¿Podemos elegir no elegir en análisis funcional?

Esteban Martínez Vañó

Universidad de Granada
Departamento de Análisis Matemático

Seminario de Doctorado IUMA
Universidad de Zaragoza
29 de octubre de 2026

Índice

1. ¿Qué es el axioma de elección?
2. Afirmaciones equivalentes al axioma de elección
3. Formas débiles del axioma de elección
4. Elección en análisis elemental
5. Elección en análisis funcional
6. Referencias y *spam*

Índice

1 ¿Qué es el axioma de elección?

2 Afirmaciones equivalentes al axioma de elección

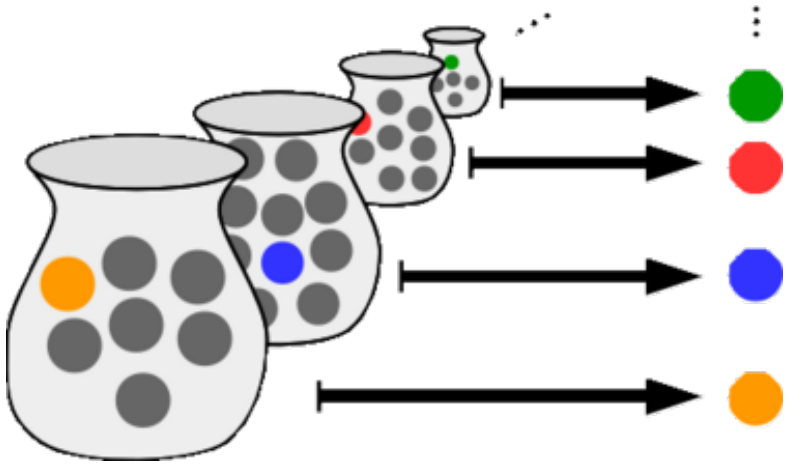
3 Formas débiles del axioma de elección

4 Elección en análisis elemental

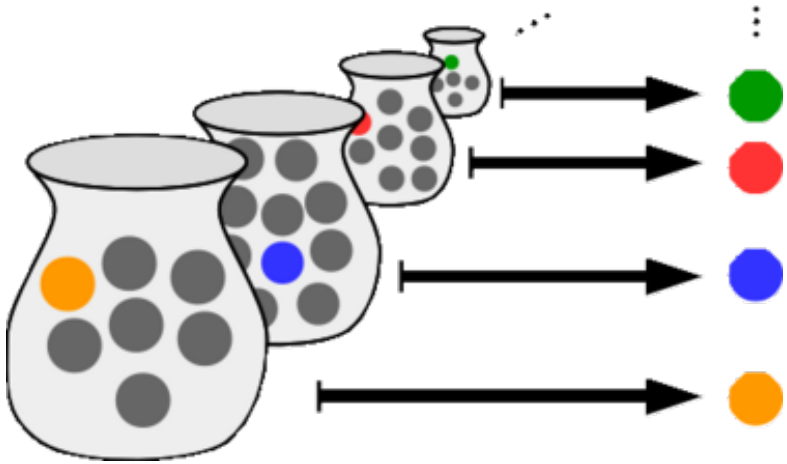
5 Elección en análisis funcional

6 Referencias y *spam*

¿Qué es el axioma de elección?



¿Qué es el axioma de elección?



Dada cualquier familia de conjuntos I que no contenga al vacío existe una función de elección para I, es decir, existe una función $f : I \to \bigcup_{i \in I} i$ de modo que $f(i) \in i$ para cada $i \in I$.

¿Qué es el axioma de elección?

Dada cualquier familia de conjuntos I, existe una función de elección para I, es decir, existe una función $f : I \to \bigcup_{i \in I} i$ de modo que $f(i) \in i$ para cada $i \in I$.

¿Qué es el axioma de elección?

Dada cualquier familia de conjuntos I, existe una función de elección para I, es decir, existe una función $f : I \to \bigcup_{i \in I} i$ de modo que $f(i) \in i$ para cada $i \in I$.

Algunas consideraciones:

¿Qué es el axioma de elección?

Dada cualquier familia de conjuntos I, existe una función de elección para I, es decir, existe una función $f : I \to \bigcup_{i \in I} i$ de modo que $f(i) \in i$ para cada $i \in I$.

Algunas consideraciones:

- El axioma nos habla de la existencia de la función de elección, pero NO de una función de elección explícita.

¿Qué es el axioma de elección?

Dada cualquier familia de conjuntos I, existe una función de elección para I, es decir, existe una función $f : I \to \bigcup_{i \in I} i$ de modo que $f(i) \in i$ para cada $i \in I$.

Algunas consideraciones:

- El axioma nos habla de la existencia de la función de elección, pero NO de una función de elección explícita.
- Bajo ciertas condiciones extras (p.e. si los elementos de I están bien ordenados), podemos construir explícitamente la función de elección.

¿Qué es el axioma de elección?

Dada cualquier familia de conjuntos I, existe una función de elección para I, es decir, existe una función $f : I \to \bigcup_{i \in I} i$ de modo que $f(i) \in i$ para cada $i \in I$.

Algunas consideraciones:

- El axioma nos habla de la existencia de la función de elección, pero NO de una función de elección explícita.
- Bajo ciertas condiciones extras (p.e. si los elementos de I están bien ordenados), podemos construir explícitamente la función de elección.
- Si la familia I es finita, no necesitamos este axioma.

