

Introducción a la lógica matemática

Teorías axiomáticas

Esteban Martínez Vañó

Universidad de Granada
Departamento de Análisis Matemático

10 de abril de 2025

Preguntas de la sesión

Preguntas de la sesión

1. ¿Qué es una teoría axiomática?

Preguntas de la sesión

1. ¿Qué es una teoría axiomática?
2. ¿Qué significa sintáctica/semánticamente que una teoría sea consistente?

Preguntas de la sesión

1. ¿Qué es una teoría axiomática?
2. ¿Qué significa sintáctica/semánticamente que una teoría sea consistente?
3. ¿Qué es lo mínimo y máximo que podemos pedirle a una teoría axiomática?

- 1 ¿Qué es una teoría axiomática?
- 2 ¿Qué significa sintáctica/semánticamente que una teoría sea consistente?
- 3 ¿Qué es lo mínimo y máximo que podemos pedirle a una teoría axiomática?

¿Qué es una teoría axiomática?

Teniendo en cuenta todo lo que hemos visto sobre los sistemas formales,

¿qué es una teoría axiomática?

¿Qué es una teoría axiomática?

Teniendo en cuenta todo lo que hemos visto sobre los sistemas formales,

¿qué es una teoría axiomática?

Una **teoría axiomática** (de primer orden) sobre un lenguaje formal $\mathcal{L}$ es un sistema deductivo formal T sobre $\mathcal{L}$ cuyos axiomas incluyen a los de $K_{\mathcal{L}}$ y cuyas reglas de inferencia son exactamente las de $K_{\mathcal{L}}$. A los axiomas de $K_{\mathcal{L}}$ los llamaremos **axiomas lógicos** y a los axiomas de T que no sean axiomas lógicos los llamaremos **axiomas propios** de T .

¿Qué es una teoría axiomática?

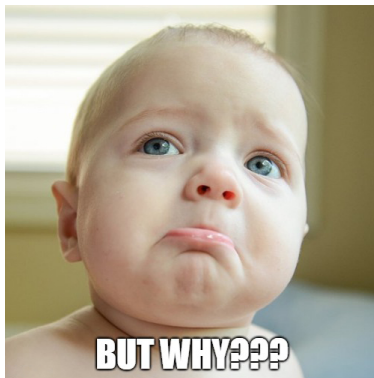
Observemos que si Γ es el conjunto de axiomas propios de una teoría axiomática T , entonces

$$\frac{}{T} \vdash \alpha \quad \text{sys} \quad \Gamma \vdash \alpha$$

¿Qué es una teoría axiomática?

Observemos que si Γ es el conjunto de axiomas propios de una teoría axiomática T , entonces

$$\frac{}{T} \vdash \alpha \quad \text{sys} \quad \Gamma \vdash \alpha$$



¿Qué es una teoría axiomática?

Sea T una teoría axiomática sobre un lenguaje formal $\mathcal{L}$. Un **modelo** M de T es un modelo de sus axiomas, es decir, un modelo de $\mathcal{L}$ en el que son verdaderos todos los axiomas de T . Lo representaremos por $M \models T$.

¿Qué es una teoría axiomática?

Sea T una teoría axiomática sobre un lenguaje formal $\mathcal{L}$. Un **modelo** M de T es un modelo de sus axiomas, es decir, un modelo de $\mathcal{L}$ en el que son verdaderos todos los axiomas de T . Lo representaremos por $M \models T$.

- ¿Podemos cambiar en la definición “axiomas” por “axiomas propios”?

¿Qué es una teoría axiomática?

Sea T una teoría axiomática sobre un lenguaje formal $\mathcal{L}$. Un **modelo** M de T es un modelo de sus axiomas, es decir, un modelo de $\mathcal{L}$ en el que son verdaderos todos los axiomas de T . Lo representaremos por $M \models T$.

- ¿Podemos cambiar en la definición “axiomas” por “axiomas propios”?
- ¿Los teoremas de T serán verdaderos en un modelo M de T ?

¿Qué es una teoría axiomática?

