¿TE ESTÁ ENGAÑANDO TU MATEMÁTICO DE CABECERA?

ESTEBAN MARTÍNEZ VAÑÓ

22 de diciembre de 2025

ÍNDICE

PREFACIO

Hace algunas semanas impartí un pequeño seminario divulgativo y al finalizar un chico se acercó a preguntarme si podía explicarle “eso de que los racionales sean numerables”. Me puse a contarle un poco sobre el tema en la pizarra y tras un rato me dijo:

> “Es que yo no me creo eso de que haya tantos números pares como números naturales.”

Me sorprendió bastante el uso del verbo “creer” para referirse a un resultado matemático y, como por ese entonces ya me rondaba por la cabeza la posibilidad de hacer un blog, pensé que podría ser útil escribir una entrada sobre esto aunque sea un tema relativamente trillado en la divulgación matemática.

Así pues, sin más preámbulos, os presento la primera entrada real de *Elección o barbarie*, donde responderemos a la siguiente pregunta:

¿De verdad hay la misma cantidad de números naturales que de números pares o te está engañando tu matemático de cabecera?

1 DE MANZANAS Y LIMONES

Creo que todos estaremos de acuerdo en que tanto el conjunto de los números naturales como el de los números pares es infinito, pero si uno le pregunta a un *muggle* matemático casi con total seguridad le responderá que hay el doble de números naturales que de números pares. Esta respuesta puede parecer razonable porque al considerar solo los números pares estamos eliminando los impares, es decir, uno de cada dos números. Sin embargo, si le preguntáramos a un matemático casi con la misma seguridad nos responderá que hay la misma cantidad de números naturales que de números pares. ¿Qué tipo de broma es esta? ¿Quién tiene razón?

Como el infinito es un concepto tan abrumador que da vértigo solo con pensar en él, vamos a empezar por algo más sencillo. Imaginemos que tenemos dos cestas como las de la siguiente imagen, de modo que en una de ellas hay manzanas y en la otra limones. ¿En cuál de las dos cestas hay más piezas de fruta?

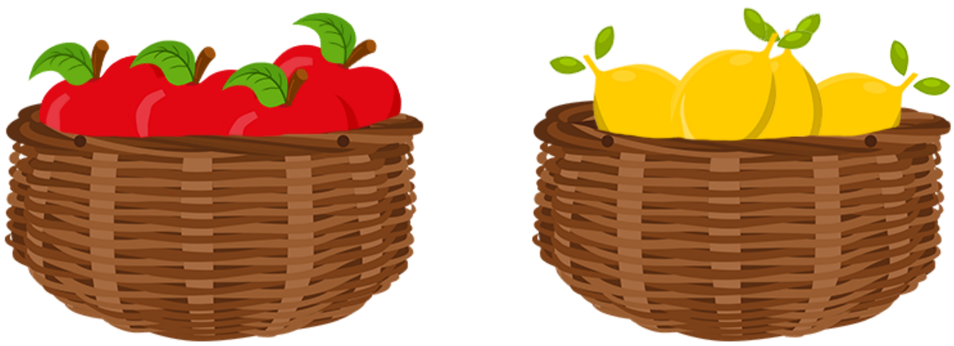


Figura 1: *Bodegón*: Esteban Martínez

Puede que en este punto alguien esté poniendo los ojos en blanco y piense que me he pasado con la "sencillez": basta con contar las manzanas, contar los limones y ver qué número es más grande. Sin embargo, si queremos descubrir si hay o no más números naturales que números pares no vamos a poder contarlos todos, por lo que debemos buscar alguna forma de comparar el número de manzanas y limones sin contar. ¿Se te ocurre alguna idea?

2 ¿SIN CONTAR? SUJÉTAME EL CUBATA

Vamos a resolver el reto anterior, con lo que si quieres seguir pensando en ello, ¡no sigas leyendo!

Lo que podríamos hacer es ir sacando una manzana con la mano izquierda y un limón con la mano derecha de forma consecutiva hasta que alguna de las cestas se quede vacía, lo cual ocurrirá en algún momento (a no ser que alguien nos esté gastando una broma y cada fruta que sacamos la vuelva a poner en su cesta, pero supongamos que no es el caso), y entonces tendremos que:

1. Si la cesta de las manzanas se ha quedado vacía, pero aún quedan limones en su cesta, podemos concluir que hay más limones que manzanas.
2. Si la cesta de los limones se ha quedado vacía, pero aún quedan manzanas en su cesta, podemos concluir que hay más manzanas que limones.
3. Si ambas cestas se han quedado vacías a la vez, podemos concluir que hay la misma cantidad de ambas frutas.