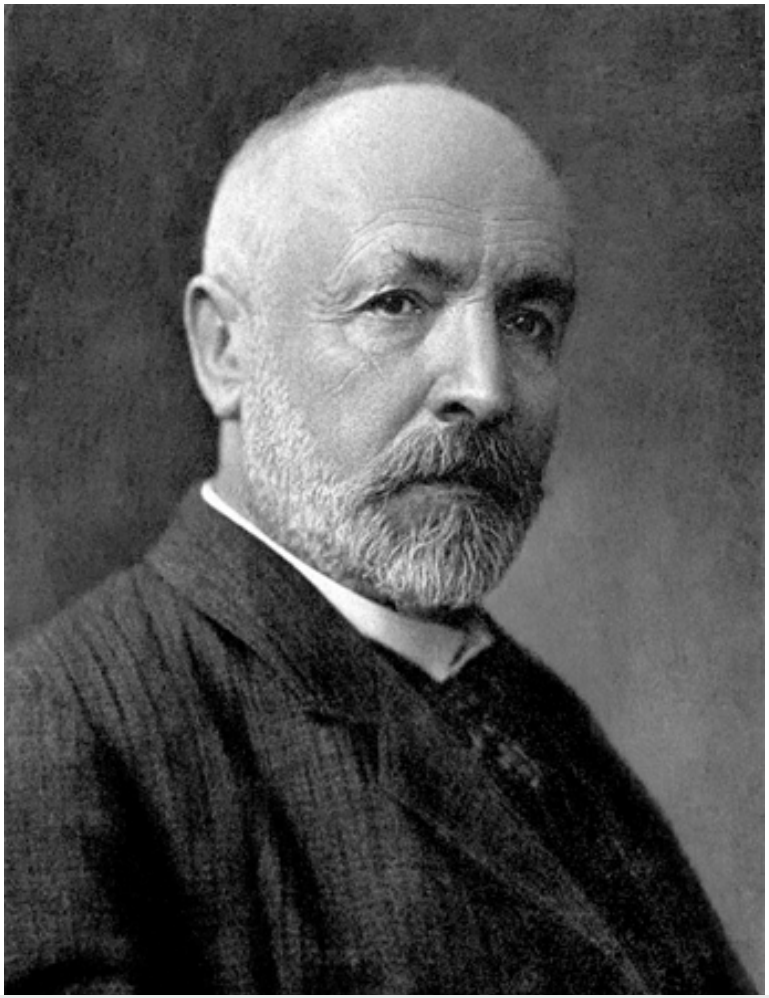
¿Qué es el axioma de elección?

¿Cómo surge el axioma de elección?

¿Qué es el axioma de elección?

¿Cómo surge el axioma de elección?

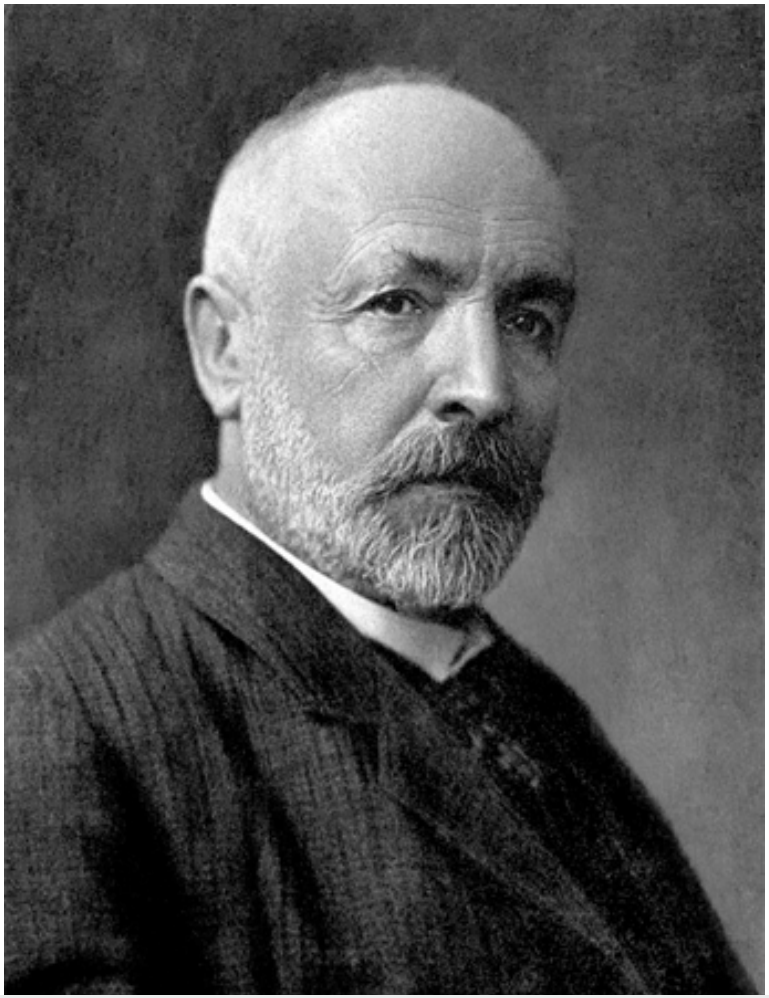
Georg Cantor (1845 - 1918)



¿Qué es el axioma de elección?

¿Cómo surge el axioma de elección?

Georg Cantor (1845 - 1918)



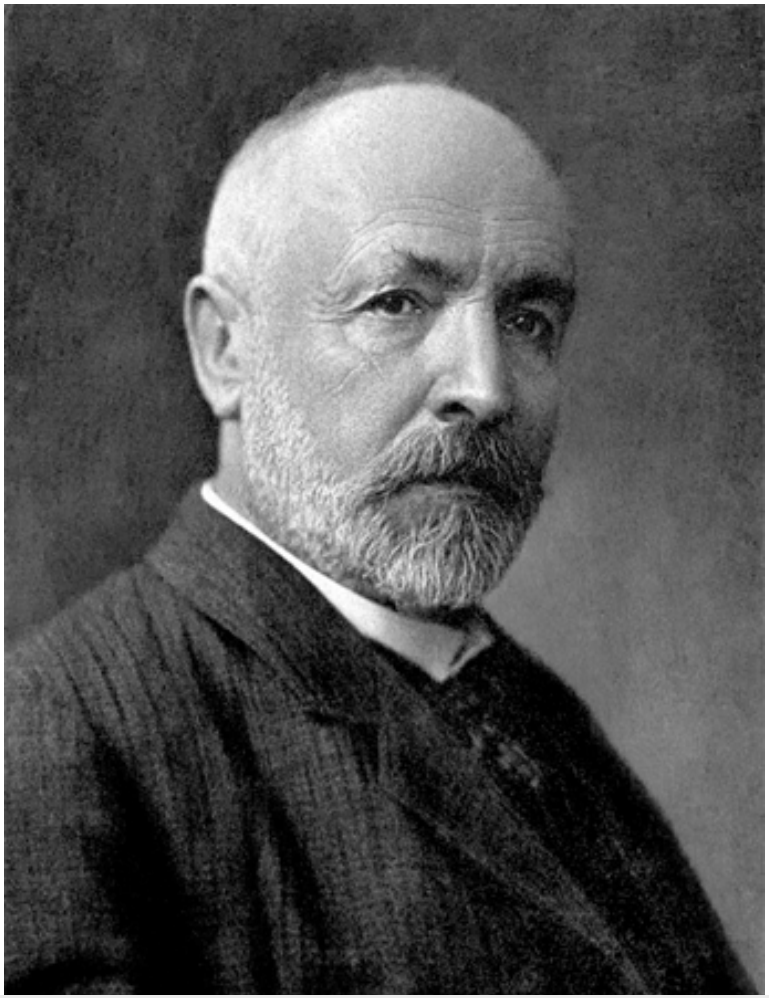
Siempre es posible transformar cualquier conjunto bien definido en un conjunto bien ordenado. Más adelante diré más sobre esta ley del pensamiento, que me parece fundamental y de gran trascendencia, y que destaca especialmente por su universalidad.

