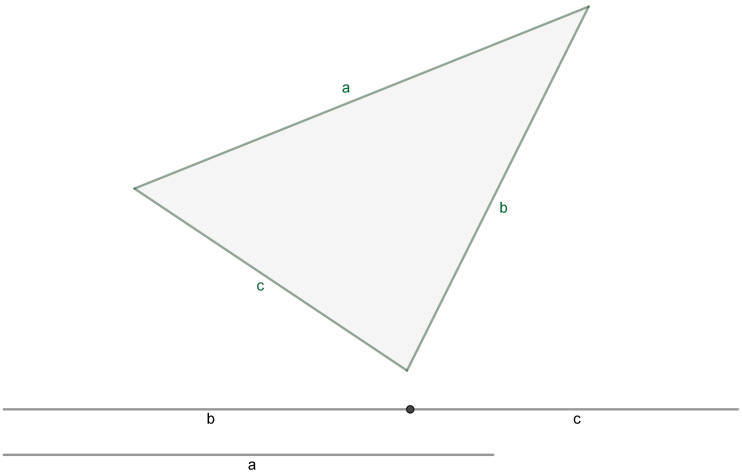
(i) $|x| = 0$ *si, y solo si,* $x = 0$.

(ii) $|-x| = |x|$.

(iii) $0 \leqslant \max\{x, -x\} = |x|$.

(iv) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$.

(v) $||x| - |y|| \leqslant |x-y|$.



El nombre de «desigualdad triangular» proviene de que en un triángulo la suma de las distancias de dos de sus lados es siempre mayor o igual que el otro lado.

(vi) $|x| < y$ *si, y solo si,* $-y < x < y$.

Además, si G *es un cuerpo ordenado, entonces también se cumplen*:

(vii) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

(viii) *Si* $y \neq 0$, *entonces* $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

La demostración de ambos resultados es bastante sencilla y podéis consultarla aquí, pero os recomiendo que intentéis demostrarlos por vosotros mismos para practicar.

4.3 Conjuntos acotados inferiormente

Cuando introdujimos la definición de cota superior o de supremo, estoy seguro de que más de uno de vosotros se preguntó por la existencia de una definición análoga, pero para elementos que son siempre menores a todos los de un conjunto dado.

Definición 4.5. Sea X un conjunto ordenado y $A \subset X$ un subconjunto de X. Diremos que $x \in X$ es una **cota inferior** de A si $x \leqslant a$ para cada elemento $a \in A$. Si existe alguna cota inferior para A diremos que A está **acotado inferiormente**, y en dicho caso diremos que un punto $x \in X$ es el **ínfimo** de A si es la mayor de las cotas inferiores de A, es decir, si x es una cota inferior de A y dada cualquier otra cota inferior y de A se cumple que $y \leqslant x$. Si existe, denotaremos el ínfimo de A como $\inf(A)$.

Además, diremos que A está **acotado** si esta acotado superior e inferiormente.

Observad que para grupos ordenados el Lema 4.4 (vi) nos da una forma equivalente de expresar la acotación utilizando el valor absoluto:

Lema 4.6. *Sea* G *un grupo ordenado y* $A \subset G$ *un subconjunto de* G. *Se cumple que* A *está acotado si, y solo si, existe un* $x \in G$ *con* $x > 0$ *tal que*

$$|a| < x$$

para cada $a \in A$.

Demostración. Por un lado, si A está acotado, entonces lo está superior e inferiormente, con lo que existen $y, z \in G$ tales que

$$y \leqslant a \leqslant z$$

para cada $a \in A$. Como G no es trivial, existe cierto $w \in G$ con $w > 0$, luego si definimos

$$x := \max\{|y|, |z|\} + w,$$

el Lema 4.4 (iii) nos garantiza que $x > 0$ y que

$$-x < -|y| \leqslant y \leqslant a \leqslant z \leqslant |z| < x$$

para cada $a \in A$. Utilizando entonces Lema 4.4 (vi) concluimos que

$$|a| < x$$

para cada $a \in A$.

Recíprocamente, si suponemos que existe un $x \in G$ tal que $x > 0$ y

$$|a| < x$$

para cada $a \in A$, entonces el Lema 4.4 (vi) nos da que

$$-x < a < x$$

para cada $a \in A$, con lo que A está acotado superior e inferiormente, luego acotado. ■

Podríamos pensar que si en la Definición 2.5 cambiamos las nociones de supremo y acotación superior, por las de ínfimo y acotación inferior, tendremos otro tipo de completitud geométrica, pero resulta que esta hipotética nueva definición no aporta nada nuevo:

Teorema 4.7. *Sea X un conjunto ordenado. Se cumple que X es Dedekind-completo si, y solo si, todo conjunto no vacío y acotado inferiormente tiene ínfimo.*

Demostración. Supongamos que X es Dedekind-completo y sea $A \subset X$ no vacío y acotado inferiormente. Podemos entonces definir el conjunto

$$B := \{x \in X : x \leqslant a \text{ para cada } a \in A\},$$

el cual es no vacío (al estar A acotado inferiormente) y está acotado superiormente por cualquier elemento de A. Al ser X Dedekind-completo tenemos que existe $b = \sup(B)$ y solo resta por ver que $b = \inf(A)$.

En primer lugar, veamos que b es cota inferior de A. En efecto, dado $a \in A$ se tiene que a es cota superior de B, luego como b es la menor de las cotas superiores de B, obtenemos que $b \leqslant a$.

Por otra parte, si y es cota inferior de A, entonces $y \in B$ y al ser b cota superior de B obtenemos que $y \leqslant b$.

Esto prueba que b es la mayor de las cotas inferiores de A, es decir, que $b = \inf(A)$ tal y como queríamos ver.

La implicación recíproca se demuestra de forma análoga y os la dejo como ejercicio. ■

Para finalizar, veamos un lema que, aunque no lo utilizaremos en esta sección, será muy útil más adelante.

Lema 4.8. *Sea G un grupo ordenado, $A \subset G$ un conjunto no vacío y sea $-A$ el conjunto definido como*

$$-A := \{-a : a \in A\}.$$

Se cumplen:

(i) *Si A está acotado superiormente (resp. inferiormente), entonces $-A$ está acotado inferiormente (resp. superiormente). Además, si existe el supremo (resp. ínfimo) de A, también existe el ínfimo (resp. supremo) de $-A$ y se cumple que*

$$\inf(-A) = -\sup(A) \text{ (resp. } \sup(-A) = -\inf(A)).$$

(ii) *Si $-A$ está acotado superiormente (resp. inferiormente), entonces A está acotado inferiormente (resp. superiormente). Además, si existe el supremo (resp. ínfimo) de $-A$, también existe el ínfimo (resp. supremo) de A y se cumple que*

$$\inf(A) = -\sup(-A) \text{ (resp. } \sup(A) = -\inf(-A)).$$

Os dejo la demostración de este sencillo lema como ejercicio con el que asentar bien los conceptos de ínfimo y supremo.

4.4 Límites en grupos ordenados

Ahora que ya tenemos una noción general de distancia en cualquier grupo ordenado (luego también en cualquier cuerpo ordenado), podemos formalizar eso de que «la distancia entre los términos de una sucesión es cada vez menor».

Definición 4.9. Sea G un grupo ordenado y $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de elementos de G. Diremos que $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una **sucesión de Cauchy** si dado cualquier $\varepsilon \in G$ con $\varepsilon > 0$, existe un natural $N \in \mathbb{N}$ de modo que si $n, m \geqslant N$, entonces $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Vemos que esta definición captura de manera formal justo lo que esperábamos: una sucesión será de Cauchy si finalmente todos sus términos están tan cerca entre sí como queramos. Aunque no es trivial, aquí podéis ver que la sucesión que dimos como ejemplo en la entrada anterior es realmente una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$.[1] Así, por ejemplo, podemos asegurar que a partir de algún momento (que puede ser a partir del término 10, el 500 o el 1000^{100}, pero lo importante es que podemos asegurar que dicho momento llegará), la distancia entre los términos de dicha sucesión será menor que $\frac{1}{10^{100}}$, con lo cual, a no ser que hagamos un «*zoom*» inmenso, parecerá que todos los términos de la sucesión son realmente un mismo número. Parecerá que la sucesión se aproxima a cierto número. Sin embargo, ya argumentamos que esta sucesión no se aproxima a ningún número racional, pero la explicación que dimos era heurística, con lo que para asegurar que todo lo que decimos tenga un sentido preciso también necesitamos especificar a qué nos referimos con que una sucesión se «aproxime a un número».