¡Hemos conseguido lo que buscábamos! No sabemos la cantidad exacta de manzanas ni de limones, no las hemos contado, y a pesar de ello el proceso anterior nos permite decidir en qué cesta hay más fruta. Más aún, observemos que el recíproco de cada punto anterior es también cierto. Por ejemplo, si hay más manzanas que limones, entonces claramente al realizar el proceso descrito la cesta de los limones se quedará vacía, pero aún quedarán manzanas en su cesta.

Vamos a intentar estudiar este proceso un poco más a fondo a ver si nos da alguna pista sobre cómo "atacar" nuestro problema original. Observemos que el proceso descrito nos permite emparejar las manzanas con los limones, es decir, nos permite asignarle a cada manzana un único limón de la siguiente forma:

- A cada manzana que sacamos con la mano izquierda le asignamos el limón que sacamos con la derecha.
- Si en algún momento nos quedamos sin limones asignamos a cada manzana restante el último limón que hemos sacado.

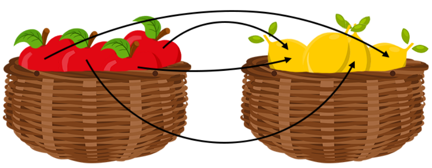
En este contexto, los tres posibles escenarios que hemos descrito más arriba se traducen en que la asignación que acabamos de explicar cumpla ciertas propiedades:

1. Si la cesta de las manzanas se ha quedado vacía, pero aún quedan limones en su cesta, entonces nuestra asignación cumple que dos manzanas distintas tendrán asignados dos limones distintos. Sin embargo, cada limón que se haya quedado en la cesta no estará asignado a ninguna manzana.
2. Si la cesta de los limones se ha quedado vacía, pero aún quedan manzanas en su cesta, entonces la asignación no puede cumplir la propiedad anterior, pues varias manzanas distintas tendrán asignado el mismo limón. Ahora bien, sí se cumplirá que cada limón está asignado al menos a una manzana.
3. Si ambas cestas se han quedado vacías a la vez, entonces la asignación cumplirá las dos propiedades anteriores: dos manzanas distintas tendrán asignados dos limones distintos y cada limón estará asignado al menos a una manzana.

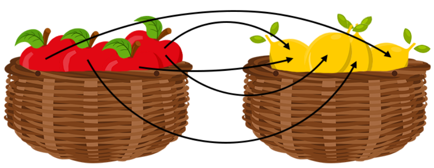
Como todo lo que hemos descrito parece importante vamos a darle nombre a las cosas:

Definición 2.1. Cualquier proceso que describa cómo asignar a cada manzana un único limón lo llamaremos una **función** entre manzanas y limones. Además, diremos que una función entre manzanas y limones es:

- **Inyectiva** si dos manzanas distintas tienen siempre asignados dos limones distintos.
- **Sobreyectiva** si cada limón está asignado al menos a una manzana.
- **Biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva.



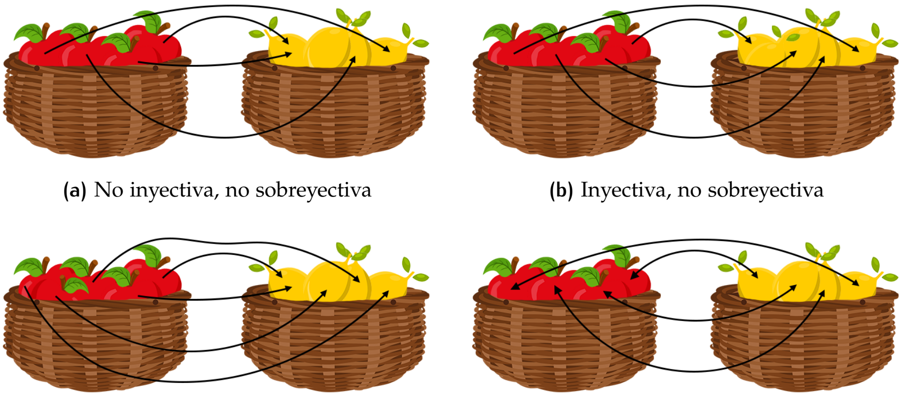
(a) Función



(b) No función

Figura 2: Ejemplos de una función entre manzanas y limones y una asignación que no es una función

Observemos que una biyección no es más que una relación biunívoca entre las manzanas y los limones, es decir, una regla que permite emparejar cada manzana con cada limón sin repetir ningún limón (ver la Figura 3d).



