

MENOS POR MENOS ES MÁS

ESTEBAN MARTÍNEZ VAÑÓ

14 de marzo de 2026

ÍNDICE

1. Robin Hood y el cambio de signo 3
2. Más explicaciones..... 3
3. No puede ser de otra forma 5

PREFACIO

No tenía intención de publicar nada nuevo hasta dentro de un tiempo. Además, como soy muy “progre” y me encanta la diversidad, mi intención es que aquí también hayan entradas con una temática más avanzada, no solo los temas básicos que he estado subiendo. Ese es (y sigue siendo) el plan y en esa línea estaba planeada la siguiente entrada de *Elección o barbarie*. Sin embargo, durante semanas he visto constantemente el siguiente cartel cada vez que he salido de casa:



Aparte de ser la primera vez que realmente me he sentido viejo, el contenido en sí del cartel me era bastante indiferente, pero la fecha resonaba una y otra vez en mi

cabeza, y no fue hasta el sábado pasado que caí en la cuenta de que no es una fiesta cualquiera, ¡están celebrando el **Día Internacional de las Matemáticas**!

Bromas aparte, me recordaron este día y me dieron ganas de inaugurar lo que espero que sea una tradición por estos lares:



Évariste Galois practicando su puntería.

Por desgracia, con tan poco tiempo no he podido hacer nada relacionado con la **temática** planteada para este año, *Las matemáticas y la esperanza*, pero en años venideros estaré más preparado. Aun así, tengo la **esperanza** de que esta entrada aporte luz a una cuestión **matemática** que tortura a jóvenes y adultos por igual, ¿por qué menos por menos es más?

Creo que no me equivocaré al afirmar que todos, en algún momento de nuestra educación, hemos escuchado la frasecita de “menos por menos es más”, **¿pero por qué es así?**

Veámoslo con un cuento.

1 ROBIN HOOD Y EL CAMBIO DE SIGNO

Érase una vez un banco en Nottingham que ofrecía, en sus propias palabras, tu cuenta soñada. Por cada libra que tuvieras a final de año en una de estas cuentas, ellos te daban 4 libras. Así se anunciaban y así la gente abría sus cuentas con ellos sin leer la letra pequeña: si a final de año tu cuenta está en números rojos, entonces te quitaremos 4 libras por cada una que nos debas. Tras un duro invierno llegó el día de fin de año y el príncipe John ganó una fortuna. Tenía 300 libras en su cuenta y, como el banco le dio 4 libras por cada una de estas 300, en total le dieron, de muy buena gana, $300 \times 4 = 1200$ libras. Sin embargo, la gente en Nottingham era muy pobre, y a menudo terminaba el año con deudas de 300 libras y, como el banco les quitaba 4 libras por cada una de estas 300 que les debían, en total les quitaban $300 \times 4 = 1200$ libras.

Para automatizar el proceso, el sistema informático del banco estaba programado para multiplicar el dinero en una cuenta por ese fatídico 4, pues como hemos visto este producto es precisamente la cantidad que el banco debía dar o quitar. Además, para que todo fuera completamente automático habían representado las deudas con números negativos, con lo que si les debías 300 libras, en su sistema se reflejaba como -300 . Esto les obligó a que en su programa informático el producto $(-300) \times 4$ diera como resultado -1200 .

Cansado de esta situación, el gran matemático Robin Hood ideó un plan. Durante la noche de Año Nuevo, al amparo de la más negra oscuridad, consiguió infiltrarse en las oficinas centrales del banco e hizo algo aparentemente insignificante, algo que el banco no notaría en todo el año: cambió el maldito 4 por un -4 .

Todo un año pasó, durante el cual el príncipe John siguió enriqueciéndose a medida que crecían las deudas de la gente. El reloj marcó las doce y el año acabó. El sistema intentó calcular de forma automática cuanto dinero dar o quitar a la gente, pero se encontró con productos de la forma $900 \times (-4)$, para la cuenta del príncipe, y $(-500) \times (-4)$, para la mayoría de la gente. Al no estar programado para calcularlos el sistema dio error y, como el banco había despedido a todos sus informáticos, una inteligencia artificial llamada *ChatPGT* se encargó de solucionarlo. Siguiendo la lógica del propio banco concluyó que por cada libra que alguien tuviera, ellos debían darle -4 libras, es decir, quitarle 4 libras, mientras que si la cuenta estaba en números rojos, entonces debían quitarle -4 libras, es decir, darle 4 libras, por cada una que les debieran.

Ante esta lógica aplastante, la única opción posible que tuvo fue definir $900 \times (-4) = -3600$ y $(-500) \times (-4) = 2000$, con lo que tanto el príncipe John, como el banco se fueron a la bancarota y la gente pudo vivir felizmente desde entonces.