Como antes, la idea es decir que una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ en un grupo ordenado G se aproxima a un punto $x \in G$ si dado cualquier $\varepsilon > 0$, a partir de algún momento la distancia entre los términos de nuestra sucesión y x será menor que dicho ε. Es decir, que dado cualquier «error prefijado» $\varepsilon > 0$ que queramos, nuestra sucesión termina aproximando a x con un error incluso menor que dicho ε. Para evitar las imprecisiones que la palabra «aproximar» pueda tener, en matemáticas solemos decir que, si ocurre lo anterior, la sucesión **converge** a x, o bien que tiene **límite** x. Más formalmente tenemos:

Definición 4.10. Sea G un grupo ordenado, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de elementos de G y $x \in G$. Diremos que $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ **converge** a x o tiene **límite** x, lo que denotaremos por $\lim x_n = x$, si dado cualquier $\varepsilon \in G$ con $\varepsilon > 0$, existe un natural $N \in \mathbb{N}$ de modo que si $n \geqslant N$, entonces $d(x_n, x) < \varepsilon$.

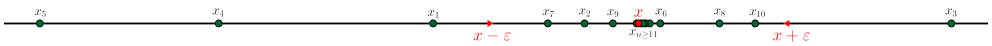
Diremos que la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es **convergente** si existe un $x \in G$ tal que $\lim x_n = x$.

Como ocurría con las sucesiones de Cauchy, es importante observar que el natural N de la definición anterior depende del ε elegido. Fijaos que esto tiene todo el sentido del

[1] En este punto alguien podría argumentar que la definición anterior no captura exactamente lo que dijimos en la entrada anterior. En dicha entrada, parece que lo que buscábamos era que la distancia entre términos consecutivos de una sucesión fuera finalmente tan pequeña como deseemos, pero una sucesión de Cauchy nos pide más, nos pide no solo que los términos consecutivos estén finalmente tan cerca como deseemos, sino que TODOS los términos estén finalmente tan cerca entre sí como deseemos. Resulta que ambos conceptos no son equivalentes y podéis obtener más información sobre esto aquí, aunque os recomiendo terminar la sección antes de leer esta digresión, ya que en ella utilizaremos conceptos que se introducen a continuación.

mundo, porque si queremos aproximar un punto x a través de una sucesión $\{x_n\}$ con un error $\varepsilon > 0$ muy pequeño, es obvio que necesitaremos ir «más lejos» en la sucesión para alcanzar el punto N a partir del cual $d(x_n, x) < \varepsilon$, que si queremos aproximar x con un error más grande.

Por otro lado, gracias al Lema 4.4 (vi), podemos asegurar que $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a x si, y solo si, dado $\varepsilon \in G$ con $\varepsilon > 0$ existe un natural $N \in \mathbb{N}$ de modo que si $n \geqslant N$, entonces $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$.



Observad que aunque x_2 cumple que $x - \varepsilon < x_2 < x + \varepsilon$, realmente el valor mínimo de N que satisface la definición de límite para el $\varepsilon > 0$ dado es $N = 6$.

El siguiente lema es también inmediato (os aconsejo que lo demostréis), pero resulta muy útil en muchas ocasiones.

Lema 4.11. *Sea* G *un grupo ordenado,* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *una sucesión de elementos de* G *y* $x \in G$. *Se cumple que* $\lim x_n = x$ *si, y solo si,* $\lim |x_n - x| = 0$.

Con estas nuevas definiciones, el problema analítico de $\mathbb{Q}$ puede resumirse en que en $\mathbb{Q}$ existen sucesiones de Cauchy que no son convergentes, y esto motiva siguiente definición:

Definición 4.12. Diremos que un grupo ordenado G es **Cauchy-completo** si toda sucesión de Cauchy en G es convergente.

Ante esta definición podríamos preguntarnos si no tendría también sentido considerar otra definición de «completitud» recíproca, es decir, preguntarnos si pueden haber sucesiones convergentes que no sean de Cauchy.

Por suerte para los que tenemos mala memoria no necesitamos una nueva definición, tal y como muestra el siguiente lema:

Lema 4.13. *Sea* G *un grupo ordenado y* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *una sucesión convergente en* G. *Entonces* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *es de Cauchy.*

Demostración. Sea $x \in G$ el límite de $\{x_n\}$ y tomemos $\varepsilon \in G$ con $\varepsilon > 0$. Distingamos dos casos:

- Si existe cierto $\delta \in G$ tal que $0 < \delta < \varepsilon$, entonces tenemos que $\varepsilon - \delta > 0$ y con ello que existen ciertos $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$|x_n - x| < \delta \tag{1}$$

para cada $n \geqslant N_1$ y

$$|x_n - x| < \varepsilon - \delta \tag{2}$$

para cada $n \geqslant N_2$. Definiendo entonces $N := \max\{N_1, N_2\}$ tenemos que si $n, m \geqslant N$, entonces

$$|x_n - x_m| = |(x_n - x) + (x - x_m)| \leqslant |x_n - x| + |x_m - x| \underset{(1)\text{ y }(2)}{<} \delta + (\varepsilon - \delta) = \varepsilon,$$

tal y como queríamos ver.

- Si no existe ningún $\delta \in G$ tal que $0 < \delta < \varepsilon$, entonces existe cierto $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = x$ para cada $n \geqslant N$. En efecto, como $\lim x_n = x$, tenemos que existe cierto $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - x| < \varepsilon.$$

Ahora bien, si fuera $|x_n - x| > 0$ para algún $n \geqslant N$, entonces tendríamos que

$$0 < |x_n - x| < \varepsilon,$$

lo que contradice la suposición inicial de este caso. Esto implica que $|x_n - x| = 0$ para cada $n \geqslant N$ y con ello obtenemos que $x_n = x$ para cada $n \geqslant N$.

Con todo, es claro que si $n, m \geqslant N$, entonces

$$|x_n - x_m| = |x - x| = 0 < \varepsilon,$$

tal y como queríamos ver.

En cualquier caso obtenemos la desigualdad deseada, y esto prueba que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy. ■

Tenemos ahora dos conceptos distintos de completitud para cuerpos (o grupos) ordenados, uno geométrico y otro analítico, con lo que la pregunta obvia es: ¿coinciden ambos conceptos?

En breve responderemos a la pregunta anterior, pero antes veamos algunas propiedades sobre este concepto de límite.

En primer lugar, comencemos con una cuestión técnica que es muy «tonta», pero requiere un mínimo de atención. Observemos que, en muchas ocasiones, nos encontramos con sucesiones en grupos ordenados cuyo subíndice no comienza en cero. Por ejemplo, al considerar la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dada por $x_n = \frac{1}{n}$ no tiene sentido hablar de x_0. Sin embargo, siempre podemos definir que, por ejemplo, $x_0 = 0$, y obtener así que la sucesión comienza en cero y se adecua a nuestras definiciones. El problema ahora es que hemos definido $x_0 = 0$ como podríamos haber definido $x_0 = -42$, ¿qué valor debemos elegir en este tipo de situaciones?

La respuesta es que, de cara al estudio de los límites, no importa qué valores tome la sucesión en sus primeros términos:

Lema 4.14. *Sea* G *un grupo ordenado,* $x \in G$ *y* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}, \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ *sucesiones de elementos de* G *tales que existe un* $N \in \mathbb{N}$ *de modo que si* $n \geqslant N$*, entonces* $x_n = y_n$*. En dicho caso, se cumple que* $\{x_n\}$ *converge si, y solo si,* $\{y_n\}$ *converge, y además lo hacen al mismo límite.*

Además, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) *La sucesión* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *converge a* x*.*

(ii) *Dado cualquier* $N \in \mathbb{N}$*, la sucesión* $\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$ *converge a* x*.*

(iii) *Existe un* $N \in \mathbb{N}$ *tal que la sucesión* $\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$ *converge a* x*.*

La demostración es muy sencilla, pues solo consiste en observar que en la definición de límite solo nos importa que la sucesión esté **finalmente** cerca del límite, no nos importa para nada si sus primeros términos se alejan mucho del límite. Os dejo a vosotros completar los detalles.