(a) No inyectiva, no sobreyectiva

(b) Inyectiva, no sobreyectiva

(c) Sobreyectiva, no inyectiva

(d) Biyectiva

Figura 3: Ejemplos de funciones entre manzanas y limones

Juntando todo lo anterior con estas nuevas definiciones hemos demostrado lo siguiente:

1. Si hay más limones que manzanas o, lo que es lo mismo, menos manzanas que limones, entonces existe una función inyectiva y no sobreyectiva entre manzanas y limones.
2. Si hay más manzanas que limones, entonces existe una función sobreyectiva y no inyectiva entre manzanas y limones.
3. Si hay la misma cantidad de manzanas que de limones, entonces existe una función biyectiva entre manzanas y limones.

Lo interesante es que el recíproco de estos tres puntos también es cierto, con lo que finalmente tenemos el siguiente resultado que nos permite comparar manzanas y limones sin contar, pero, más aún, nos permite hacerlo de un modo que podremos extender a "cestas con infinitas frutas":

Teorema 2.2. *Dadas dos cestas, una con una cantidad finita de manzanas y otra con una cantidad finita de limones, se cumplen:*

1. *Hay menos manzanas que limones si, y solo si, existe una función inyectiva y no sobreyectiva entre manzanas y limones.*
2. *Hay más manzanas que limones si, y solo si, existe una función sobreyectiva y no inyectiva entre manzanas y limones.*
3. *Hay la misma cantidad de manzanas que de limones si, y solo si, existe una función biyectiva entre manzanas y limones.*

El lector interesado puede consultar la demostración aquí.

3 HASTA EL INFINITO Y MÁS ALLÁ

Si nos fijamos bien todo lo que hemos hecho en la sección anterior con manzanas y limones podríamos haberlo hecho perfectamente cambiando las manzanas por melones (aunque habríamos necesitado una cesta más grande) y los limones por uvas o por diccionarios. También podríamos haber cambiado las cestas por cubos o incluso por bolsas de plástico. Es decir, lo único importante era tener dos "recipientes" llenos de "objetos". En matemáticas a estos "recipientes" los llamamos **conjuntos** y a los objetos que contienen dentro los denominamos sus **elementos**. Además, si A

es un conjunto y x uno de sus elementos[1], para evitar tener que escribir todo el rato "x es un elemento de A" abreviaremos esta frase como "$x \in A$".

Con este nivel de abstracción podemos enunciar la Definición 2.1 y el Teorema 2.2 de manera abstracta, lo que nos permite obtener de un solo plumazo cualquier resultado del estilo cambiando las manzanas y limones por lo que nos dé la gana:

Definición 3.1. Sean A y B dos conjuntos. Una **función** entre A y B es cualquier proceso que describa cómo asignar a cada elemento de A un único elemento de B. Además, si f es una función entre A y B (lo que denotaremos como $f : A \to B$) y a un elemento de A, al único elemento de B que la función f asigna al elemento a lo llamaremos la **imagen de** a y lo denotaremos por $f(a)$.

Diremos que una función entre A y B es:

- **Inyectiva** si dos elementos distintos de A tienen siempre imágenes distintas.
- **Sobreyectiva** si cada elemento de B es la imagen de algún elemento de A.
- **Biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva.

Como ocurría con las manzanas y limones, las biyecciones no son más que relaciones biunívocas entre los elementos de A y de B, es decir, reglas que nos permiten emparejar cada elemento de A con cada elemento de B sin repetir ningún elemento de B.