Moraleja: Nunca te fíes de un banco y estudia muchas matemáticas para convertirte en Robin Hood.

2 MÁS EXPLICACIONES

Aunque el ejemplo que muestra el cuento anterior parece bastante convincente, veamos algunos más para terminar de convencernos.

Grabando corredores

Si grabamos a una persona corriendo hacia delante (+) y reproducimos el vídeo hacia delante (+), entonces la vemos correr hacia delante, luego obtenemos que $(+) \times (+) = (+)$. Si ahora reproducimos el mismo vídeo hacia atrás (−), la persona parece correr hacia atrás (−), con lo que $(+) \times (-) = (-)$.

Por otra parte, si grabamos a una persona corriendo hacia atrás y reproducimos el vídeo hacia delante, entonces la vemos correr hacia atrás, con lo que $(-) \times (+) = (-)$; mientras que si reproducimos el vídeo hacia atrás, entonces la persona parece correr hacia delante y con ello $(-) \times (-) = (+)$.

Dando saltitos

Juan y Ana han inventado un juego en el que por cada salto que da Juan, Ana debe dar 3. Pero además, Juan puede saltar hacia la izquierda o hacia la derecha y Ana puede elegir si saltar en la misma dirección o en la contraria. Así, si Juan decide dar, por ejemplo, 4 saltos, sabemos que Ana dará $4 \times 3 = 12$ saltos, pero en función de la dirección de Juan y la elección de Ana, dará estos saltos en una u otra dirección.

Como son un poco vagos, les gustaría saber cuál es el caso de manera inmediata, sin tener que pensar nada, y para ello se les ha ocurrido utilizar números negativos para modelizar el juego: los saltos hacia la derecha son positivos y hacia la izquierda negativos, mientras que si Ana elige saltar en la misma dirección que Juan diremos que da 3 saltos por cada salto de Juan, pero si lo hace en la dirección contraria diremos que da −3 saltos por cada salto de Juan.

Solo les falta entonces dar un valor concreto a los productos 4×3 , $4 \times (-3)$, $(-4) \times 3$ y $(-4) \times (-3)$ que les dé como resultado el número de saltos de Ana y su dirección:

- Si Juan da 4 saltos hacia la derecha (4 saltos en su modelización) y Ana salta en la misma dirección (3 saltos por cada salto de Juan), entonces Ana da 12 saltos hacia la derecha (12 saltos en su modelización), luego establecen que $4 \times 3 = 12$.
- Si Juan da 4 saltos hacia la derecha (4 saltos en su modelización) y Ana salta en la dirección contraria (−3 saltos por cada salto de Juan), sabemos que dará 12 saltos hacia la izquierda (−12 saltos en su modelización), luego establecen que $4 \times (-3) = -12$.
- Si Juan da 4 saltos hacia la izquierda (−4 saltos en su modelización) y Ana salta en la misma dirección (3 saltos por cada salto de Juan), entonces Ana da 12 saltos hacia la izquierda (−12 saltos en su modelización), luego establecen que $(-4) \times 3 = -12$.
- Si Juan da 4 saltos hacia la izquierda (−4 saltos en su modelización) y Ana salta en la dirección contraria (−3 saltos por cada salto de Juan), sabemos que dará 12 saltos hacia la derecha (12 saltos en su modelización), luego establecen que $(-4) \times (-3) = 12$.

Siguiendo el patrón

Observando los siguientes productos

$$5 \times 3 = 15$$

$$5 \times 2 = 10$$

$$5 \times 1 = 5$$

parece claro que para pasar de un resultado a otro debemos restar 5, con lo que siguiendo el patrón

$$\begin{aligned}5 \times 0 &= 0 \\5 \times -1 &= -5 \\5 \times -2 &= -10\end{aligned}$$

Por tanto, obtenemos que $(+) \times (-) = (-)$.

Con este descubrimiento tenemos un nuevo patrón

$$\begin{aligned}3 \times -5 &= -15 \\2 \times -5 &= -10 \\1 \times -5 &= -5\end{aligned}$$

donde ahora para pasar de un resultado a otro debemos sumar 5, con lo que continuándolo

$$\begin{aligned}0 \times -5 &= 0 \\-1 \times -5 &= 5 \\-2 \times -5 &= 10\end{aligned}$$

Por tanto, concluimos que $(-) \times (-) = (+)$.

Una pequeña broma

Tener un enemigo es negativo, así como lo es hacerse daño (salvo que seas masoquista). Sin embargo, que tu enemigo se haga daño es algo positivo.