Gracias a este lema, podemos asegurar que todos los resultados que veamos sobre límites serán válidos para sucesiones de la forma $\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$, y no solo para aquellas cuyo subíndice comienza en cero. Además, este lema también nos permite hablar del límite de sucesiones cuyos primeros términos podrían no estar bien definidos. En efecto, si una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ puede no estar bien definida para sus primeros términos (pensad en el ejemplo de $x_n = \frac{1}{n}$), pero sabemos que existe un número natural N tal que x_n sí está bien definida para cada $n \geqslant N$, entonces simplemente definimos sus primeros términos como 0 y su límite como el límite de la sucesión $\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$, sabiendo que el lema anterior nos asegura que no importa el valor de N que tomemos, ni que valor le demos a los x_n para $n < N$ (siempre que x_n esté bien definida a partir de dicho valor, claro).

Resuelto este tecnicismo, comencemos viendo que, para tranquilidad de muchos, el límite de una sucesión es único.

Lema 4.15. *Sea* G *un grupo ordenado,* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *una sucesión en* G *y* $x, y \in G$. *Si* x_n *converge a* x *e* y, *entonces* $x = y$. *Es decir, el límite de una sucesión en un grupo ordenado es único.*

Demostración. Supongamos, por reducción al absurdo, que $x \neq y$, luego que $x < y$ o $y < x$ al ser el orden en G total. Demostraremos el caso en que $x < y$, pues el otro es completamente análogo. Ahora, distingamos dos casos:

- Si existe un $z \in G$ tal que $x < z < y$, entonces $z - x > 0$ y como $\lim x_n = x$, sabemos que existe un $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant N_1$, entonces

$$|x_n - x| < z - x. \tag{3}$$

  Por otro lado, también se tiene que $y - z > 0$ y como $\lim x_n = y$, sabemos que existe un $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant N_2$, entonces

$$|x_n - y| < y - z. \tag{4}$$

  Tomando entonces $N = \max\{N_1, N_2\}$, tenemos por (3) que

$$x - (z - x) < x_N < x + (z - x) = z,$$

  luego en particular $x_N < z$. Ahora bien, usando (4) obtenemos que

$$z = y - (y - z) < x_N < y + (y - z),$$

  y en particular $x_N > z$, lo que supone una contradicción.
- Si no existe ningún $z \in G$ tal que $x < z < y$, definamos $\varepsilon := y - x > 0$. Como $\lim x_n = x$, existe un $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - x| < \varepsilon, \tag{5}$$

  y como $\lim x_n = y$, existe un $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - y| < \varepsilon. \tag{6}$$

  Como antes, tomando $N = \max\{N_1, N_2\}$, tenemos por (5) que $x_N < x + \varepsilon = y$, y por (6) obtenemos que $x_N > y - \varepsilon = x$. En definitiva, hemos obtenido un punto $x_N \in G$ tal que $x < x_N < y$ y esto contradice la suposición inicial de este caso.

Como en cualquier caso obtenemos una contradicción, solo podemos concluir que, en efecto, $x = y$ tal y como queríamos demostrar. ■

Otra propiedad importante de los límites es que toda sucesión convergente, o más en general toda sucesión de Cauchy, está **acotada**, es decir, el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado.

Proposición 4.16. *Toda sucesión de Cauchy en un grupo ordenado* G *está acotada. En particular, toda sucesión convergente en* G *está acotada.*

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en G. Por definición, fijado cierto $z \in G$ con $z > 0$ (que existe al no ser G trivial), existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - x_m| < z \tag{7}$$

para cada $n, m \geqslant N$. Si ahora definimos

$$y := \max\{|x_1| + z, |x_2| + z, \ldots, |x_N| + z\} > 0,$$

por el Lema 4.6 basta con ver que

$$|x_n| < y \tag{8}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, para concluir que la sucesión está acotada.

Sin más, si $n \leqslant N$, entonces es claro que

$$|x_n| < |x_n| + z \leqslant y,$$

mientras que si $n > N$, por (7) obtenemos que

$$|x_n| = |(x_n - x_N) + x_N| \leqslant |x_n - x_N| + |x_N| < z + |x_N| \leqslant y.$$

En cualquier caso se cumple (8) y con ello queda demostrada la proposición. ■

Es también muy importante la relación entre los límites y las operaciones en un grupo ordenado:

Teorema 4.17. *Sea* G *un grupo ordenado,* $x, y \in G$ *y* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}, \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ *sucesiones de elementos de* G *convergentes a* x *e* y *respectivamente. Se cumplen*:

(i) $\lim |x_n| = |x|$.

(ii) $\lim(x_n + y_n) = x + y$.

(iii) $\lim(x_n - y_n) = x - y$. *En particular,* $\lim(-x_n) = -x$.

Si además G *es un cuerpo ordenado, entonces también se cumple que*:

(iv) $\lim(x_n \cdot y_n) = x \cdot y$.

(v) *Si* $y \neq 0$, $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}$. *En particular,* $\lim \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y}$.

Observad que este teorema simplemente nos dice que siempre podemos intercambiar el límite con las operaciones, pero el último punto requiere un poco de cuidado. Estamos diciendo que si $y \neq 0$, entonces $\lim \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y}$, ¿pero qué ocurre si algún $y_n = 0$? Ya hemos visto que el Lema 4.14 nos garantiza que si $y_n = 0$ únicamente en una cantidad finita de puntos, entonces podemos definir sin ningún problema el límite de la sucesión $\{1/y_n\}$, ¿pero qué ocurre si existe una cantidad infinita de términos y_n que son nulos?

Esto puede suceder en general, por ejemplo, sucede en la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ definida como $x_n = 1$ si n es impar, y $x_n = 0$ si n es par. Sin embargo, el siguiente resultado nos da una relación muy fuerte entre el límite y el orden que implica que lo anterior no puede ocurrir en las condiciones del Teorema 4.17.

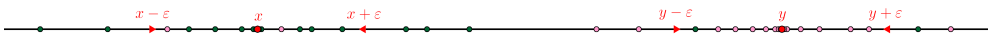
Teorema 4.18. *Sea* G *un grupo ordenado,* $x, y \in G$ *y* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}, \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ *sucesiones de elementos de* G *convergentes a* x *e* y *respectivamente. Se cumplen*:

(i) *Si* $x < y$, *entonces existe un* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_n < y_n$ *para cada* $n \geqslant N$.

(ii) *Si existe un* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_n \leqslant y_n$ *para cada* $n \geqslant N$, *entonces* $x \leqslant y$.

Como decíamos, si $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a cierto y no nulo, entonces $y < 0$ o $y > 0$, y (i) en el teorema anterior (tomando $x = 0$ y $x_n = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$) nos asegura que existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $0 < y_n$ o $y_n > 0$ (según el caso) para cada $n \geqslant N$, luego en particular, $y_n \neq 0$ para cada $n \geqslant N$ que es justo lo que queríamos ver.

La demostración de los dos teoremas anteriores puede consultarse aquí, pero la idea geométrica de este último resultado es bastante simple y se muestra en la siguiente imagen.



Para $\varepsilon > 0$ suficiente pequeño, las sucesiones «se separan».
(En verde la sucesión $\{x_n\}$ y en rosa la sucesión $\{y_n\}$)

Una observación importante sobre el Teorema 4.18 es que aunque podamos asegurar que $x_n < y_n$ para cada número natural n a partir de cierto $N \in \mathbb{N}$, esto no implica que $x < y$. Por ejemplo, las sucesiones de racionales dadas por $x_n = 2 + \frac{1}{n}$ e $y_n = 2 + \frac{2}{n}$

cumplen que $x_n < y_n$ para todo natural n, pero ambas sucesiones convergen a 2 (¿por qué?).