El conjunto de los números naturales, los números para contar: $0, 1, 2, \cdots$, se suele denotar con el símbolo $\mathbb{N}$, mientras que el conjunto de los números enteros, los números positivos y negativos: $\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$, se suele denotar con el símbolo $\mathbb{Z}$. Vamos a definir algunas funciones entre estos conjuntos para entender un poco mejor las cosas:

- Podemos definir una función $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ de modo que a todo número natural n le asigna el resultado de restarle 3 a este número. Simbólicamente tenemos que la imagen de n, es decir, el único elemento de $\mathbb{Z}$ que la función f_1 asigna a n, será $f_1(n) = n - 3$. Esta función es inyectiva porque si n y m son dos números naturales distintos, entonces sus imágenes, $f_1(n) = n - 3$ y $f_1(m) = m - 3$ son distintas, pero no será sobreyectiva porque, por ejemplo, el número -4 es un elemento de $\mathbb{Z}$, pero no será la imagen de ningún número natural.
- Podemos definir otra función $f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ de modo que $f_2(n) = n^2$, y en este caso no será ni inyectiva (los números enteros -3 y 3 son distintos, pero sus imágenes son iguales: $f_2(-3) = (-3)^2 = 9$ y $f_2(3) = 3^2 = 9$) ni sobreyectiva (el número natural 5 no es imagen de ningún elemento de $\mathbb{Z}$ a través de f_2).

Una observación importante que el lector debe tener en cuenta es que la sobreyectividad de una función $f : A \to B$ depende drásticamente del conjunto B. Por ejemplo, hemos visto que la función $f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ no es sobreyectiva, pero si definimos el conjunto C de todos los números cuadrados (los de la forma n^2, es decir, los números $0, 1, 4, 9, 16, 25, \cdots$) y la función $g : \mathbb{Z} \to C$ dada por $g(n) = n^2$, resulta que g tiene la misma "forma" que f_2, las imágenes de sus elementos son las mismas, pero ahora resulta que g **sí** es sobreyectiva.

Creo que ya estamos listos para enunciar la abstracción del Teorema 2.2 (cuya demostración es completamente análoga al resultado con manzanas y limones):

Teorema 3.2. *Dados dos conjuntos finitos A y B se cumplen:*

1. *A tiene menos elementos que B si, y solo si, existe una función inyectiva y no sobreyectiva entre A y B.*

[1] Es decir, tenemos un conjunto al que le hemos puesto por nombre "A" y hemos llamado "x" a uno de sus elementos.

2. A *tiene más elementos que* B *si, y solo si, existe una función sobreyectiva y no inyectiva entre* A *y* B.
3. A *y* B *tienen el mismo número de elementos si, y solo si, existe una función biyectiva entre* A *y* B.

Ahora ya podemos comparar el tamaño de dos conjuntos finitos, ya sean conjuntos de frutas, tractores o velas, pero seguimos teniendo el mismo problema que cuando empezamos este viaje: tanto el conjunto de los números naturales como el de los números pares es infinito. Sin embargo, mi querido lector, no estamos exactamente en el mismo punto que cuando empezamos, porque gracias al Teorema 3.2 ahora somos capaces de comparar el tamaño de dos conjuntos finitos sin necesidad de contar cuántos elementos tienen. Por tanto, espero que estés de acuerdo conmigo en que la siguiente definición es más que razonable:

Definición 3.3. Dados dos conjuntos A y B diremos que:

1. A tiene un número menor o igual de elementos que B si existe una función inyectiva entre A y B.
2. A y B tienen el mismo número de elementos si existe una función biyectiva entre A y B.

En este punto es muy importante entender que no estamos demostrando nada ni diciendo que haya alguna "razón divina" por la que lo anterior sea verdad, lo que estamos haciendo es INVENTARNOS una manera de comparar el tamaño de dos conjuntos cualesquiera. Al principio no teníamos ni idea de cómo podíamos comparar el tamaño de dos conjuntos infinitos y lo que hemos hecho ha sido explorar estas comparaciones en los conjuntos finitos, para los cuales sí sabemos hacerlo, hemos encontrado una manera alternativa, pero equivalente, de comparar sus tamaños y hemos utilizado este nuevo descubrimiento para extender la comparación a conjuntos cualesquiera. Por tanto, las palabras "un número menor o igual de elementos" o "el mismo número de elementos" en la Definición 3.3 solo tienen sentido en base a lo que dice la propia definición, no debemos atribuirle ningún significado "externo" cómo sí podíamos hacer con los conjuntos finitos. Ahora bien, aunque nos hayamos inventado cómo comparar el tamaño de dos conjuntos arbitrarios, no es una invención que nos hayamos "sacado de la manga", ya que si utilizamos la Definición 3.3 para comparar el tamaño de dos conjuntos finitos sabemos (gracias al Teorema 3.2) que siempre obtendremos el resultado correcto.