Sea T una teoría axiomática sobre un lenguaje formal $\mathcal{L}$. Un **modelo** M de T es un modelo de sus axiomas, es decir, un modelo de $\mathcal{L}$ en el que son verdaderos todos los axiomas de T . Lo representaremos por $M \models T$.

- ¿Podemos cambiar en la definición “axiomas” por “axiomas propios”?
- ¿Los teoremas de T serán verdaderos en un modelo M de T ?
- ¿Puede una fórmula falsa en un modelo M de T ser un teorema de T ?

La aritmética de Robinson (Q)

$$(Q1) \quad \forall x \, x' \neq 0$$

$$(Q2) \quad \forall xy (x' = y' \rightarrow x = y)$$

$$(Q3) \quad \forall x (x \neq 0 \rightarrow \exists y \, x = y')$$

$$(Q4) \quad \forall x \, x + 0 = x$$

$$(Q5) \quad \forall xy \, x + y' = (x + y)'$$

$$(Q6) \quad \forall x \, x \cdot 0 = 0$$

$$(Q7) \quad \forall xy \, x \cdot y' = x \cdot y + x$$

Ejemplos de teorías axiomáticas

La aritmética de Peano (AP)

$$(AP1) \quad \forall x \, x' \neq 0$$

$$(AP2) \quad \forall xy (x' = y' \rightarrow x = y)$$

$$(AP3) \quad \forall x \, x + 0 = x$$

$$(AP4) \quad \forall xy \, x + y' = (x + y)'$$

$$(AP5) \quad \forall x \, x \cdot 0 = 0$$

$$(AP6) \quad \forall xy \, x \cdot y' = x \cdot y + x$$

$$(AP7) \quad \left(S_x^0 \phi \wedge \forall x \left(\phi \rightarrow S_x^{x'} \phi \right) \right) \rightarrow \forall x \, \phi$$

donde ϕ es cualquier fórmula de $\mathcal{L}_a$ tal vez con más variables libres aparte de x .

Ejemplos de teorías axiomáticas

La aritmética de Peano (AP)

$$(AP1) \quad \forall x \, x' \neq 0$$

$$(AP2) \quad \forall xy (x' = y' \rightarrow x = y)$$

$$(AP3) \quad \forall x \, x + 0 = x$$

$$(AP4) \quad \forall xy \, x + y' = (x + y)'$$

$$(AP5) \quad \forall x \, x \cdot 0 = 0$$

$$(AP6) \quad \forall xy \, x \cdot y' = x \cdot y + x$$

$$(AP7) \quad (\phi(0) \wedge \forall x (\phi(x) \rightarrow \phi(x'))) \rightarrow \forall x \, \phi(x)$$

donde ϕ es cualquier fórmula de $\mathcal{L}_a$ tal vez con más variables libres aparte de x .

Ejemplos de teorías axiomáticas

La geometría de Tarski (GT)

El lenguaje formal de la geometría de Tarski $\mathcal{L}_{GT}$ tiene como signos eventuales un relator triádico que representaremos por $a - b - c$ y un relator tetrádico que representaremos por $\overline{ab} \equiv \overline{cd}$.

$$(GT1) \quad \overline{ab} \equiv \overline{ba}$$

$$(GT2) \quad \overline{ab} \equiv \overline{pq} \wedge \overline{ab} \equiv \overline{rs} \rightarrow \overline{pq} \equiv \overline{rs}$$

$$(GT3) \quad \overline{ab} \equiv \overline{cc} \rightarrow a = b$$

$$(GT4) \quad \exists x (q - a - x \wedge \overline{ax} \equiv \overline{bc})$$

$$(GT5) \quad a \neq b \wedge a - b - c \wedge a' - b' - c' \wedge \overline{ab} \equiv \overline{a'b'} \wedge \overline{bc} \equiv \overline{b'c'} \wedge \overline{ad} \equiv \overline{a'd'} \wedge \overline{bd} \equiv \overline{b'd'} \rightarrow \overline{cd} \equiv \overline{c'd'}$$

$$(GT6) \quad a - b - a \rightarrow a = b$$

$$(GT7) \quad a - p - b \wedge q - c - b \rightarrow \exists x (p - x - q \wedge c - x - a)$$

$$(GT8) \quad \exists abc (\neg a - b - c \wedge \neg b - c - a \wedge \neg c - a - b)$$