Un último resultado muy útil para el cálculo de límites es el conocido como **criterio del sándwich**:

Proposición 4.19. *Sea* G *un grupo ordenado y* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}, \{y_n\}_{n=0}^{\infty}, \{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ *sucesiones en* G *cumpliendo que existe un* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$ *para cada* $n \geqslant N$. *Entonces, si* $\lim y_n = \lim z_n = x$ *para algún* $x \in G$, *se cumple que* $\lim x_n = x$.

Demostración. Dado $\varepsilon \in G$ con $\varepsilon > 0$, sabemos que existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$x - \varepsilon < y_n < x + \varepsilon \tag{9}$$

para cada $n \geqslant N_1$ y

$$x - \varepsilon < z_n < x + \varepsilon \tag{10}$$

para cada $n \geqslant N_2$. En particular, si definimos $M := \max\{N, N_1, N_2\}$ tenemos que si $n \geqslant M$, entonces

$$x - \varepsilon < y_n \leqslant x_n \leqslant z_n < x + \varepsilon,$$

que es justo lo que queríamos demostrar. ■

En la siguiente subsección veremos que, tal y como anunciamos en la entrada anterior, todo cuerpo Dedekind-completo es Cauchy-completo,[2] pero antes utilizaremos todo lo visto para demostrar, de manera rigurosa, que $\mathbb{Q}$ no es Cauchy-completo, luego por lo que veremos tampoco puede ser Dedekind-completo.

Consideremos la sucesión q_n de números racionales definida en la entrada anterior como $q_0 = 2$ y

$$q_{n+1} = \frac{1}{2} q_n + \frac{1}{q_n}$$

si $n \geqslant 0$. Ya hemos comentado antes que dicha sucesión es de Cauchy, ¿pero puede ser convergente?

Supongamos que lo es, es decir, que existe cierto $q \in Q$ tal que $\lim q_n = q$.

Utilizando entonces el Lema 4.14, tenemos que $\lim q_{n+1} = q$, mientras que por el Teorema 4.17 tenemos que[3]

$$q = \lim q_{n+1} = \lim \left(\frac{1}{2} q_n + \frac{1}{q_n} \right) = \frac{1}{2} \lim q_n + \frac{1}{\lim q_n} = \frac{1}{2} q + \frac{1}{q},$$

es decir, que el límite q de q_n cumple que $q = \frac{1}{2} q + \frac{1}{q}$, o reordenando la ecuación, que $q^2 = 2$. Sin embargo, ya vimos en el Teorema 1.2 que la ecuación $x^2 = 2$ no tiene soluciones en $\mathbb{Q}$, y esto supone una contradicción con la existencia del límite de $\{q_n\}$ en $\mathbb{Q}$.

4.5 Completitud geométrica y analítica

Retomemos ahora la discusión sobre nuestras dos nociones de completitud. Concretamente, veamos que todo grupo Dedekind-completo es Cauchy-completo, para lo cual nos fijaremos en un tipo muy concreto de sucesiones: las sucesiones monótonas.

---

[2] Observad que esto es precisamente a lo que nos referíamos con que un cuerpo Dedekind-completo soluciona los problemas analíticos de $\mathbb{Q}$.

[3] Observad que $q \neq 0$, pues es fácil demostrar por inducción que $1 \leqslant q_n \leqslant 2$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y usando el Teorema 4.18 (ii) se obtiene que $1 \leqslant q \leqslant 2$.

Definición 4.20. Sea G un grupo ordenado y $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión en G. Diremos que la sucesión es **creciente** si $x_n \leqslant x_{n+1}$ para cada natural $n \in \mathbb{N}$. Análogamente, diremos que es **decreciente** si $x_{n+1} \leqslant x_n$ para cada natural $n \in \mathbb{N}$. Finalmente, diremos que la sucesión es **monótona** si es creciente o decreciente.

¿Por qué nos fijamos en estas sucesiones? Pues porque si G es un grupo ordenado Dedekind-completo y $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión monótona y acotada, entonces el siguiente resultado nos asegura que es convergente.

Teorema 4.21. *Sea* G *un grupo ordenado y* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *una sucesión creciente* (*resp. decreciente*) *y acotada superiormente* (*resp. acotada inferiormente*). *Se cumplen*:

(i) *Si existe el supremo* (*resp. ínfimo*) *del conjunto* $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ *en* G, *entonces* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *converge a dicho supremo* (*resp. ínfimo*).

(ii) *Si existe el límite de la sucesión* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, *entonces es igual al supremo* (*resp. ínfimo*) *del conjunto* $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

En particular, si G *es Dedekind-completo toda sucesión creciente y acotada superiormente* (*resp. decreciente y acotada inferiormente*) *es convergente y su límite es igual a su supremo* (*resp. ínfimo*).

Demostración. Demostraremos el caso para sucesiones crecientes, pues el otro es completamente análogo.

Comencemos **demostrando (i)**, para lo cual supongamos que existe el supremo del conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, el cual denotaremos por x.

Dado entonces $\varepsilon \in G$ con $\varepsilon > 0$, por definición de supremo se tiene que $x_n \leqslant x$ para cada $n \in \mathbb{N}$, mientras que $x - \varepsilon$ no puede ser cota superior de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Esto último implica que existe cierto $N \in \mathbb{N}$ tal que $x - \varepsilon < x_N$, y como la sucesión es creciente obtenemos que si $n \geqslant N$, entonces

$$x - \varepsilon < x_N \leqslant x_n \leqslant x < x + \varepsilon.$$

La arbitrariedad de ε demuestra que, en efecto, $\lim x_n = x$.

Probemos ahora (ii), es decir, supongamos que la sucesión converge a cierto $x \in G$ y veamos que es el supremo del conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

En primer lugar, supongamos por reducción al absurdo que x no es cota superior de este conjunto. En dicho caso, existe cierto $N \in \mathbb{N}$ tal que $x < x_N$ y, por ser $\{x_n\}$ creciente, obtenemos que $x_N \leqslant x_n$ para cada $n \geqslant N$. Por el Teorema 4.18 (ii) obtenemos entonces que $x_N \leqslant x$ (consideramos en dicho teorema la sucesión constante $y_n = x_N$), lo que contradice que $x < x_N$. Puesto que hemos obtenido una contradicción, únicamente podemos concluir que x sí es cota superior de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Sea ahora y una cota superior de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces, $x_n \leqslant y$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y utilizando otra vez el Teorema 4.18 (ii) obtenemos que $x \leqslant y$. Esto prueba que x es la menor de las cotas superiores de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, luego que es su supremo, tal y como queríamos demostrar. ■

Esto nos acerca a nuestro objetivo, pues ahora conocemos un tipo de sucesiones que siempre son convergentes en un grupo ordenado Dedekind-completo. Además, sabemos que toda sucesión de Cauchy está acotada, pero, por desgracia, no es cierto que toda sucesión de Cauchy sea monótona. Todavía tenemos que trabajar un poco más e introducir un nuevo concepto: las **subsucesiones**.

La idea es muy sencilla, dada una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, una subsucesión no es más que otra sucesión obtenida a partir de esta eligiendo ciertos elementos en orden creciente respecto al subíndice. Por ejemplo, si en $\mathbb{Q}$ tenemos la sucesión $x_n = \frac{1}{n}$, una subsucesión suya puede ser $y_n = \frac{1}{2n}$, y otra puede ser $z_n = \frac{1}{3n+2}$, pero no será una subsucesión de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida como $w_{2n} = \frac{1}{4n} = x_{4n}$ y $w_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} =$

x_{2n+1}, puesto que NO estamos eligiendo los términos de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en un orden creciente respecto al subíndice.

Formalmente, tenemos la siguiente definición que, aunque resulte algo técnica, podéis comprobar que simplemente formaliza la idea anterior.

Definición 4.22. Sea X un conjunto y $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}, \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ un par de sucesiones en X. Diremos que $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una **subsucesión** de $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ si existe una función estrictamente creciente $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que

$$y_n = x_{\phi(n)}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

En los ejemplos anteriores tenemos que $y_n = x_{\phi(n)}$ con $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $\phi(n) = 2n$ y $z_n = x_{\psi(n)}$ con $\psi(n) = 3n + 2$, siendo tanto ϕ como ψ estrictamente crecientes. Sin embargo, $w_n = x_{\chi(n)}$ con $\chi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$\chi(n) = \begin{cases} 2n & \text{si} \quad n \text{ es par} \\ n & \text{si} \quad n \text{ es impar} \end{cases}$$

que claramente no es creciente.