Ahora sí, por fin podemos responder a la pregunta que ha originado este largo viaje. Si entendemos la frase

"Hay la misma cantidad de números naturales que de números pares"

en el contexto de la Definición 3.3 (que espero que ya estéis de acuerdo conmigo en que es perfectamente razonable), entonces podemos decir sin ningún tipo de titubeo que es una verdad como un templo de grande. En efecto, si llamamos P al conjunto de los números pares, la función $f : \mathbb{N} \to P$ dada por $f(n) = 2 \cdot n$ es biyectiva y con ello $\mathbb{N}$ y P satisfacen lo dicho en el segundo punto de la Definición 3.3. La demostración es sencilla y el lector incrédulo puede consultarla aquí, pero como dicen que una imagen vale más que mil palabras, es posible que os convenza la siguiente:

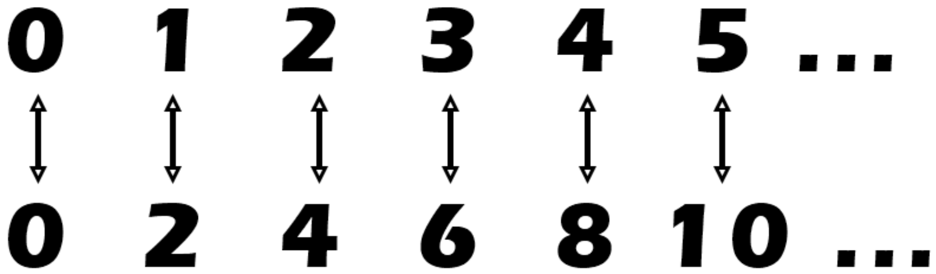


Figura 4: La función f empareja cada número natural con cada número par sin repetir ninguno

Aunque hemos podido responder a la gran cuestión que nos habíamos planteado, es posible que algunos lectores aún tengáis varias preguntas sobrevolando vuestra cabeza, por lo que a modo de adivino voy a intentar responderlas (si me he dejado alguna los comentarios son vuestros para preguntar lo que se os antoje).

En primer lugar, alguien podría preguntarse por qué no hemos definido el punto 1 en la Definición 3.3 de una manera más análoga a lo visto en el Teorema 3.2, es decir, porqué no hemos definido algo como:

A tiene menos elementos que B si existe una función inyectiva y no sobreyectiva entre A y B.

Veamos con un ejemplo la problemática de esta definición.

Es fácil ver que la función $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $f(n) = n + 1$ es inyectiva, pero no sobreyectiva, con lo que bajo esta nueva definición deberíamos decir que $\mathbb{N}$ tiene menos elementos que $\mathbb{N}$, lo cual ya suena raro de por sí. Pero, más aún, es obvio que la función $f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $f(n) = n$ será biyectiva, con lo que por el punto 2 en la Definición 3.3 deberíamos decir que $\mathbb{N}$ tiene el mismo número de elementos que $\mathbb{N}$. Por tanto, aunque como hemos explicado antes las frases "el mismo número de elementos que" o "menos elementos que" no deben tener un significado más allá de lo que nos diga la definición que establezcamos, no resultaría nada cómodo establecer una definición para la cual pueda ocurrir que un conjunto tenga a la vez "menos elementos que" y "el mismo número de elementos que" otro.

La "paradoja" ocurre porque al tratar con conjuntos infinitos puede ocurrir que exista una función inyectiva y no sobreyectiva entre dos conjuntos, pero que a la vez también exista una función biyectiva entre ambos, cosa que en el caso de conjuntos finitos no puede ocurrir. Por tanto, si queremos dar una definición en términos de tener "menos elementos", la adecuada sería la siguiente:

A tiene menos elementos que B si existe una función inyectiva entre A y B, pero no existe ninguna función biyectiva entre ambos.

De este modo, decir que "si A tiene menos elementos que B, entonces no puede ocurrir a la vez que A tenga los mismos elementos que B" es compatible incluso al considerar conjuntos infinitos.