George Cantor (1883)

¿Qué es el axioma de elección?

¿Cómo surge el axioma de elección?

Georg Cantor (1845 - 1918)



David Hilbert (1862 - 1943)



¿Qué es el axioma de elección?

¿Cómo surge el axioma de elección?

David Hilbert (1862 - 1943)

MATHEMATICAL PROBLEMS.*

LECTURE DELIVERED BEFORE THE INTERNATIONAL CONGRESS OF MATHEMATICIANS AT PARIS IN 1900.

BY PROFESSOR DAVID HILBERT.

WHO of us would not be glad to lift the veil behind which the future lies hidden; to cast a glance at the next advances of our science and at the secrets of its development during future centuries? What particular goals will there be toward which the leading mathematical spirits of coming generations will strive? What new methods and new facts in the wide and rich field of mathematical thought will the new centuries disclose?

History teaches the continuity of the development of science. We know that every age has its own problems, which the following age either solves or casts aside as profitless and replaces by new ones. If we would obtain an idea of the probable development of mathematical knowledge in the immediate future, we must let the unsettled questions pass before our minds and look over the problems which the science of to-day sets and whose solution we expect from the future. To such a review of problems the present day, lying at the meeting of the centuries, seems to me well adapted. For the close of a great epoch not only invites us to look back into the past but also directs our thoughts to the unknown future.

* Translated for the BULLETIN, with the author's permission, by Dr. MARY WINSTON NEWSON. The original appeared in the *Göttinger Nachrichten*, 1900, pp. 253–297, and in the *Archiv der Mathematik und Physik*, 3d ser., vol. 1 (1901), pp. 44–63 and 213–237.



¿Qué es el axioma de elección?

¿Cómo surge el axioma de elección?

David Hilbert (1862 - 1943)



1. CANTOR'S PROBLEM OF THE CARDINAL NUMBER OF THE CONTINUUM.

Two systems, *i. e* , two assemblages of ordinary real numbers or points, are said to be (according to Cantor) equivalent or of equal *cardinal number*, if they can be brought into a relation to one another such that to every number of the one assemblage corresponds one and only one definite number of the other. The investigations of Cantor on such assemblages of points suggest a very plausible theorem, which nevertheless, in spite of the most strenuous efforts, no one has succeeded in proving. This is the theorem :

Every system of infinitely many real numbers, *i. e.*, every assemblage of numbers (or points), is either equivalent to the assemblage of natural integers, 1, 2, 3,··· or to the assemblage of all real numbers and therefore to the continuum, that is, to the points of a line ; *as regards equivalence there are, therefore, only two assemblages of numbers, the countable assemblage and the continuum.*

¿Qué es el axioma de elección?

¿Cómo surge el axioma de elección?

David Hilbert (1862 - 1943)

Let me mention another very remarkable statement of Cantor's which stands in the closest connection with the theorem mentioned and which, perhaps, offers the key to its proof. Any system of real numbers is said to be ordered, if for every two numbers of the system it is determined which one is the earlier and which the later, and if at the same time this determination is of such a kind that, if a is before b and b is before c, then a always comes before c. The natural arrangement of numbers of a system is defined to be that in which the smaller precedes the larger. But there are, as is easily seen, infinitely many other ways in which the numbers of a system may be arranged.

The question now arises whether the totality of all numbers may not be arranged in another manner so that every partial assemblage may have a first element, *i. e.*, whether the continuum cannot be considered as a well ordered assemblage—a question which Cantor thinks must be answered in the affirmative. It appears to me most desirable to obtain a direct proof of this remarkable statement of Cantor's, perhaps by actually giving an arrangement of numbers such that in every partial system a first number can be pointed out.



¿Qué es el axioma de elección?

¿Cómo surge el axioma de elección?

Ernst Zermelo (1871 - 1953)



David Hilbert (1862 - 1943)



¿Qué es el axioma de elección?

¿Cómo surge el axioma de elección?

Ernst Zermelo (1871 - 1953)



Proof that every set can be well-ordered

ERNST ZERMELO

(*1904*)

The present proof rests upon the assumption that coverings γ actually do exist, hence upon the principle that even for an infinite totality of sets there are always mappings that associate with every set one of its elements, or, expressed formally, that the product of an infinite totality of sets, each containing at least one element, itself differs from zero. This logical principle cannot, to be sure, be reduced to a still simpler one, but it is applied without hesitation everywhere in mathematical deduction. For example, the validity of the proposition that the number of parts into which a set decomposes is less than or equal to the number of all of its elements cannot be proved except by associating with each of the parts in question one of its elements.

¿Qué es el axioma de elección?

¿Cómo surge el axioma de elección?

Ernst Zermelo (1871 - 1953)



A new proof of the possibility of a well-ordering

ERNST ZERMELO

(*1908*)

Although I still fully uphold my "Proof that every set can be well-ordered", published in 1904, in the face of the various objections that will be thoroughly discussed in § 2, the new proof that I give below of the same theorem may yet be of interest, since, on the one hand, it presupposes no specific theorems of set theory and, on the other, it brings out, more clearly than the first proof did, the purely formal character of the well-ordering, which has nothing at all to do with spatiotemporal arrangement.

¿Qué es el axioma de elección?

¿Cómo surge el axioma de elección?