Ejemplos de teorías axiomáticas

La teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZF)

$$(ZF1) \quad \forall xy (\forall u (u \in x \leftrightarrow u \in y) \rightarrow x = y)$$

$$(ZF2) \quad \forall xy \exists z \forall u (u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$$

$$(ZF3) \quad \forall x \exists y \forall u (u \in y \leftrightarrow \exists v (v \in x \wedge u \in v))$$

$$(ZF4) \quad \forall xyz (\phi(x, y) \wedge \phi(x, z) \rightarrow y = z) \rightarrow \\ \forall a \exists b \forall u (u \in b \leftrightarrow \exists x (x \in a \wedge \phi(x, u)))$$

$$(ZF5) \quad \exists x (v | (\forall u (u \notin v) \in x \wedge \forall u (u \in x \rightarrow u' \in x)))$$

$$(ZF6) \quad \forall x \exists y \forall u (\forall v (v \in u \rightarrow v \in x) \rightarrow u \in y)$$

$$(ZF7) \quad \forall x (x \neq v | (\forall u (u \notin v) \rightarrow \exists u (u \in x \wedge u \cap x = v | (\forall u (u \notin v))))$$

donde ϕ es cualquier fórmula de $\mathcal{L}_{tc}$ tal vez con más variables libres, pero distintas de b .

Ejemplos de teorías axiomáticas

La teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZF)

$$(ZF1) \quad \forall xy (\forall u (u \in x \leftrightarrow u \in y) \rightarrow x = y)$$

$$(ZF2) \quad \forall xy \exists z \forall u (u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$$

$$(ZF3) \quad \forall x \exists y \forall u (u \in y \leftrightarrow \exists v (v \in x \wedge u \in v))$$

$$(ZF4) \quad \forall xyz (\phi(x, y) \wedge \phi(x, z) \rightarrow y = z) \rightarrow \\ \forall a \exists b \forall u (u \in b \leftrightarrow \exists x (x \in a \wedge \phi(x, u)))$$

$$(ZF5) \quad \exists x (v | (\forall u u \notin v) \in x \wedge \forall u (u \in x \rightarrow u' \in x))$$

$$(ZF6) \quad \forall x \exists y \forall u (\forall v (v \in u \rightarrow v \in x) \rightarrow u \in y)$$

$$(ZF7) \quad \forall x (x \neq v | (\forall u u \notin v) \rightarrow \exists u (u \in x \wedge u \cap x = v | (\forall u u \notin v)))$$

donde ϕ es cualquier fórmula de $\mathcal{L}_{tc}$ tal vez con más variables libres, pero distintas de b .

Ejemplos de teorías axiomáticas

La teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZF)

$$(ZF1) \quad \forall xy (\forall u (u \in x \leftrightarrow u \in y) \rightarrow x = y)$$

$$(ZF2) \quad \forall xy \exists z \forall u (u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$$

$$(ZF3) \quad \forall x \exists y \forall u (u \in y \leftrightarrow \exists v (v \in x \wedge u \in v))$$

$$(ZF4) \quad \forall xyz (\phi(x, y) \wedge \phi(x, z) \rightarrow y = z) \rightarrow \\ \forall a \exists b \forall u (u \in b \leftrightarrow \exists x (x \in a \wedge \phi(x, u)))$$

$$(ZF5) \quad \exists x (\emptyset \in x \wedge \forall u (u \in x \rightarrow u' \in x))$$

$$(ZF6) \quad \forall x \exists y \forall u (\forall v (v \in u \rightarrow v \in x) \rightarrow u \in y)$$

$$(ZF7) \quad \forall x (x \neq \emptyset \rightarrow \exists u (u \in x \wedge u \cap x = \emptyset))$$

donde ϕ es cualquier fórmula de $\mathcal{L}_{tc}$ tal vez con más variables libres, pero distintas de b .