Otra pregunta que podría plantearse alguien es por qué no aparece algún tipo de análogo al segundo punto del Teorema 3.2 en la Definición 3.3 o incluso peor, alguien podría haberse dado cuenta de que cambiando A por B en dicho Teorema 3.2 obtenemos dos criterios distintos para comparar el tamaño de dos conjuntos finitos. No hay ninguna trampa aquí, lo que ocurre es que ambas formas de comparar el tamaño de dos conjuntos finitos nos proporcionan el mismo resultado (de hecho, la equivalencia es cierta para conjuntos arbitrarios, ya sean finitos o infinitos):

Teorema 3.4. *Dados dos conjuntos A y B son equivalentes:*

1. *Existe una función inyectiva y no sobreyectiva entre* A *y* B.
2. *Existe una función sobreyectiva y no inyectiva entre* B *y* A.

La demostración puede consultarse aquí y una pequeña adaptación de la misma nos da que también se cumple:

Teorema 3.5. *Dados dos conjuntos* A *y* B *son equivalentes:*

1. *Existe una función inyectiva entre* A *y* B.
2. *Existe una función sobreyectiva entre* B *y* A.

Por tanto, en la Definición 3.3 podríamos sustituir el punto 1 por

A *tiene un número mayor o igual de elementos que* B *si existe una función sobreyectiva entre* A *y* B.

y obtendríamos exactamente los mismos resultados que con la definición que hemos dado.

Finalmente, alguien podría haber leído todo lo que he escrito, entenderlo y aún así seguir pensando que hay "el doble" de números naturales que de números pares. Si este es el caso, la siguiente sección está escrita para ti (y si no es el caso, aún así puede ser muy interesante).

4 QUE TE DIGO YO QUE HAY EL DOBLE DE NÚMEROS NATURALES QUE DE NÚMEROS PARES, ¡C**O!

Como veo que alguien podría empezar a ponerse agresivo si le sigo llevando la contraria le voy a dar la razón: es cierto que hay el doble de números naturales que de números pares. Pero antes de que quienes hayáis quedado convencidos por lo que hemos visto en la sección anterior os pongáis agresivos, aclaremos esto con una pequeña analogía.

Imaginad que alguien os invita a un gran banquete. Puestos a imaginar, aceptáis la invitación, os vestís de forma muy elegante y acudís a la cita. Al llegar veis una larga mesa llena de comida de todo tipo y en la esquina de la sala otra mesa, mucho más pequeña y modesta, sobre la que han apilado una torre de barritas energéticas. Nadie os dijo que el banquete no fuera a ser raro. Mientras os relacionáis con el resto de invitados, uno de ellos os dice que claramente en la mesa larga hay más comida que en la pequeña y no podéis hacer otra cosa que asentir ante tal obviedad. Sin embargo, un rato más tarde otra persona os dice que, en realidad, en ambas mesas hay la misma cantidad de comida porque para esa persona lo importante no es el peso o el volumen, sino el aporte energético. Tras un minucioso estudio de los alimentos de la mesa larga y una lectura detallada del envoltorio de las barritas llegáis a la conclusión de que está en lo cierto y ahora os encontráis con un dilema, una persona dice que en la mesa larga hay más comida que en la pequeña, pero otra dice que hay la misma cantidad comida y estáis de acuerdo con ambas. ¿Qué pasa aquí?

Espero que esta analogía deje clara la raíz del problema: cuando queremos comparar cantidades siempre debemos especificar de qué modo estamos haciéndolo. En la sección anterior os he mostrado una forma de comparar el tamaño de dos conjuntos infinitos que, a mi juicio, es perfectamente razonable y válida si uno busca hablar del "número de elementos" de un conjunto, pero cuando alguien dice que hay el doble de números naturales que de números pares realmente no está comparando este "número de elementos" de cada conjunto, está comparando cómo de "abundantes" son los números pares dentro de los números naturales. Es en este nuevo contexto, bajo esta nueva forma de comparar el tamaño de dos conjuntos, donde debo dar la razón a quienes me amenazaron hace un par de párrafos, pero eso no invalida de ningún modo todo lo que hemos visto en la sección anterior, del mismo modo que la forma de medir la cantidad de comida de una de las personas del banquete no invalidaba la de la otra. Aclarado este embrollo, ¿cómo podemos apañarnos para dar una definición que capture esta noción de "abundancia" de ciertos subconjuntos de los números naturales?