Ernst Zermelo (1871 - 1953)



Investigations in the foundations of set theory I

ERNST ZERMELO

(*1908a*)

Now in the present paper I intend to show how the entire theory created by Cantor and Dedekind can be reduced to a few definitions and seven principles, or axioms, which appear to be mutually independent. The further, more philosophical, question about the origin of these principles and the extent to which they are valid will not be discussed here. I have not yet even been able to prove rigorously that my axioms

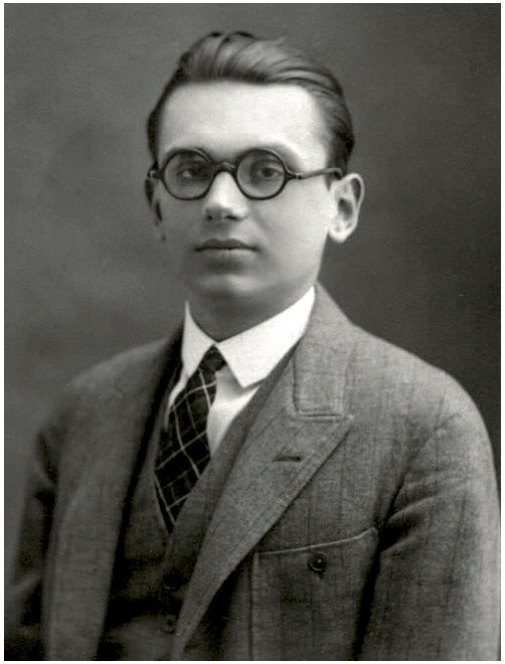
¿Qué es el axioma de elección?

¿Podría llevarnos el axioma de elección a una contradicción?

¿Qué es el axioma de elección?

¿Podría llevarnos el axioma de elección a una contradicción?

Kurt Gödel (1906 - 1978)



Teorema: Gödel, 1938

Si ZF es consistente, entonces lo es ZFC.

¿Qué es el axioma de elección?

¿Podría llevarnos el axioma de elección a una contradicción?
Gödel introdujo una jerarquía de conjuntos:

$$\begin{aligned} L_0 &= \varnothing \\ L_{\alpha+1} &= \mathrm{Def}(L_\alpha) \\ L_\lambda &= \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha \end{aligned}$$

¿Qué es el axioma de elección?

¿Podría llevarnos el axioma de elección a una contradicción?
Gödel introdujo una jerarquía de conjuntos:

$$\begin{aligned} L_0 &= \varnothing \\ L_{\alpha+1} &= \mathrm{Def}(L_\alpha) \\ L_\lambda &= \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha \end{aligned}$$

A la clase

$$L = \bigcup_{\alpha\in\Omega} L_\alpha$$

la llamo *el universo constructible* y demostró que es un modelo de ZF más el axioma que afirma que todo conjunto es constructible, teoría en la cual se puede demostrar el axioma de elección.

¿Qué es el axioma de elección?

Moraleja: El axioma de elección, por sí mismo, no introduce conjuntos "raros" de los que no tenemos ninguna descripción concreta, pues si únicamente tratamos con conjuntos constructibles es un teorema. Para que introduzca conjuntos "raros", debemos estar ya tratando con conjuntos "raros".

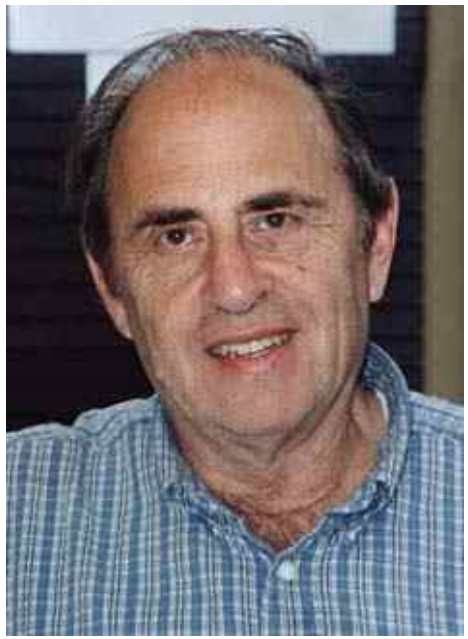
¿Qué es el axioma de elección?

Pero, ¿podría ser redundante? ¿Podría ser un teorema de ZF?

¿Qué es el axioma de elección?

Pero, ¿podría ser redundante? ¿Podría ser un teorema de ZF?

Paul Cohen (1934 - 2007)

Teorema: Cohen, 1963

Si ZF es consistente, entonces lo es ZF$\neg$C.

Índice

1 ¿Qué es el axioma de elección?

2 Afirmaciones equivalentes al axioma de elección

3 Formas débiles del axioma de elección

4 Elección en análisis elemental

5 Elección en análisis funcional

6 Referencias y *spam*

Afirmaciones equivalentes al axioma de elección

Son equivalentes:

(I) El axioma de elección.

Afirmaciones equivalentes al axioma de elección

Son equivalentes:

(I) El axioma de elección.

(II) El lema de Zorn.

Todo conjunto ordenado en el cual toda cadena tiene cota superior contiene un elemento maximal.

Afirmaciones equivalentes al axioma de elección

Son equivalentes:

(I) El axioma de elección.

(II) El lema de Zorn.

(III) El principio del buen orden.

Todo conjunto admite un buen orden.

Afirmaciones equivalentes al axioma de elección

Son equivalentes:

(I) El axioma de elección.

(II) El lema de Zorn.

(III) El principio del buen orden.

Todo conjunto admite un buen orden.

El Axioma de Elección es claramente cierto, el Principio del Buen Orden es claramente falso; ¿y quién puede decir nada sobre el lema de Zorn?

Jerry L. Bona

Afirmaciones equivalentes al axioma de elección

Son equivalentes:

(I) El axioma de elección.

(II) El lema de Zorn.

(III) El principio del buen orden.

(IV) Principio maximal de Hausdorff.

En cualquier conjunto ordenado cada cadena puede extenderse a una cadena maximal.

Afirmaciones equivalentes al axioma de elección

Son equivalentes:

(I) El axioma de elección.

(II) El lema de Zorn.

(III) El principio del buen orden.

(IV) Principio maximal de Hausdorff.

