

# Radio grande versus diámetro pequeño

Esteban Martínez Vañó

Universidad de Granada  
Departamento de Análisis Matemático

31 de octubre de 2025

# Diámetro pequeño

## Definición: Propiedades de diámetro pequeño

Un espacio de Banach  $X$ :

## Definición: Propiedades de diámetro pequeño

Un espacio de Banach  $X$ :

- Tiene la **propiedad de Radon-Nikodym** (RNP) si se cumple el “teorema de Radon-Nikodym para medidas en  $X$ ”.

## Definición: Propiedades de diámetro pequeño

Un espacio de Banach  $X$ :

- Tiene la **propiedad de Radon-Nikodym** (RNP) si todo subconjunto cerrado, convexo y no vacío de  $B_X$  tiene slices de diámetro arbitrariamente pequeño.

$$S(C, x^*, \alpha) = \{x \in C : x^*(x) > \sup x^*(C) - \alpha\}$$

## Definición: Propiedades de diámetro pequeño

Un espacio de Banach  $X$ :

- Tiene la **propiedad de Radon-Nikodym** (RNP) si todo subconjunto cerrado, convexo y no vacío de  $B_X$  tiene slices de diámetro arbitrariamente pequeño.

$$S(C, x^*, \alpha) = \{x \in C : x^*(x) > \sup x^*(C) - \alpha\}$$

## Definición: Propiedades de diámetro pequeño

Un espacio de Banach  $X$ :

- Tiene la **propiedad de Radon-Nikodym** (RNP) si todo subconjunto cerrado, convexo y no vacío de  $B_X$  tiene slices de diámetro arbitrariamente pequeño.
- Tiene la **propiedad del punto de continuidad convexa** (CPCP) si todo subconjunto cerrado, convexo y no vacío de  $B_X$  tiene algún punto de débil-norma continuidad.

$$S(C, x^*, \alpha) = \{x \in C : x^*(x) > \sup x^*(C) - \alpha\}$$

## Definición: Propiedades de diámetro pequeño

Un espacio de Banach  $X$ :

- Tiene la **propiedad de Radon-Nikodym** (RNP) si todo subconjunto cerrado, convexo y no vacío de  $B_X$  tiene slices de diámetro arbitrariamente pequeño.
- Tiene la **propiedad del punto de continuidad convexa** (CPCP) si todo subconjunto cerrado, convexo y no vacío de  $B_X$  tiene abiertos débiles relativos de diámetro arbitrariamente pequeño.

$$S(C, x^*, \alpha) = \{x \in C : x^*(x) > \sup x^*(C) - \alpha\}$$

## Definición: Propiedades de diámetro pequeño

Un espacio de Banach  $X$ :

- Tiene la **propiedad de Radon-Nikodym** (RNP) si todo subconjunto cerrado, convexo y no vacío de  $B_X$  tiene slices de diámetro arbitrariamente pequeño.
- Tiene la **propiedad del punto de continuidad convexa** (CPCP) si todo subconjunto cerrado, convexo y no vacío de  $B_X$  tiene abiertos débiles relativos de diámetro arbitrariamente pequeño.
- Es **fuertemente regular** (SR) si todo subconjunto cerrado, convexo y no vacío de  $B_X$  tiene combinaciones convexas de slices de diámetro arbitrariamente pequeño.

## Definición: Propiedades de diámetro grande

Un espacio de Banach  $X$ :

- Tiene la **propiedad de Radon-Nikodym** (RNP) si todo subconjunto cerrado, convexo y no vacío de  $B_X$  tiene slices de diámetro arbitrariamente pequeño.
- Tiene la **propiedad del punto de continuidad convexa** (CPCP) si todo subconjunto cerrado, convexo y no vacío de  $B_X$  tiene abiertos débiles relativos de diámetro arbitrariamente pequeño.
- Es **fuertemente regular** (SR) si todo subconjunto cerrado, convexo y no vacío de  $B_X$  tiene combinaciones convexas de slices de diámetro arbitrariamente pequeño.

## Definición: Propiedades de diámetro grande

Un espacio de Banach  $X$ :

- Tiene la **propiedad de diámetro 2 para slices** (LD2P) si todo slice de  $B_X$  tiene diámetro 2.
- Tiene la **propiedad del punto de continuidad convexa** (CPCP) si todo subconjunto cerrado, convexo y no vacío de  $B_X$  tiene abiertos débiles relativos de diámetro arbitrariamente pequeño.
- Es **fuertemente regular** (SR) si todo subconjunto cerrado, convexo y no vacío de  $B_X$  tiene combinaciones convexas de slices de diámetro arbitrariamente pequeño.