Como antes, la idea es empezar en el mundo finito y, a partir de lo que descubramos, ver como extenderlo a subconjuntos infinitos. Por tanto, en lugar de trabajar con el conjunto de todos los números naturales, vamos a trabajar con subconjuntos de la forma

$$M_N = \{0, 1, 2, 3, \cdots, N-1, N\},$$

donde N es un número natural arbitrario. Es decir, M_N es el conjunto de todos los números naturales menores o iguales a N. Podemos entonces reformular nuestra pregunta original y tratar de estudiar cómo de "abundantes" son los números pares dentro de M_N:

N	Cantidad de números pares en M_N	Cantidad total de números en M_N	Proporción
0	1	1	$\frac{1}{1} = 1$
1	1	2	$\frac{1}{2} = 0{,}5$
2	2	3	$\frac{2}{3} = 0{,}667$
3	2	4	$\frac{2}{4} = 0{,}5$
4	3	5	$\frac{3}{5} = 0{,}6$
5	3	6	$\frac{3}{6} = 0{,}5$
6	4	7	$\frac{4}{7} = 0{,}571$
…			
100	51	101	$\frac{51}{101} = 0{,}505$
101	51	102	$\frac{51}{102} = 0{,}5$
…			
200	101	201	$\frac{101}{201} = 0{,}502$
201	101	202	$\frac{101}{202} = 0{,}5$
…			

Observamos que cuanto mayor es N, es decir, cuantos más números naturales estamos considerando, la proporción o "abundancia" de números pares se acerca cada vez más a 0,5, es decir, parece que realmente hay el doble de números pares que de números naturales menores que N. Si uno lo piensa esto es obvio, es justamente lo que dijimos al comienzo de todo: uno de cada dos números naturales es par, por lo que debe haber el doble de números naturales que de pares o, dicho de otro modo, la proporción de números pares dentro de los números naturales debe ser 0,5.

Si hiciéramos lo mismo con los números divisibles por 3 obtendríamos que estas proporciones se acercan cada vez más y más a $\frac{1}{3}$, y si lo hiciéramos con múltiplos de 7 se acercarán cada vez más a $\frac{1}{7}$. Por tanto, parece que para medir la "abundancia" de un subconjunto A de los números naturales lo que podemos hacer es medir cómo de abundantes son los números que aparecen en A dentro de los subconjuntos M_N, es decir, medir la proporción tal y como hemos hecho para el caso de los pares, y observar a que número se aproximan dichas proporciones.

Si denotamos por $|F|$ al número de elementos de un subconjunto finito F de números naturales y por $A \cap M_N$ a la intersección entre un subconjunto cualquiera A de números naturales y M_N, es decir, a los elementos de A que son menores o iguales que N, entonces todo lo dicho nos lleva a la siguiente definición, donde en matemáticas en lugar de llamar a este concepto "abundancia" se le denomina "densidad natural":

Definición 4.1. Dado un subconjunto A de números naturales se define[2] su **densidad natural**, denotada por $d(A)$, como

$$d(A) = \lim_{N \to +\infty} \frac{|A \cap M_N|}{|M_N|} = \lim_{N \to +\infty} \frac{|A \cap M_N|}{N+1}$$

Quien no sepa que significa este "$\lim_{N \to +\infty}$" que no se asuste, basta con que piense que es el número al que se aproximan las proporciones cuando N se hace más y más grande.

Con todo lo visto tenemos entonces que $d(P) = 0{,}5$ (donde recordemos que habíamos llamado P al conjunto de los números pares) y podemos dar por zanjado el asunto:

Bajo el contexto de la Definición 3.3 podemos afirmar que hay la misma cantidad de números naturales y de números pares, pero bajo el contexto de la Definición 4.1 podemos decir que hay el doble de números naturales de que números pares.

Pero, ¿realmente podemos dar el tema por zanjado? ¿Qué pasa con el "tamaño" de otros conjuntos como los números enteros, los racionales o los reales? ¿Hay otras formas de medir "cómo de grande es un conjunto" distintas a las que hemos visto?

CONTINUARÁ...

[2] Obsérvese que la densidad natural no está definida para cualquier subconjunto de $\mathbb{N}$. Por ejemplo, si consideramos el subconjunto A formado por todos los números naturales de la forma

$$2^{2n}, 2^{2n}+1, \cdots, 2^{2n+1}-1$$

con $n \in \mathbb{N}$, es decir, sus primeros elementos son 1 para $n = 0$; $4, 5, 6, 7$ para $n = 1$; $16, 17, \cdots, 31$ para $n = 2$, etc., resulta que las proporciones $\frac{|A \cap M_N|}{N+1}$ oscilan entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$, pero nunca se aproximan a un valor concreto (luego no existe el límite).