Pues bien, existe una relación muy fuerte entre la convergencia de una sucesión y la de sus subsucesiones:

Proposición 4.23. *Sea* G *un grupo ordenado y* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *una sucesión convergente a cierto* $x \in G$. *Entonces, toda subsucesión de* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *converge a* x.

Demostración. Sea $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ una subsucesión de $\{x_n\}$. Por definición, existe entonces una función estrictamente creciente $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $y_n = x_{\phi(n)}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ahora, dado $\varepsilon \in G$ con $\varepsilon > 0$, sabemos que existe cierto $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - x| < \varepsilon \tag{11}$$

para cada $n \geqslant N$. Así, tenemos que si $n \geqslant N$, entonces[4] $\phi(n) \geqslant \phi(N) \geqslant N$, y con ello

$$|y_n - x| = \left|x_{\phi(n)} - x\right| \underset{(11)}{<} \varepsilon,$$

que es justo lo que buscábamos demostrar. ■

Podríamos ahora preguntarnos si también será cierto que si alguna subsucesión de una sucesión converge, entonces la sucesión debe converger. Desafortunadamente, no es difícil encontrar ejemplos que muestran que esta última afirmación es más falsa que un billete de un euro (¿podéis dar alguno?), pero si la sucesión es además de Cauchy, entonces resulta que sí es verdad.

Lema 4.24. *Sea* G *un grupo ordenado y* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *una sucesión de Cauchy. Si existe una subsucesión de* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *convergente a cierto* $x \in G$, *entonces* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *converge a* x.

Demostración. Por hipótesis, existe una subsucesión $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ de $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ convergente a $x \in G$. Por tanto, existe una función estrictamente creciente $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $y_n = x_{\phi(n)}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Dado entonces $\varepsilon \in G$ con $\varepsilon > 0$, como ya es costumbre distinguimos dos casos:

- Si existe cierto $\delta \in G$ tal que $0 < \delta < \varepsilon$, entonces $\varepsilon - \delta > 0$ y existe cierto $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

[4] Podéis demostrar, por inducción, que si $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función estrictamente creciente, entonces $\phi(n) \geqslant n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

$$|y_n - x| < \varepsilon - \delta \tag{12}$$

para cada $n \geqslant N_1$. Por otra parte, como $\{x_n\}$ es de Cauchy existe cierto $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - x_m| < \delta \tag{13}$$

para cada $n, m \geqslant N_2$.

Con todo, definiendo $N := \max\{N_1, N_2\}$ tenemos que si $n \geqslant N$, entonces $\phi(N) \geqslant N$ y así

$$|x_n - x| \leqslant |x_n - y_N| + |y_N - x| = \left|x_n - x_{\phi(N)}\right| + |y_N - x| \underset{(12)\text{ y }(13)}{<} \delta + (\varepsilon - \delta) = \varepsilon,$$

tal y como queríamos demostrar.

- Si no existe ningún $\delta \in G$ tal que $0 < \delta < \varepsilon$, como ya vimos en la demostración del Lema 4.13, existe cierto $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $y_n = x$ para cada $n \geqslant N_1$. Por otra parte, como $\{x_n\}$ es de Cauchy existe cierto $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \tag{14}$$

para cada $n, m \geqslant N_2$.

Con todo, definiendo $N := \max\{N_1, N_2\}$ tenemos que si $n \geqslant N$, entonces $\phi(N) \geqslant N$ y así

$$|x_n - x| = |x_n - y_N| = \left|x_n - x_{\phi(N)}\right| \underset{(14)}{<} \varepsilon,$$

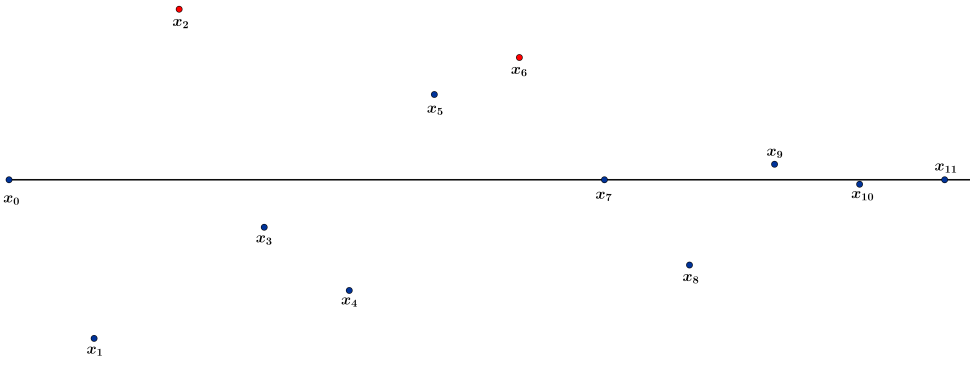
tal y como queríamos demostrar.

En cualquier caso, queda demostrado que $\lim x_n = x$, tal y como queríamos ver. ■

Aunque no lo parezca, estamos ya muy cerca de demostrar que todo grupo Dedekind-completo es Cauchy-completo. Solo nos falta un último ingrediente:

Lema 4.25. (*Lema del sol naciente*) *Sea* X *un conjunto totalmente ordenado y* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *una sucesión en* X*. Entonces,* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *tiene una subsucesión monótona.*

Demostración. Diremos que un número natural $N \in \mathbb{N}$ es un **pico** de la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ si para cada $n > N$, se cumple que $x_n < x_N$.



Representación gráfica de los picos (2 y 6) de una sucesión.

Tenemos entonces dos opciones respecto a los picos de la sucesión:

- Si $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ tiene infinitos picos, podemos enumerarlos y denotar el k-ésimo pico como N_k, luego la función $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida como $\phi(k) = N_k$ es, claramente, estrictamente creciente.[5] Observamos entonces que, por la definición de los picos,

[5] De manera formal, definiríamos esta función ϕ de forma recursiva. ¿Sabríais hacerlo?

la subsucesión $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ dada por $y_k = x_{\phi(k)} = x_{N_k}$ es estrictamente decreciente. En efecto, si $k < p$, como N_k es un pico y $N_p > N_k$, sabemos que $y_p = x_{N_p} < x_{N_k} = y_k$.

- Si $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ tiene únicamente una cantidad finita de picos, entonces existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que ningún $n \geqslant N$ es un pico de la sucesión. En particular, definiendo $n_0 = N$ tenemos que no es un pico y, por definición, esto significa que existe cierto natural n_1 tal que $n_1 > n_0$, pero $x_{n_1} \geqslant x_{n_0}$. Ahora, como $n_1 > n_0 = N$, tenemos que n_1 tampoco es un pico y, de nuevo por definición, existe un natural n_2 tal que $n_2 > n_1$ y $x_{n_2} \geqslant x_{n_1}$. Podemos continuar este proceso[6] obteniendo una sucesión estrictamente creciente de naturales $n_0 < n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ (que nos dan nuestra función estrictamente creciente $\phi(k) = n_k$), de modo que la subsucesión $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ dada por $y_k = x_{n_k}$ es creciente.

En cualquiera de los dos casos hemos obtenido una subsucesión monótona, que es justo lo que queríamos demostrar. ■

Pues ya está, ahora sí que disponemos de todos los ingredientes que necesitamos. Ya podemos demostrar que todo grupo Dedekind-completo es Cauchy-completo. Os dejo un momento para que lo penséis vosotros mismos... ¿Ya? ¿Seguro que lo habéis pensado y no habéis seguido leyendo sin más? Os dejo un minuto más... Ahora sí, ¿verdad? Vamos con la demostración.

Dado G un grupo Dedekind-completo, queremos ver que toda sucesión de Cauchy $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ de G es convergente. Para ello, utilizamos el Lema 4.25 y obtenemos una subsucesión $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ de $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ que sea monótona. Ahora, por la Proposición 4.16 sabemos que $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ está acotada, luego en particular $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ también está acotada (¿por qué?). Así pues, tenemos que $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión monótona y acotada en un grupo ordenado Dedekind-completo, por lo que el Teorema 4.21 nos asegura que $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a cierto $x \in G$. Finalmente, al ser $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ de Cauchy, el Lema 4.24 nos asegura que $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ también converge a x, tal y como queríamos demostrar.