(V) Ley de tricotomía para cardinales.

Dados dos conjuntos, o bien son equipotentes, o bien existe un embedimiento de uno al otro o viceversa.

Afirmaciones equivalentes al axioma de elección

Son equivalentes:

(I) El axioma de elección.

(II) El lema de Zorn.

(III) El principio del buen orden.

(IV) Principio maximal de Hausdorff.

(V) Ley de tricotomía para cardinales.

(VI) Teorema de Tarski.

Dado cualquier conjunto infinito A, existe una biyección entre A y $A \times A$.

Afirmaciones equivalentes al axioma de elección

Son equivalentes:

(I) El axioma de elección.

(II) El lema de Zorn.

(III) El principio del buen orden.

(IV) Principio maximal de Hausdorff.

(V) Ley de tricotomía para cardinales.

(VI) Teorema de Tarski.

(VII) Toda función sobreyectiva tiene inversa por la derecha.

Afirmaciones equivalentes al axioma de elección

Son equivalentes:

(I) El axioma de elección.

(II) El lema de Zorn.

(III) El principio del buen orden.

(IV) Principio maximal de Hausdorff.

(V) Ley de tricotomía para cardinales.

(VI) Teorema de Tarski.

(VII) Toda función sobreyectiva tiene inversa por la derecha.

(VIII) Todo espacio vectorial tiene una base.

Afirmaciones equivalentes al axioma de elección

Son equivalentes:

(I) El axioma de elección.

(II) El lema de Zorn.

(III) El principio del buen orden.

(IV) Principio maximal de Hausdorff.

(V) Ley de tricotomía para cardinales.

(VI) Teorema de Tarski

(VII) Toda función sobreyectiva tiene inversa por la derecha.

(VIII) Todo espacio vectorial tiene una base.

(IX) Todo conjunto admite estructura de grupo (grupo abeliano, anillo, anillo conmutativo, dominio de integridad con unidad).

Afirmaciones equivalentes al axioma de elección

Son equivalentes:

(X) Teorema de Krull.

En todo anillo unitario, cualquier ideal puede extenderse a un ideal maximal.

Afirmaciones equivalentes al axioma de elección

Son equivalentes:

(X) Teorema de Krull.

(XI) El producto cartesiano de espacios conexos es conexo.

Afirmaciones equivalentes al axioma de elección

Son equivalentes:

(X) Teorema de Krull.

(XI) El producto cartesiano de espacios conexos es conexo.

(XII) Teorema de Tychonoff.

El producto cartesiano de espacios compactos es compacto.

Afirmaciones equivalentes al axioma de elección

Son equivalentes:

(X) Teorema de Krull.

(XI) El producto cartesiano de espacios conexos es conexo.

(XII) Teorema de Tychonoff.

(XIII) En la topología producto, la clausura del producto cartesiano de una familia de subconjuntos es igual al producto de las clausuras.

Afirmaciones equivalentes al axioma de elección

Son equivalentes:

(X) Teorema de Krull.

(XI) El producto cartesiano de espacios conexos es conexo.

(XII) Teorema de Tychonoff.

(XIII) En la topología producto, la clausura del producto cartesiano de una familia de subconjuntos es igual al producto de las clausuras.

(XIV) Teorema de Löwenheim–Skolem.

Si una teoría axiomática tiene un modelo de cardinal κ, entonces tiene un modelo de cardinal μ para cada $\aleph_0 \leq \mu \leq \kappa$.

Afirmaciones equivalentes al axioma de elección

Son equivalentes:

(X) Teorema de Krull.

(XI) El producto cartesiano de espacios conexos es conexo.

(XII) Teorema de Tychonoff.

(XIII) En la topología producto, la clausura del producto cartesiano de una familia de subconjuntos es igual al producto de las clausuras.

(XIV) Teorema de Löwenheim–Skolem.

(XV) Todo grafo conexo tiene un árbol generador.

Índice

1 ¿Qué es el axioma de elección?

