Teorema 1. *Sea* $a_{n,m}$ *una doble sucesión de números complejos y* $b_{n,m}$ *una doble sucesión de enteros no negativos tal que para cada* $k \geq 0$ *los conjuntos*

$$T_k = \{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : b_{n,m} = k\}$$

son finitos.
Entonces, dado $z \in \mathbb{C}$*, si la serie*

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{n,m} z^{b_{n,m}}$$

converge absolutamente, se cumple que

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} z^{b_{n,m}} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m} z^{b_{n,m}}$$

donde $c_k = \sum_{(n,m)\in T_k} a_{n,m}$.
En particular, si cada $a_{n,m}$ *es un real no negativo, la última igualdad se cumple para todo* z *perteneciente al disco de convergencia de la serie de potencias* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$.

Demostración:
Para evitar problemas con posibles conjuntos T_k vacíos, definimos de forma recursiva la sucesión:

$$t_0 = \min\{k \in \mathbb{N} : T_k \neq \varnothing\}$$
$$t_{n+1} = \min\{k \in \mathbb{N} : k > t_n \wedge T_k \neq \varnothing\}$$

Y con ello, la sucesión de conjuntos $\{S_k\}_{k=0}^{\infty}$ dada por $S_k = T_{t_k}$.
De esta forma tenemos que $\{S_k\}_{k=0}^{\infty}$ es una partición formada por conjuntos finitos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Ordenando pues cada S_k (con el orden lexicográfico, por ejemplo) y denotando sus elementos ordenados por $s_1^k, \cdots, s_{n_k}^k$ podemos considerar la biyección $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dada por

$$(s_1^0, \cdots, s_{n_0}^0, s_1^1, \cdots, s_{n_1}^1, \cdots)$$

Considerando ahora que eliminar ceros en una serie numérica convergente no cambia su valor tenemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n_k} a_{s_j^k} z^{t_k} \right)$$

Por otra parte, si definimos $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ como $f(n,m) = a_{n,m} z^{b_{n,m}}$, por la convergencia absoluta de $\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f(n,m)$ obtenemos que la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(g(k))$$

converge absolutamente, siendo los “sumandos” de esta los de la serie anterior, pero sin agrupar en subsumas.

Finalmente obtenemos:

- Por la asociatividad de series convergentes tendríamos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(g(k)) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n_k} a_{s_j^k} z^{t_k} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

- Por el Teorema 9.6 del Anexo 3 de aquí la convergencia absoluta de esta serie implica que

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(g(k)) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f(n,m) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f(n,m) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} z^{b_{n,m}} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m} z^{b_{n,m}}$$

Estas dos últimas igualdades finalizan pues la primera parte de la demostración.

Ahora, supongamos que cada $a_{n,m}$ es un número real no negativo y z pertenece al disco de convergencia de $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$.

Entonces, observemos en primer lugar que la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

converge absolutamente.

Por tanto, para cada $K \geq 0$, tomando $l \in \mathbb{N}$ tal que $K \leq \sum_{j=1}^{l} n_j = N$ se tiene que

$$\sum_{k=0}^{K} |f(g(k))| \leq \sum_{k=0}^{N} |f(g(k))| = \sum_{k=0}^{l} \left(\sum_{j=1}^{n_k} a_{s_j^k} \left| z^{t_k} \right| \right) = \sum_{k=0}^{l} \left| c_k z^k \right| < \sum_{k=0}^{\infty} \left| c_k z^k \right| < \infty$$

Esto prueba que la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(g(k))$$

converge absolutamente, luego por definición, la serie $\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f(n,m)$ converge absolutamente y, por lo visto, obtenemos la igualdad deseada. ■

Proposición 2. *Si* $|x| < 1$ *entonces*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^{2^n}}{1 + x^{2^n}} = \frac{x}{1-x}$$

<u>Demostración:</u>

Primero observemos que, como $|x| < 1$ entonces será

$$\frac{1}{1 + x^{2^n}} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m x^{m2^n}$$

y así podemos expresar

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^{2^n}}{1 + x^{2^n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m 2^n x^{2^n(m+1)}$$

La idea ahora es intentar utilizar el Teorema 1 para convertir esta serie doble en una única serie de potencias.

Para ello, definimos $a_{n,m} = (-1)^m 2^n$ y $b_{n,m} = 2^n(m+1)$, y debemos comenzar probando la convergencia absoluta de

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{n,m} x^{b_{n,m}}$$

cuando $|x| < 1$.

Comencemos pues observando que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\left|a_{n,m}x^{b_{n,m}}\right|\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} 2^n |x|^{2^n(m+1)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(2^n |x|^{2^n}\sum_{m=0}^{\infty}\left(|x|^{2^n}\right)^m\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n |x|^{2^n}}{1-|x|^{2^n}}$$

y que esta última serie converge pues tenemos la acotación para cada $N \geq 0$

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{2^n |x|^{2^n}}{1-|x|^{2^n}} \leq \frac{1}{1-|x|}\sum_{n=0}^{\infty} n|x|^n = \frac{|x|}{(1-|x|)^3}$$

Por tanto, lo visto en la demostración del Corolario 9.7 de aquí, nos garantiza la convergencia absoluta de la serie buscada.

Ahora debemos encontrar los valores de los c_k, y para ello en primer lugar observemos que $T_0 = \varnothing$, luego $c_0 = 0$.

Además, para los conjuntos con índice impar, $2k+1$, observemos que

$$2^n(m+1) = 2k+1 \iff n = 0 \wedge m = 2k$$

con lo que

$$T_{2k+1} = \{(0, 2k)\}$$

y así

$$c_{2k+1} = a_{0,2k} = (-1)^{2k}2^0 = 1$$

Para los conjuntos de grado par recordemos que todo número par se expresa de forma única como $2^k r$ con $k \geq 1$ y r impar. Así, como

$$2^n(m+1) = 2^k r \iff 0 \leq n \leq k \wedge m+1 = 2^{k-n}r$$

obtenemos que

$$T_{2^k r} = \{(n, 2^{k-n}r - 1) : 0 \leq n \leq k\}$$

Con ello, tenemos que

$$c_{2^k r} = \sum_{n=0}^{k} a_{n,2^{k-n}r-1} = \sum_{n=0}^{k}(-1)^{2^{k-n}r-1}2^n = -\sum_{n=0}^{k-1}2^n + 2^k = 1$$

Por tanto, finalmente se tiene que $c_0 = 0$ y $c_k = 1$ para cada $k \geq 1$.

Aplicando ahora el Teorema 1 concluimos que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^{2^n}}{1+x^{2^n}} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m 2^n x^{2^n(m+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x}$$