## Definición: Propiedades de diámetro grande

Un espacio de Banach  $X$ :

- Tiene la **propiedad de diámetro 2 para slices** (LD2P) si todo slice de  $B_X$  tiene diámetro 2.
- Tiene la **propiedad de diámetro 2** (D2P) si todo abierto débil relativo de  $B_X$  tiene diámetro 2.
- Es **fuertemente regular** (SR) si todo subconjunto cerrado, convexo y no vacío de  $B_X$  tiene combinaciones convexas de slices de diámetro arbitrariamente pequeño.

## Definición: Propiedades de diámetro grande

Un espacio de Banach  $X$ :

- Tiene la **propiedad de diámetro 2 para slices** (LD2P) si todo slice de  $B_X$  tiene diámetro 2.
- Tiene la **propiedad de diámetro 2** (D2P) si todo abierto débil relativo de  $B_X$  tiene diámetro 2.
- Tiene la **propiedad fuerte de diámetro 2** (SD2P) si toda combinación convexa de slices de  $B_X$  tiene diámetro 2.

# Diámetro grande

## Teorema: [GLPZ15b, Theorem 2.4]

Sea  $X$  un espacio de Banach que contiene una copia isomorfa de  $c_0$ . Entonces existe una renormación de  $X$  tal que:

- $X$ , con la nueva norma, tiene la LD2P.
- Existen abiertos débiles relativos en la nueva bola de diámetro arbitrariamente pequeño para la nueva norma.

# Diámetro grande

## Teorema: [GLPZ15b, Theorem 2.4]

Sea  $X$  un espacio de Banach que contiene una copia isomorfa de  $c_0$ . Entonces existe una renormación de  $X$  tal que:

- $X$ , con la nueva norma, tiene la LD2P.
- Existen abiertos débiles relativos en la nueva bola de diámetro arbitrariamente pequeño para la nueva norma.

## Teorema: [GLPZ15a, Theorem 2.5]

Sea  $X$  un espacio de Banach que contiene una copia isomorfa de  $c_0$ . Entonces existe una renormación de  $X$  tal que:

- $X$ , con la nueva norma, tiene la D2P.
- Existen combinaciones convexas de slices en la nueva bola de diámetro arbitrariamente pequeño para la nueva norma.

## Radio grande

Sea  $X$  un espacio normado y  $C \subset X$  acotado. Se define el **radio** de  $C$  como

$$r(C) = \inf \{t > 0 : \exists x \in X C \subset x + tB_X\}$$

Sea  $X$  un espacio normado y  $C \subset X$  acotado. Se define el **radio** de  $C$  como

$$r(C) = \inf \{t > 0 : \exists x \in X C \subset x + tB_X\}$$

Sea  $X$  un espacio normado y  $C \subset X$  acotado. Se define el **radio** de  $C$  como

$$r(C) = \inf \{t > 0 : \exists x \in X C \subset x + tB_X\}$$

## Definición: $r$ -BSP [Iva06]

Un espacio de Banach  $X$  tiene la **propiedad de slices de radio grande** ( $r$ -BSP) si todo slice de  $B_X$  tiene radio 1.

Sea  $X$  un espacio normado y  $C \subset X$  acotado. Se define el **radio** de  $C$  como

$$r(C) = \inf \{t > 0 : \exists x \in X C \subset x + tB_X\}$$

## Definición: $r$ -BSP [Iva06]

Un espacio de Banach  $X$  tiene la **propiedad de slices de radio grande** ( $r$ -BSP) si todo slice de  $B_X$  tiene radio 1.

## Teorema: [Iva06, Theorem 2]

Un espacio de Banach  $X$  no tiene la RNP si, y solo si, para cada  $\varepsilon > 0$  existe una renormación en la que cada slice de la nueva bola tiene radio mayor que  $1 - \varepsilon$ .

## Teorema: [HLL<sup>+</sup>21, Theorem 3.7]

El espacio  $X = (JT_\infty)_*$  tiene la  $r$ -BSP, pero el ínfimo de los diámetros de los slices de su bola unidad es  $\sqrt{2}$ .

## Teorema: [HLL<sup>+</sup>21, Theorem 3.7]

El espacio  $X = (JT_\infty)_*$  tiene la  $r$ -BSP, pero el ínfimo de los diámetros de los slices de su bola unidad es  $\sqrt{2}$ .