El camino ha sido largo, pero lo hemos conseguido, hemos respondido afirmativamente la tercera pregunta de la entrada anterior: un cuerpo ordenado Dedekind-completo no solo resuelve los problemas geométricos de $\mathbb{Q}$, sino también los analíticos.

Con esto podemos dar por finalizada esta parte de nuestro camino hacia la construcción de los números reales, pero estoy seguro que los más curiosos tendréis clavada una pequeña espinita. Hemos visto que todo grupo ordenado Dedekind-completo es Cauchy-completo, ¿pero y al revés? ¿Es todo grupo ordenado Cauchy-completo también Dedekind-completo? Por desgracia la respuesta es que no, pero es un «no» muy pequeñito ya que basta con añadirle una propiedad más a nuestro grupo ordenado Cauchy-completo para conseguir que sea Dedekind-completo:

Definición 4.26. Diremos que un grupo ordenado G es **arquimediano** si dados $x, y \in G$ con $x, y > 0$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que[7] $x < ny$.

---

[6] Para quienes quieran más formalismo, este «podemos continuar el proceso» se formaliza definiendo de forma recursiva la función $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ como

$$\begin{aligned} \phi(0) &= N, \\ \phi(k+1) &= \min\left\{n \in \mathbb{N} : n > \phi(k) \text{ y } x_n \geqslant x_{\phi(k)}\right\}, \end{aligned}$$

donde podemos asegurar que dicho mínimo siempre existe, pues el conjunto involucrado es no vacío al no existir picos de la sucesión mayores que N.

[7] Aunque en G no haya definido un producto, con ny nos referimos simplemente a la suma de y consigo mismo n veces. Más formalmente, podemos definir de forma recursiva la función $f : \mathbb{N} \times G \to G$ dada por

$$\begin{aligned} f(0, x) &= 0_G, \\ f(n+1, x) &= f(n, x) + x, \end{aligned}$$

y simplemente definimos $nx := f(n, x)$.

Lo que esta definición nos dice es que en un grupo ordenado arquimediano siempre podemos «alcanzar» cualquier elemento positivo a partir de cualquier otro. Es decir, que partiendo de cualquier elemento positivo $x \in G$ y dando únicamente «pasos de longitud x», podemos alcanzar cualquier otro elemento positivo.

Si además G es un cuerpo ordenado, que sea arquimediano nos dice mucho más, pues nos permite asegurar que el cuerpo $\mathbb{Q}$ que construimos en la demostración del Teorema 3.3 es denso.

Antes de enunciar y demostrar este resultado, observemos que si K es un cuerpo ordenado, dado $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$n1_K = x_n$$

donde $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es la sucesión que definimos en la demostración del Teorema 3.3. Como en dicha demostración definimos también

$$x_{-n} := -x_n$$

para cada $n > 0$, podemos de forma análoga definir

$$(-n)1_K := -(n1_K),$$

y por lo visto en la demostración del ya repetido Teorema 3.3 se cumple que:

(i) $-(n1_K) = (-n)1_K$ para cada $n \in \mathbb{Z}$.

(ii) $n1_K + m1_K = (n+m)1_K$ para cada $n, m \in \mathbb{Z}$.

(iii) $(n1_K) \cdot (m1_K) = (n \cdot m)1_K$ para cada $n, m \in \mathbb{Z}$.

(iv) Dados $n, m \in \mathbb{Z}$, se cumple que $n1_K < m1_K$ si, y solo si, $n < m$.

Con esta nueva notación, tenemos también que

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \in K : x = \frac{n1_K}{m1_K} \text{ con } n, m \in \mathbb{Z} \text{ y } m \geqslant 1 \right\}.$$

Además, os dejo como ejercicio demostrar que dados $n \in \mathbb{N}$ y $x \in K$ se cumple que

$$nx = (n1_K) \cdot x.$$

Más aún, también podemos definir

$$(-n)x := -nx$$

para cada $n \geqslant 1$, y otro ejercicio para vosotros (cuánto trabajo tenéis) es comprobar que los puntos anteriores son también ciertos si sustituimos el «1_K» por «x» (para el punto (iv) debéis asumir además que $x > 0$).

Ahora sí, pasemos a enunciar el resultado prometido:

Proposición 4.27. *Sea* K *un cuerpo ordenado. Son equivalentes*:

(i) K *es arquimediano.*

(ii) *El conjunto* $\{n1_K : n \in \mathbb{N}\}$ *no está acotado superiormente.*

(iii) *Dado* $x \in K$ *con* $x > 0$, *existe un* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $\frac{1}{n1_K} < x$.

(iv) $\mathbb{Q}$ *es denso en* K.

Demostración. Comencemos demostrando que **(i) implica (ii)**.

Debemos ver que, dado $x \in K$, existe algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < n1_K$. Sin más, si $x < 0$, es claro que basta tomar $n = 0$, mientras que si $x > 0$, como K es arquimediano, existe cierto $n \in N$ tal que $x < n1_K$ (tomamos $y = 1_K$ en la definición).

Veamos ahora que **(ii) implica (iii)**.

Por (ii) sabemos que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{x} < n1_K$, luego al ser $\frac{1}{x} > 0$ tenemos que $\frac{1}{n1_K} < x$.

A continuación demostraremos que **(iii) implica (iv)**.

Sean $x, y \in K$ con $x < y$ y veamos que existe cierto $z \in \mathbb{Q}$ tal que $x < z < y$.

Si $x < 0 < y$, basta con tomar $z = 0$, con lo que comencemos suponiendo que $0 \leqslant x < y$.

Entonces, como $y - x > 0$, por (iii) existe un $m \in \mathbb{N}$ (claramente con $m > 0$) tal que $\frac{1}{m1_K} < y - x$, luego

$$1_K < (m1_K)(y - x) = (m1_K \cdot y) - (m1_K \cdot x) = my - mx. \tag{15}$$

Definamos ahora el conjunto

$$A := \{k \in \mathbb{N} : mx < k1_K\},$$

el cual es no vacío, pues si $x = 0$, entonces $1 \in A$, mientras que si $x > 0$, entonces $\frac{1}{mx} > 0$ y (iii) nos asegura que existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k1_K} < \frac{1}{mx}$, luego $mx < k1_K$.

Sea entonces n el mínimo de A (claramente $n > 0$), lo que implica que $(n-1)1_K \leqslant mx$ y así obtenemos que

$$n1_K \leqslant mx + 1_K \underset{(15)}{<} my.$$

En definitiva, tenemos que

$$mx < n1_K < my$$

y como $mx = (m1_K) \cdot x$ y $my = (m1_K) \cdot y$, dividiendo en la desigualdad anterior por $m1_K$ obtenemos que

$$x < \frac{n1_K}{m1_K} < y.$$

Basta entonces con tomar $z = \frac{n1_K}{m1_K} \in \mathbb{Q}$, para obtener lo deseado.

Finalmente, si $x < y \leqslant 0$, entonces $0 \leqslant -y < -x$ y por el caso ya resuelto sabemos que existe cierto $w \in \mathbb{Q}$ tal que $-y < w < -x$, luego tomando $z = -w \in \mathbb{Q}$ se tiene que $x < z < y$ tal y como queríamos demostrar.

Solo nos queda demostrar que **(iv) implica (i)**.

Sean pues $x, y \in K$ con $x, y > 0$, y veamos que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < ny$.

Para ello, observemos que si $x \leqslant y$, basta con tomar $n = 2$, pues como $y > 0$

$$x \leqslant y = y + 0 < y + y = 2y.$$

Por otra parte, si $y < x$, comencemos viendo que existe un $m > 0$ tal que $m1_K > x$.

En efecto, como $\frac{1}{x} > 0$, por (iv) existe un $z \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < z < \frac{1}{x}$. Ahora bien, como $z \in \mathbb{Q}$ será de la forma $z = \frac{n1_K}{m1_K}$ con $n, m \in \mathbb{Z}$ y $m > 0$ y, más aún, como $z > 0$, podemos asegurar que $n > 0$. Así pues, tenemos que

$$z \geqslant \frac{1_K}{m1_K} = \frac{1}{m1_K},$$

y como $\frac{1}{x} > z$, concluimos que $m1_K > x$, tal y como queríamos ver.