2 Afirmaciones equivalentes al axioma de elección

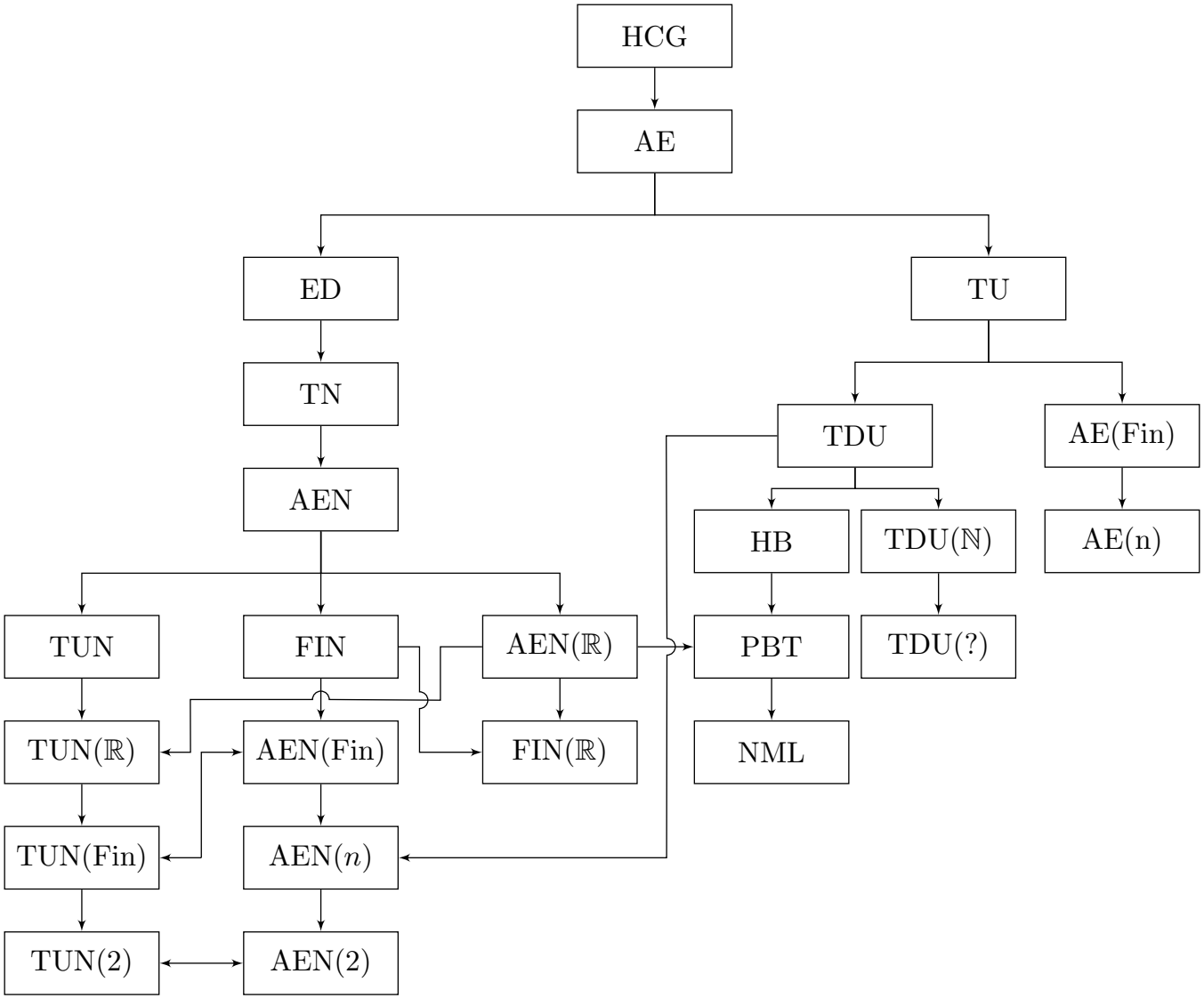
3 Formas débiles del axioma de elección

4 Elección en análisis elemental

5 Elección en análisis funcional

6 Referencias y *spam*

Formas débiles del axioma de elección



Índice

1 ¿Qué es el axioma de elección?

2 Afirmaciones equivalentes al axioma de elección

3 Formas débiles del axioma de elección

4 Elección en análisis elemental

5 Elección en análisis funcional

6 Referencias y *spam*

Análisis elemental

En ZF se cumplen:

Análisis elemental

En ZF se cumplen:

- $\mathbb{R}$ y todos sus subespacios son metrizables.

Análisis elemental

En ZF se cumplen:

- $\mathbb{R}$ y todos sus subespacios son metrizables.
- $\mathbb{R}$ y todos sus subespacios tienen bases numerables.

Análisis elemental

En ZF se cumplen:

- $\mathbb{R}$ y todos sus subespacios son metrizables.
- $\mathbb{R}$ y todos sus subespacios tienen bases numerables.
- $\mathbb{R}$ es separable.

Análisis elemental

En ZF se cumplen:

- $\mathbb{R}$ y todos sus subespacios son metrizables.
- $\mathbb{R}$ y todos sus subespacios tienen bases numerables.
- $\mathbb{R}$ es separable.
- Un subespacio de $\mathbb{R}$ es conexo si, y solo si, es un intervalo.

Análisis elemental

En ZF se cumplen:

- $\mathbb{R}$ y todos sus subespacios son metrizables.
- $\mathbb{R}$ y todos sus subespacios tienen bases numerables.
- $\mathbb{R}$ es separable.
- Un subespacio de $\mathbb{R}$ es conexo si, y solo si, es un intervalo.
- Un subespacio de $\mathbb{R}$ es compacto si, y solo si, es cerrado y acotado.

Análisis elemental

En ZF se cumplen:

- $\mathbb{R}$ y todos sus subespacios son metrizables.
- $\mathbb{R}$ y todos sus subespacios tienen bases numerables.
- $\mathbb{R}$ es separable.
- Un subespacio de $\mathbb{R}$ es conexo si, y solo si, es un intervalo.
- Un subespacio de $\mathbb{R}$ es compacto si, y solo si, es cerrado y acotado.
- Todo conjunto infinito y acotado de $\mathbb{R}$ tiene un punto de acumulación en $\mathbb{R}$.

Análisis elemental

En ZF se cumplen:

- $\mathbb{R}$ y todos sus subespacios son metrizables.
- $\mathbb{R}$ y todos sus subespacios tienen bases numerables.
- $\mathbb{R}$ es separable.
- Un subespacio de $\mathbb{R}$ es conexo si, y solo si, es un intervalo.
- Un subespacio de $\mathbb{R}$ es compacto si, y solo si, es cerrado y acotado.
- Todo conjunto infinito y acotado de $\mathbb{R}$ tiene un punto de acumulación en $\mathbb{R}$.
- Una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua si, y solo si, es secuencialmente continua.

Análisis elemental

En ZF se cumplen:

- $\mathbb{R}$ y todos sus subespacios son metrizables.
- $\mathbb{R}$ y todos sus subespacios tienen bases numerables.
- $\mathbb{R}$ es separable.
- Un subespacio de $\mathbb{R}$ es conexo si, y solo si, es un intervalo.
- Un subespacio de $\mathbb{R}$ es compacto si, y solo si, es cerrado y acotado.
- Todo conjunto infinito y acotado de $\mathbb{R}$ tiene un punto de acumulación en $\mathbb{R}$.
- Una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua si, y solo si, es secuencialmente continua.
- Una función $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua si, y solo si, es uniformemente continua.

Análisis elemental

Sin embargo, en ZF puede ocurrir:

Análisis elemental

Sin embargo, en ZF puede ocurrir:

- $\mathbb{R}$ no es Fréchet-Urysohn.

Existe un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ y un punto $a \in \bar{A}$ de modo que no existe ninguna sucesión contenida en A que converja al punto a.

Análisis elemental

Sin embargo, en ZF puede ocurrir:

- $\mathbb{R}$ no es Fréchet-Urysohn.
- $\mathbb{R}$ no es secuencial.

Existe un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ tal que para cualquier sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ convergente a cierto $x \in \mathbb{R}$ se cumple que $x \in A$, pero de modo que A no es cerrado.

Análisis elemental

Sin embargo, en ZF puede ocurrir:

- $\mathbb{R}$ no es Fréchet-Urysohn.
- $\mathbb{R}$ no es secuencial.
- $\mathbb{R}$ no es Lindelöf.

Un espacio topológico X es Lindelöf si todo cubrimiento abierto de X tiene un subcubrimiento numerable.