3 NO PUEDE SER DE OTRA FORMA

Hemos visto ya varias explicaciones heurísticas de por qué los números positivos y negativos tienen que multiplicarse como nos enseñaron en la escuela, pero resulta que si uno quiere que estos números tengan buenas propiedades, entonces **no puede ser de otra manera**.

Propiedades maravillosas

Los números naturales, los de contar de toda la vida, tienen una serie de propiedades maravillosas que usamos continuamente, pero que apreciamos muy poco.

Comencemos con la **propiedad asociativa**¹:

(A) Dados tres números naturales n, m, p , se cumple que

$$\begin{aligned}n + (m + p) &= (n + m) + p, \\n \cdot (m \cdot p) &= (n \cdot m) \cdot p.\end{aligned}$$

Aunque parezca una trivialidad, sin esta propiedad no tendría sentido escribir, por ejemplo, $1 + 2 + 3$, porque no podríamos saber si nos referimos a $1 + (2 + 3)$ o a $(1 + 2) + 3$. Es la asociatividad la que nos dice que ambas expresiones son iguales y nos libra de la ambigüedad.

¹ En esta sección representaremos el producto con el símbolo “ $\cdot$ ”, en lugar de “ $\times$ ”. Esta es la notación habitual en matemáticas.

Igual de importante es la existencia de un **elemento neutro**:

(EN) Dado un número natural n , se cumple que² $n + 0 = 0 + n = n$ y que $n \cdot 1 = 1 \cdot n = n$.

Esta propiedad nos dice que el cero es el elemento neutro para la suma, es decir, que al sumárselo a cualquier número nos quedamos igual, y que el uno es el elemento neutro para el producto. Además, observemos que son únicos:

Si existiera otro número natural $0'$ que cumpliera que $n + 0' = 0' + n = n$ para cualquier natural, entonces sustituyendo n por 0 obtenemos que $0 = 0 + 0'$, pero ya sabemos que $0 + 0' = 0'$, luego $0 = 0'$.

Teniendo en cuenta la gran importancia que juegan el cero y el uno en la aritmética, creo que la relevancia de la existencia de elemento neutro está de sobra justificada.

Una última propiedad muy importante es la **propiedad distributiva**:

(D) Dados tres números naturales n, m, p , se cumple que

$$\begin{aligned}n \cdot (m + p) &= n \cdot m + n \cdot p, \\(m + p) \cdot n &= m \cdot n + p \cdot n.\end{aligned}$$

Esta propiedad, que resulta bastante obvia a partir de la definición del producto, es crucial a la hora de simplificar cálculos aritméticos, pero más aún, establece una relación entre la suma y el producto. En el caso de los números naturales esto parece innecesario, pues el producto se define a partir de la suma, pero en estructuras más complejas es imprescindible establecer esta relación si uno quiere que sus operaciones no sean independientes la una de la otra.

Todo lo dicho justifica el deseo de que nuestros números negativos también cumplan estas propiedades, pero más básico aún, ¿qué entendemos por números negativos? Normalmente, decimos que el -1 , el -7 o el -15 son negativos porque son menores que cero, pero esto implica un orden y si nos fijamos en todos los ejemplos que hemos dado anteriormente, en ningún momento le dimos importancia a esto. Lo que realmente teníamos en mente al hablar de, por ejemplo, el -7 es que es el **opuesto** del 7 , es decir, que $7 + (-7) = 0$.

Este es realmente el sentido en el que estamos entendiendo los “números negativos” en esta entrada, por lo que con esta idea en mente definimos:

(EO) Dado un número n , diremos que m es su **opuesto** si $n + m = m + n = 0$.

Observemos que si un número tiene opuesto, entonces es único:

Si n tuviera dos opuestos, digamos m y p , entonces tenemos que³

$$m = m + 0 = m + (n + p) = (m + n) + p = 0 + p = p,$$

luego realmente m y p son iguales.

Esta unicidad nos permite denotar el opuesto de un número n como $-n$ sin que exista ninguna ambigüedad⁴. Además, observemos que el opuesto de $-n$ es claramente n , con lo que $-(-n) = n$.

Si añadimos a los números naturales todos sus opuestos obtenemos el conjunto de los números enteros (los que muchas veces describimos como los positivos junto a

² Tal vez a algún lector le sorprenda que matemos que $n + 0 = 0 + n$ teniendo en cuenta que los números naturales también tienen la **propiedad conmutativa**, es decir, que para cualesquiera naturales n, m se cumple que $n + m = m + n$. La razón de hacer este matiz es que, aunque todas las propiedades las vamos a enunciar para los números naturales o enteros, realmente son propiedades más abstractas que pueden definirse en otros contextos donde no se cumple la propiedad conmutativa y, en dichos contextos, es necesario especificar que sí debe cumplirse que $n + 0 = 0 + n$. El mismo comentario se aplica para el resto de propiedades.