## Teorema: [RZ23, Theorem 1.1]

Existe un espacio de Banach  $X$  con la  $r$ -BSP, la CPCP y tal que el ínfimo de los diámetros de los slices de su bola unidad es 1.

## Definición: $r$ -BWOP [LPVZ25]

Un espacio de Banach  $X$  tiene la **propiedad de abiertos débiles de radio grande** ( $r$ -BWOP) si todo abierto débil relativo de  $B_X$  tiene radio 1.

## Definición: $r$ -BWOP [LPVZ25]

Un espacio de Banach  $X$  tiene la **propiedad de abiertos débiles de radio grande** ( $r$ -BWOP) si todo abierto débil relativo de  $B_X$  tiene radio 1.

## Teorema: [LPVZ25, Theorem 1.1]

Existe un espacio de Banach  $X$  con la  $r$ -BWOP y tal que

$$\inf \{ \text{diam}(S) : S \subset B_X \text{ es un slice} \} = 1.$$

## Idea general de la demostración

1. Se prueba que para cada  $\varepsilon \in (0, 1)$ , existe una renormación equivalente de  $c_0 \oplus_\infty \mathbb{R}$  que tiene la  $r$ -BWOP y tal que si  $B_\varepsilon$  es la nueva bola unidad, entonces

$$\inf \{ \text{diam}_\varepsilon(S) : S \subset B_\varepsilon \text{ es un slice} \} \leq 1 + \varepsilon.$$

## Idea general de la demostración

1. Se prueba que para cada  $\varepsilon \in (0, 1)$ , existe una renormación equivalente de  $c_0 \oplus_{\infty} \mathbb{R}$  que tiene la  $r$ -BWOP y tal que si  $B_{\varepsilon}$  es la nueva bola unidad, entonces

$$\inf \{ \text{diam}_{\varepsilon}(S) : S \subset B_{\varepsilon} \text{ es un slice} \} \leq 1 + \varepsilon.$$

2. Se prueba que cualquier espacio que contenga a  $c_0$  complementado puede renormarse cumpliendo lo anterior.

## Idea general de la demostración

1. Se prueba que para cada  $\varepsilon \in (0, 1)$ , existe una renormación equivalente de  $c_0 \oplus_{\infty} \mathbb{R}$  que tiene la  $r$ -BWOP y tal que si  $B_{\varepsilon}$  es la nueva bola unidad, entonces

$$\inf \{ \text{diam}_{\varepsilon}(S) : S \subset B_{\varepsilon} \text{ es un slice} \} \leq 1 + \varepsilon.$$

2. Se prueba que cualquier espacio que contenga a  $c_0$  complementado puede renormarse cumpliendo lo anterior.
3. Se prueba que dado cualquier espacio de Banach  $X$  que contenga a  $c_0$  complementado, existe una sucesión  $\{X_n\}$  de espacios isomorfos a  $X$  de modo que  $\ell_1(\mathbb{N}, X_n)$  tiene la  $r$ -BWOP y

$$\inf \{ \text{diam}(S) : S \subset B_{\ell_1(\mathbb{N}, X_n)} \text{ es un slice} \} = 1.$$

# Idea general de la demostración

1. Se prueba que para cada  $\varepsilon \in (0, 1)$ , existe una renormación equivalente de  $c_0 \oplus_{\infty} \mathbb{R}$  que tiene la  $r$ -BWOP y tal que si  $B_{\varepsilon}$  es la nueva bola unidad, entonces

$$\inf \{ \text{diam}_{\varepsilon}(S) : S \subset B_{\varepsilon} \text{ es un slice} \} \leq 1 + \varepsilon.$$

$P_0$ -simplex [AOR06].

Existe un subconjunto  $K_0 \subset c_0$  que cumple:

- $K_0 \subset S_{c_0}$ , es cerrado y convexo.
- Si  $x \in K_0$ , entonces  $x_n \geq 0$  para cada  $n \geq 1$ .
- $\text{diam}(K_0) = 1$
- Existe una sucesión  $\{g_i\}_{i=1}^{\infty} \subset K_0$  con soporte finito tal que

$$K_0 = \overline{\{g_i : i \in \mathbb{N}\}}^w = \overline{\{g_i : i \in \mathbb{N}\}}.$$

- Para cada  $i \in \mathbb{N}$  existe una sucesión estrictamente creciente  $\{m_n\}$  tal que  $g_i + e_{m_n+i} \in K_0$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

# Referencias