Análisis elemental

Sin embargo, en ZF puede ocurrir:

- $\mathbb{R}$ no es Fréchet-Urysohn.
- $\mathbb{R}$ no es secuencial.
- $\mathbb{R}$ no es Lindelöf.
- Existen subespacios de $\mathbb{R}$ no separables.

Análisis elemental

Sin embargo, en ZF puede ocurrir:

- $\mathbb{R}$ no es Fréchet-Urysohn.
- $\mathbb{R}$ no es secuencial.
- $\mathbb{R}$ no es Lindelöf.
- Existen subespacios de $\mathbb{R}$ no separables.
- Existen subespacios completos y no cerrados.

Análisis elemental

Sin embargo, en ZF puede ocurrir:

- $\mathbb{R}$ no es Fréchet-Urysohn.
- $\mathbb{R}$ no es secuencial.
- $\mathbb{R}$ no es Lindelöf.
- Existen subespacios de $\mathbb{R}$ no separables.
- Existen subespacios completos y no cerrados.
- Existen subespacios secuencialmente compactos y no compactos.

Análisis elemental

Sin embargo, en ZF puede ocurrir:

- $\mathbb{R}$ no es Fréchet-Urysohn.
- $\mathbb{R}$ no es secuencial.
- $\mathbb{R}$ no es Lindelöf.
- Existen subespacios de $\mathbb{R}$ no separables.
- Existen subespacios completos y no cerrados.
- Existen subespacios secuencialmente compactos y no compactos.
- Existen funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ secuencialmente continuas en un punto x, pero no continuas en x.

Análisis elemental

Sin embargo, en ZF puede ocurrir:

- $\mathbb{R}$ no es Fréchet-Urysohn.
- $\mathbb{R}$ no es secuencial.
- $\mathbb{R}$ no es Lindelöf.
- Existen subespacios de $\mathbb{R}$ no separables.
- Existen subespacios completos y no cerrados.
- Existen subespacios secuencialmente compactos y no compactos.
- Existen funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ secuencialmente continuas en un punto x, pero no continuas en x.
- Existen funciones $f : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ secuencialmente continuas, pero no continuas.

Análisis elemental

Basta considerar el axioma AEN($\mathbb{R}$) para solucionar todos estos "desastres" y, de hecho, en ZF son equivalentes:

Análisis elemental

Basta considerar el axioma AEN($\mathbb{R}$) para solucionar todos estos "desastres" y, de hecho, en ZF son equivalentes:

- AEN($\mathbb{R}$)
- $\mathbb{R}$ es Fréchet-Urysohn.
- $\mathbb{R}$ es Lindelöf.
- Todo subespacios de $\mathbb{R}$ es separable.
- Una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en un punto x si, y solo si, es secuencialmente continua en x.
- Para cualquier subconjunto $X \subset \mathbb{R}$, una función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua si, y solo si, es secuencialmente continua.

El resto de puntos son equivalentes en ZF al axioma AEN($c\mathbb{R}$), el axioma de elección numerable para familias de subespacios completos (no vacíos) de $\mathbb{R}$. Es decir, son equivalentes:

Análisis elemental

El resto de puntos son equivalentes en ZF al axioma AEN($c\mathbb{R}$), el axioma de elección numerable para familias de subespacios completos (no vacíos) de $\mathbb{R}$. Es decir, son equivalentes:

- AEN($c\mathbb{R}$)
- $\mathbb{R}$ es secuencial.
- Todos subespacio completo de $\mathbb{R}$ es cerrado.
- Todo subespacio secuencialmente compacto de $\mathbb{R}$ es compacto.
- AE($c\mathbb{R}$).

Índice

1 ¿Qué es el axioma de elección?