Ahora, como $y > 0$, de forma completamente análoga obtenemos que existe un $p > 0$ tal que $1_K < py$, luego multiplicando por $m1_K$ obtenemos que

$$m1_K < (m1_K) \cdot py = (m1_K \cdot p1_K) \cdot y = (mp)1_K \cdot y = (mp)y,$$

con lo que definiendo $n := mp$ concluimos que $x < m1_K < ny$, que es justo lo que queríamos demostrar. ■

Esta proposición junto al siguiente lema completan la demostración del Teorema 3.3.

Lema 4.28. *Todo grupo ordenado Dedekind-completo es arquimediano.*

Demostración. Sea G un grupo ordenado Dedekind-completo. Dados entonces $x, y \in G$ con $x, y > 0$, podemos distinguir dos casos:

- Si $x \leqslant y$, entonces
$$x = x + 0 < x + x \leqslant y + y = 2y.$$
- Si $y < x$, definimos el conjunto
$$A := \{ny : n \in \mathbb{N}\}.$$
Si pudiéramos demostrar que A no está acotado superiormente, entonces tendríamos que x no es cota superior de A, luego que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < ny$, que es justo lo que queremos ver.

  Supongamos pues, por reducción al absurdo, que A está acotado superiormente. En dicho caso, como G es Dedekind-completo existe $a \in G$ su supremo, y al ser $y > 0$, obtenemos que $a > a - y$, con lo que $a - y$ no es cota superior de A. Esto implica que existe cierto $n \in \mathbb{N}$ tal que $a - y < ny$, pero entonces $a < ny + y = (n+1)y$, siendo $(n+1)y \in A$. Esto contradice que a es el supremo de A, y con ello queda probado que A no está acotado superiormente.

En cualquier caso existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < ny$, que es justo lo que queríamos demostrar. ■

Todo lo dicho nos muestra que ser arquimediano es también una propiedad imprescindible para nuestro propósito de construir los números reales, pero además, tal y como hemos dicho antes, es la pieza que nos faltaba para establecer la equivalencia entre nuestras dos nociones de completitud:

Teorema 4.29. *Un grupo ordenado es Dedekind-completo si, y solo si, es arquimediano y Cauchy-completo.*

Nosotros hemos demostrado la implicación directa, es decir, que todo grupo ordenado Dedekind-completo es arquimediano y Cauchy-completo, y esto es lo único que necesitaremos para este curso. Sin embargo, quien esté interesado puede consultar la demostración de la otra implicación aquí. Además, como todos estaréis esperando, existen ejemplos de cuerpos ordenados Cauchy-completos y no arquimedianos, luego no Dedekind-completos, pero estos ejemplos son relativamente complejos y se escapan de las pretensiones de este curso. Aún así, si alguien está especialmente interesado puede buscar información sobre el **cuerpo de series formales de Laurent**.

5 BUENAS Y MALAS NOTICIAS ALGEBRAICAS

Ya tenemos completamente solucionados los problemas geométricos y analíticos[8] de $\mathbb{Q}$, pero todavía no hemos dicho nada sobre los problemas algebraicos. Ya os hice el *spoiler* de que también quedan solucionados, es decir, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 5.1. *Sea K un cuerpo ordenado Dedekind-completo, $n \in \mathbb{N}$ no nulo y $r \in K$ con $r > 0$. Entonces, toda ecuación de la forma*[9] $x^n = r$ *tiene solución en K. Además, existe un único $y > 0$ que satisface la ecuación anterior, es decir, que cumple que $y^n = r$.*

[8] Bueno, solo si creéis en la existencia de un cuerpo ordenado Dedekind-completo, pero de momento os pido que hagáis ese salto de fe, ya que en las próximas entradas lo construiremos ladrillo a ladrillo.

[9] Observad que en este resultado estamos utilizando una operación que no hemos definido sobre los cuerpos: la **exponenciación**. Sin embargo, su definición es tal y como imagináis, pues simplemente denotaremos

En esencia, este teorema (cuya demostración veremos después) nos dice que en un cuerpo ordenado Dedekind-completo K podemos definir las raíces n-ésimas de cualquiera de sus elementos positivos, lo cual es un avance enorme respecto a lo que podemos hacer en $\mathbb{Q}$, ¿pero nos garantiza esto que toda ecuación polinómica tendrá solución? Por desgracia, no es así. Por ejemplo, nunca podremos resolver la ecuación $x^2 = -1$. ¿Por qué? Pues porque en K cualquier elemento elevado al cuadrado es no negativo, luego en particular $1 = 1^2$ será positivo, y esto implica que $-1 < 0 \leqslant x^2$.

En efecto, sea $r \in K$. Si $r > 0$, entonces $r^2 = r \cdot r > 0 \cdot 0 = 0$, mientras que si $r = 0$, entonces $r^2 = 0 \geqslant 0$. Por otra parte, si $r < 0$, entonces $-r > 0$ y como[10] $r^2 = (-r)^2$, concluimos por lo anterior que $r^2 > 0$.

Si buscáramos obtener un cuerpo en el que toda ecuación polinómica tuviera solución, entonces necesitaríamos dar un paso más, necesitaríamos completar $\mathbb{Q}$ algebraicamente. Esta nueva completación nos llevaría al **cuerpo de los números complejos**[11], pero todo tiene un precio, pues los números complejos no pueden formar un cuerpo ordenado, ya que hemos visto que, por ejemplo, la ecuación $x^2 = -1$ no puede tener solución en ningún cuerpo ordenado.

Aunque en estas entradas no entraremos en el estudio de los números complejos, creo que es interesante conocer esta debilidad de los números reales y el precio a pagar por la completitud algebraica. En cualquier caso, ya podemos afirmar con todo rigor que basta con probar que existe un cuerpo ordenado Dedekind-completo para asegurar que dicho cuerpo soluciona todos los problemas que habíamos detectado en $\mathbb{Q}$.

Como lo prometido es deuda, finalizaremos la entrada demostrando el Teorema 5.1, para lo cual necesitaremos algunos lemas técnicos auxiliares:

Lema 5.2. *Sea K un cuerpo ordenado, $x, y \in K$ y $n \in \mathbb{N}$ no nulo. Entonces, se cumplen*:

(i) $(xy)^n = x^n y^n$.

(ii) *Si $x > 0$, entonces $x^n > 0$.*

(iii) *Si $x, y > 0$, entonces $x < y$ si, y solo si, $x^n < y^n$.*

(iv) *Si $x > 0$ y $n > 1$, entonces $x^n \leqslant x$ si, y solo si, $x \leqslant 1_K$.*

(v) *Si $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ una sucesión convergente a x, entonces $\lim x_k^n = x^n$.*

La demostración de todos los puntos de este lema se obtiene fácilmente por inducción, con lo que os la dejo como ejercicio.

Lema 5.3 (Desigualdad de Bernoulli)**.** *Sea K un cuerpo ordenado, $x \in K$ con $x \geqslant -1_K$ y $n \in \mathbb{N}$ no nulo. Entonces se cumple que*

$$(1_K + x)^n \geqslant 1_K + nx.$$

Demostración. Fijado $x \geqslant -1_K$, demostraremos el resultado por inducción.

Si $n = 1$ la desigualdad es clara, luego supongamos que es cierta para $n \geqslant 1$ arbitrario, y veamos que entonces lo es para $n + 1$.

---

por x^n al resultado de multiplicar x consigo mismo n veces. Si queréis ser más formales, podemos definir de forma recursiva la función $f : \mathbb{N} \times K \to K$ dada por

$$f(0, x) = 1_K,$$
$$f(n + 1, x) = f(n, x) \cdot x,$$

y denotamos $x^n := f(n, x)$.

[10] Esto es consecuencia de que, en general, si x, y son elementos en un cuerpo ordenado, entonces $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$. La prueba de este hecho básico podéis consultarla en el Teorema 3.2 de la entrada *Menos por menos es más*.