³ ¡La propiedad asociativa es imprescindible en la demostración!

⁴ Para no recargar la notación escribiremos $m - n$ para referirnos a $m + (-n)$.

los negativos) y, como ya hemos justificado, es completamente natural exigir que su suma y producto sigan cumpliendo todas estas propiedades, pues de no ser así perderíamos mucho más de lo que ganaríamos.

Teoremas, no caprichos

Que los números enteros satisfagan todas las propiedades maravillosas que hemos visto es precisamente lo que fuerza a que “menos por menos sea más”, pero para verlo necesitamos probar otra importante consecuencia de la propiedad distributiva: el cero es un “sumidero” para el producto, es decir, cualquier número multiplicado por cero es cero.

Teorema 3.1. Si m es un número entero, entonces $m \cdot 0 = 0 \cdot m = 0$.

Demostración. Observemos que

$$m \cdot 0 \stackrel{(EN)}{=} m \cdot (0 + 0) \stackrel{(D)}{=} m \cdot 0 + m \cdot 0, \quad (1)$$

luego

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{(EO)}{=} (m \cdot 0) - (m \cdot 0) \stackrel{(1)}{=} (m \cdot 0 + m \cdot 0) - (m \cdot 0) \stackrel{(A)}{=} (m \cdot 0) + ((m \cdot 0) - (m \cdot 0)) \\ &\stackrel{(EO)}{=} m \cdot 0 + 0 \stackrel{(EN)}{=} m \cdot 0. \end{aligned}$$

Es decir, $m \cdot 0 = 0$ como queríamos ver. De manera análoga se prueba que $0 \cdot m = 0$ (ánimales a hacerlo :). ■

Ya estamos listos para ver que las famosas “reglas de los signos”, son realmente un teorema, una consecuencia lógica de las propiedades del producto y la suma, y no un mero capricho.

Teorema 3.2 (Reglas de los signos). Sean n, m números enteros. Se cumplen:

- (i) $(-n) \cdot m = -(n \cdot m)$.
- (ii) $n \cdot (-m) = -(n \cdot m)$.
- (iii) $(-n) \cdot (-m) = n \cdot m$.

Demostración.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad (-n) \cdot m &\stackrel{(EN)}{=} (-n) \cdot m + 0 \stackrel{(EO)}{=} (-n) \cdot m + [n \cdot m - (n \cdot m)] \stackrel{(A)}{=} \\ &[(-n) \cdot m + n \cdot m] - (n \cdot m) \stackrel{(D)}{=} [((-n) + n) \cdot m] - (n \cdot m) \stackrel{(EO)}{=} \\ &(0 \cdot m) - (n \cdot m) \stackrel{\text{Teo. 3.1}}{=} 0 - (n \cdot m) \stackrel{(EN)}{=} -(n \cdot m) \\ \text{(ii)} \quad n \cdot (-m) &\stackrel{(EN)}{=} n \cdot (-m) + 0 \stackrel{(EO)}{=} n \cdot (-m) + [n \cdot m - (n \cdot m)] \stackrel{(A)}{=} \\ &(n \cdot (-m) + n \cdot m) - (n \cdot m) \stackrel{(D)}{=} [n \cdot ((-m) + m)] - (n \cdot m) \stackrel{(EO)}{=} \\ &(n \cdot 0) - (n \cdot m) \stackrel{\text{Teo. 3.1}}{=} 0 - (n \cdot m) \stackrel{(EN)}{=} -(n \cdot m) \\ \text{(iii)} \quad (-n) \cdot (-m) &\stackrel{(EN)}{=} (-n) \cdot (-m) + 0 \stackrel{\text{Teo. 3.1}}{=} (-n) \cdot (-m) + n \cdot 0 \stackrel{(EN)}{=} \\ &(-n) \cdot (-m) + n \cdot (-m + m) \stackrel{(D)}{=} (-n) \cdot (-m) + (n \cdot (-m) + n \cdot m) \stackrel{(A)}{=} \\ &[(-n) \cdot (-m) + n \cdot (-m)] + n \cdot m \stackrel{(D)}{=} [((-n) + n) \cdot (-m)] + n \cdot m \stackrel{(EN)}{=} \\ &[0 \cdot (-m)] + n \cdot m \stackrel{\text{Teo. 3.1}}{=} 0 + n \cdot m \stackrel{(EN)}{=} n \cdot m \end{aligned}$$

Esto completa la prueba de los tres casos. ■

Así que ya sabéis, si alguna vez alguien os pregunta por qué “menos por menos es más”, aquí tenéis todo un arsenal con el que atacar ;p