2 Afirmaciones equivalentes al axioma de elección

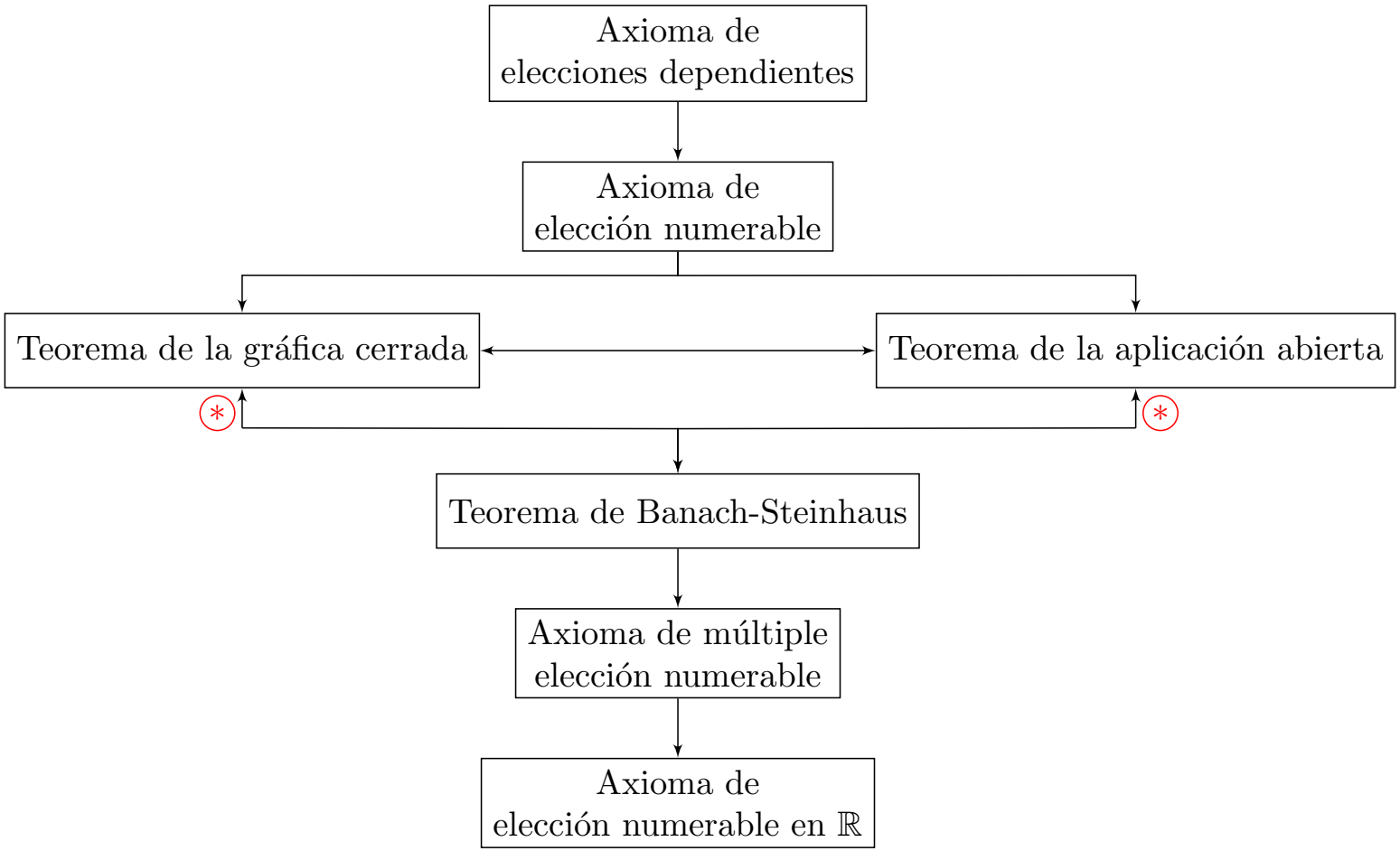
3 Formas débiles del axioma de elección

4 Elección en análisis elemental

5 Elección en análisis funcional

6 Referencias y *spam*

Banach-Steinhaus, aplicación abierta y gráfica cerrada



⊛ Pendiente de verificación: Ver aquí y aquí.

Hahn-Banach

- Es equivalente a:

Hahn-Banach

- Es equivalente a:
  - La bola dual de un esp. normado es w^*-cuasicompacta.

Hahn-Banach

- Es equivalente a:
  - La bola dual de un esp. normado es w^*-cuasicompacta.
  - Toda álgebra de Boole admite una medida no trivial.

Hahn-Banach

- Es equivalente a:
  - La bola dual de un esp. normado es w^*-cuasicompacta.
  - Toda álgebra de Boole admite una medida no trivial.
- El teorema de los ultrafiltros implica HB, pero es independiente de este: Existe un modelo de ZF en el que se cumple HB, pero no se cumplen TU ni KM.

Hahn-Banach

- Es equivalente a:
  - La bola dual de un esp. normado es w^*-cuasicompacta.
  - Toda álgebra de Boole admite una medida no trivial.
- El teorema de los ultrafiltros implica HB, pero es independiente de este: Existe un modelo de ZF en el que se cumple HB, pero no se cumplen TU ni KM.
- HB es independiente de DC y viceversa.

Hahn-Banach

- Es equivalente a:
  - La bola dual de un esp. normado es w^*-cuasicompacta.
  - Toda álgebra de Boole admite una medida no trivial.
- El teorema de los ultrafiltros implica HB, pero es independiente de este: Existe un modelo de ZF en el que se cumple HB, pero no se cumplen TU ni KM.
- HB es independiente de DC y viceversa.
- HB + Krein-Millman para conjuntos convexos cuasicompactos es equivalente al axioma de elección.

Hahn-Banach

- Es equivalente a:
  - La bola dual de un esp. normado es w^*-cuasicompacta.
  - Toda álgebra de Boole admite una medida no trivial.
- El teorema de los ultrafiltros implica HB, pero es independiente de este: Existe un modelo de ZF en el que se cumple HB, pero no se cumplen TU ni KM.
- HB es independiente de DC y viceversa.
- HB + Krein-Millman para conjuntos convexos cuasicompactos es equivalente al axioma de elección.
- HB + KM $\stackrel{?}{\Rightarrow}$ AE

Alaoglu-Bourbaki

El teorema de Alaoglu-Bourbaki es equivalente al teorema de los ultrafiltros.

Alaoglu-Bourbaki

El teorema de Alaoglu-Bourbaki es equivalente al teorema de los ultrafiltros.
Son equivalentes (en ZF):

Alaoglu-Bourbaki

El teorema de Alaoglu-Bourbaki es equivalente al teorema de los ultrafiltros.
Son equivalentes (en ZF):

- El axioma de elección.

Alaoglu-Bourbaki

El teorema de Alaoglu-Bourbaki es equivalente al teorema de los ultrafiltros.
Son equivalentes (en ZF):

- El axioma de elección.
- La bola unidad del dual de cualquier espacio normado tiene un punto extremo.

Alaoglu-Bourbaki

El teorema de Alaoglu-Bourbaki es equivalente al teorema de los ultrafiltros.
Son equivalentes (en ZF):

- El axioma de elección.
- La bola unidad del dual de cualquier espacio normado tiene un punto extremo.
- Alaoglu-Bourbaki + Krein-Millman.

Alaoglu-Bourbaki

El teorema de Alaoglu-Bourbaki es equivalente al teorema de los ultrafiltros.
Son equivalentes (en ZF):

- El axioma de elección.
- La bola unidad del dual de cualquier espacio normado tiene un punto extremo.
- Alaoglu-Bourbaki + Krein-Millman.
- Alaoglu-Bourbaki + Krein-Millman para conjuntos convexos cuasicompactos.

Krein-Millman

- KM $\overset{?}{\Rightarrow}$ KMC

Krein-Millman

- KM $\stackrel{?}{\Rightarrow}$ KMC
- KM $\stackrel{?}{\Rightarrow}$ AE

Krein-Millman

- KM $\stackrel{?}{\Rightarrow}$ KMC
- KM $\stackrel{?}{\Rightarrow}$ AE
- KM $\stackrel{?}{\Rightarrow}$ TU

Krein-Millman

- KM $\stackrel{?}{\Rightarrow}$ KMC
- KM $\stackrel{?}{\Rightarrow}$ AE
- KM $\stackrel{?}{\Rightarrow}$ TU
- TU $\not\Rightarrow$ KM

Índice

1 ¿Qué es el axioma de elección?

2 Afirmaciones equivalentes al axioma de elección

3 Formas débiles del axioma de elección

4 Elección en análisis elemental

5 Elección en análisis funcional

6 Referencias y *spam*


BANACH
&
TARSKI
MACHINE



GALLETAS ℓ_2^p