[11] Siendo precisos, la compleción algebraica de los números reales nos lleva al cuerpo de los números complejos. Al completar $\mathbb{Q}$ algebraicamente se obtiene lo que se conoce como el **cuerpo de los números algebraicos**, pero esto os lo comento solo para encender vuestra curiosidad. No lo necesitaremos para nada en el curso.

Sin más, tenemos que

$$(1_K + x)^{n+1} = (1_K + x)^n(1_K + x) \underset{(HI)}{\geqslant} (1_K + nx)(1_K + x) = 1_K + (n+1)x + nx^2$$
$$\geqslant 1_K + (n+1)x,$$

donde en la primera desigualdad utilizamos también que $1_K + x \geqslant 0$, y en la última utilizamos que $nx^2 \geqslant 0$.

Por el principio de inducción, concluimos que la desigualdad buscada se satisface para todo $n \geqslant 1$, tal y como queríamos ver. ■

Lema 5.4. *Sea* K *un cuerpo ordenado,* $t \in K$ *con* $0 < t \leqslant 1_K$ *y* $n \in \mathbb{N}$ *no nulo. Entonces se cumple que*

$$t\left(1_K + \frac{1_K - t}{n1_K}\right)^n \leqslant 1_K.$$

Demostración. Si definimos $s := 1_K - t$, lo que queremos demostrar es que

$$(1_K - s)\left(1_K + \frac{s}{n1_K}\right)^n \leqslant 1_K.$$

Ahora, como $0 \leqslant s < 1_K$ tenemos que $-\frac{s}{n1_K} \geqslant -1_K$ y por el Lema 5.3 obtenemos que

$$1_K - s \leqslant \left(1 - \frac{s}{n1_K}\right)^n.$$

Como $s \geqslant 0$, tenemos entonces que

$$(1_K - s)\left(1_K + \frac{s}{n1_K}\right)^n \leqslant \left(1 - \frac{s}{n1_K}\right)^n \left(1 + \frac{s}{n1_K}\right)^n = \left(1_K - \frac{s^2}{n^2 1_K}\right)^n. \tag{16}$$

Además, observemos que como $s < 1_K$, el Lema 5.2 (iii) nos asegura que $s^2 < 1_K$, luego

$$\frac{s^2}{n^2 1_K} < \frac{1_K}{n^2 1_K} \leqslant 1_K,$$

y usando el Lema 5.2 (ii) concluimos que

$$0 < \left(1_K - \frac{s^2}{n^2 1_K}\right)^n.$$

Esto nos permite usar de nuevo el Lema 5.2 (iii) para obtener que

$$(1_K - s)\left(1_K + \frac{s}{n1_K}\right)^n \underset{(16)}{\leqslant} \left(1_K - \frac{s^2}{n^2 1_K}\right)^n \leqslant (1_K - 0)^n = 1_K,$$

que es justo lo que queríamos demostrar. ■

Ahora ya podemos demostrar el teorema:[12]

Demostración del Teorema 5.1. Comencemos demostrando la unicidad.

Si $x, y \in K$ cumplen que $x, y > 0$ y $x^n = y^n = r$, entonces debe ocurrir que $x = y$, pues en caso contrario por el Lema 5.2 (iii) obtendríamos que $x^n < y^n$ o $y^n < x^n$.

Veamos ahora que realmente existe al menos un $x \in K$ con $x > 0$ tal que $x^n = r$.

Para ello, definamos de forma recursiva la sucesión $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ tal que $x_0 = \min\{1_K, r\}$ y

$$x_{k+1} = x_k + \frac{x_k(r - x_k^n)}{nr}$$

[12] Podéis consultar una demostración alternativa, que no utiliza límites, en el libro *Principles of mathematical analysis* de Walter Rudin.

para cada $k \geqslant 0$.

Si vemos que esta sucesión es creciente y está acotada superiormente, por el Teorema 4.21 sabemos que existe cierto $x \in K$ tal que $x = \sup\{x_k : k \in \mathbb{N}\} = \lim x_k$. Esto nos dice que $x \geqslant x_0 > 0$, y como por el Lema 4.14 sabemos que $\lim x_{k+1} = x$, el Teorema 4.17 junto al Lema 5.2 (v) nos asegura que

$$x = \lim x_{k+1} = \lim \left(x_k + \frac{x_k(r - x_k^n)}{nr} \right) = x + \frac{x(r - x^n)}{nr}.$$

De aquí obtenemos que

$$\frac{x(r - x^n)}{nr} = 0,$$

luego que $x(r - x^n) = 0$ y, como $x > 0$, podemos dividir a ambos lados de la igualdad por x y concluir que $x^n = r$, tal y como buscábamos ver.

Por tanto, para concluir la demostración basta con ver que la sucesión $\{x_n\}$ es creciente y acotada superiormente.

Comencemos demostrando por inducción que

$$0 < x_k \text{ y } x_k^n \leqslant r \tag{17}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$.

Si $k = 0$, tenemos que $x_0 = \min\{1_K, r\}$, con lo que distingamos dos casos:

- Si $x_0 = 1_K$, entonces es claro que $x_0 > 0$, y además $1_K \leqslant r$, con lo que $x_0^n = 1_K \leqslant r$.
- Si $x_0 = r$, entonces es claro que $x_0 > 0$, y además $r \leqslant 1_K$, luego por el Lema 5.2 (iv) $x_0^n = r^n \leqslant r$.

Ahora, supongamos que (17) es cierto para un $k \geqslant 0$ arbitrario, y veamos que entonces $x_{k+1} > 0$ y $x_{k+1}^n \leqslant r$.

En primer lugar, como $x_k > 0$ y $x_k^n \leqslant r$ tenemos que

$$\frac{x_k(r - x_k^n)}{nr} \geqslant 0,$$

luego

$$x_{k+1} = x_k + \frac{x_k(r - x_k^n)}{nr} \geqslant x_k > 0.$$

Ahora, observemos que

$$x_{k+1} = x_k \left(1_K + \frac{r - x_k^n}{nr} \right) = x_k \left(1_K + \frac{1_K - \frac{x_k^n}{r}}{n1_K} \right),$$

luego

$$\frac{x_{k+1}^n}{r} = \frac{x_k^n}{r} \left(1_K + \frac{1_K - \frac{x_k^n}{r}}{n1_K} \right)^n,$$

y el Lema 5.4 (con $t = \frac{x_k^n}{r} \leqslant 1_K$) nos asegura entonces que

$$\frac{x_{k+1}^n}{r} \leqslant 1_K,$$

es decir, que $x_{k+1}^n \leqslant r$, que es justo lo que queríamos demostrar.

Por inducción, queda entonces demostrado que (17) es cierto para cada $k \in \mathbb{N}$.

Ahora que sabemos que (17) es cierto, es inmediato que la sucesión $\{x_k\}$ es creciente, pues para cada $k \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\frac{x_k(r - x_k^n)}{nr} \geqslant 0,$$

y así

$$x_k \leqslant x_k + \frac{x_k(r - x_k^n)}{nr} = x_{k+1}.$$

Finalmente, veamos que $x_k \leqslant \max\{1_K, r\}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, para lo cual distinguimos dos casos:

- Si $r \geqslant 1_K$, entonces $x_k \leqslant r$, pues en caso contrario el Lema 5.2 (iii) y (iv) nos daría que $x_k^n > r^n \geqslant r$, y esto contradice (17).
- Si $r < 1_K$, entonces $x_k \leqslant 1_K$, pues en caso contrario el Lema 5.2 (iii) nos daría que $x_k^n > 1_K > r$, y esto contradice (17).

En cualquier caso obtenemos que $\max\{1_K, r\}$ es una cota superior de $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$, y con ello podemos dar por finalizada la demostración. ■

Con todo lo que hemos visto en estas dos primeras entradas ya solo nos queda construir nuestro cuerpo ordenado Dedekind-completo para afirmar que sabemos, sin lugar a dudas, qué son los números reales. En la siguiente entrada comenzaremos este camino, pues presentaremos con detalle los números decimales y veremos su relación con los números racionales, es decir, daremos sentido a esas «fórmulas mágicas» que a todos nos enseñaron en el instituto sobre como «convertir» un número racional en uno decimal, y viceversa. ¡No os la perdáis!