Ejemplos de teorías axiomáticas

La teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZF)

$$(ZF1) \quad \forall xy (\forall u (u \in x \leftrightarrow u \in y) \rightarrow x = y)$$

$$(ZF2) \quad \forall xy \exists z \forall u (u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$$

$$(ZF3) \quad \forall x \exists y \forall u (u \in y \leftrightarrow \exists v (v \in x \wedge u \in v))$$

$$(ZF4) \quad \forall xyz (\phi(x, y) \wedge \phi(x, z) \rightarrow y = z) \rightarrow \\ \forall a \exists b \forall u (u \in b \leftrightarrow \exists x (x \in a \wedge \phi(x, u)))$$

$$(ZF5) \quad \exists x (\emptyset \in x \wedge \forall u (u \in x \rightarrow u' \in x))$$

$$(ZF6) \quad \forall x \exists y \forall u (\forall v (v \in u \rightarrow v \in x) \rightarrow u \in y)$$

$$(ZF7) \quad \forall x (x \neq \emptyset \rightarrow \exists u (u \in x \wedge u \cap x = \emptyset))$$

donde ϕ es cualquier fórmula de $\mathcal{L}_{tc}$ tal vez con más variables libres, pero distintas de b .

Ejemplos de teorías axiomáticas

La teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZF)

$$(ZF1) \quad \forall xy (\forall u (u \in x \leftrightarrow u \in y) \rightarrow x = y)$$

$$(ZF2) \quad \forall xy \exists z \forall u (u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$$

$$(ZF3) \quad \forall x \exists y \forall u (u \in y \leftrightarrow \exists v (v \in x \wedge u \in v))$$

$$(ZF4) \quad \forall xyz (\phi(x, y) \wedge \phi(x, z) \rightarrow y = z) \rightarrow \\ \forall a \exists b \forall u (u \in b \leftrightarrow \exists x (x \in a \wedge \phi(x, u)))$$

$$(ZF5) \quad \exists x (\emptyset \in x \wedge \forall u (u \in x \rightarrow u' \in x))$$

$$(ZF6) \quad \forall x \exists y \forall u (u \subset x \rightarrow u \in y)$$

$$(ZF7) \quad \forall x (x \neq \emptyset \rightarrow \exists u (u \in x \wedge u \cap x = \emptyset))$$

donde ϕ es cualquier fórmula de $\mathcal{L}_{tc}$ tal vez con más variables libres, pero distintas de b .

Ejemplos de teorías axiomáticas

La teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZF)

$$(ZF1) \quad \forall xy (\forall u (u \in x \leftrightarrow u \in y) \rightarrow x = y)$$

$$(ZF2) \quad \forall xy \exists z \forall u (u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$$

$$(ZF3) \quad \forall x \exists y \forall u (u \in y \leftrightarrow \exists v (v \in x \wedge u \in v))$$

$$(ZF4) \quad \forall xyz (\phi(x, y) \wedge \phi(x, z) \rightarrow y = z) \rightarrow \\ \forall a \exists b \forall u (u \in b \leftrightarrow \exists x (x \in a \wedge \phi(x, u)))$$

$$(ZF5) \quad \exists x (\emptyset \in x \wedge \forall u (u \in x \rightarrow u' \in x))$$

$$(ZF6) \quad \forall x \exists y \forall u (u \subset x \rightarrow u \in y)$$

$$(ZF7) \quad \forall x (x \neq \emptyset \rightarrow \exists u (u \in x \wedge u \cap x = \emptyset))$$

donde ϕ es cualquier fórmula de $\mathcal{L}_{tc}$ tal vez con más variables libres, pero distintas de b .

La teoría de conjuntos (restringida) de Zermelo (Z^*)

$$(Z^*1) \quad \forall xy (\forall u (u \in x \leftrightarrow u \in y) \rightarrow x = y)$$

$$(Z^*2) \quad \forall xy \exists z \forall u (u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$$

$$(Z^*3) \quad \forall x \exists y \forall u (u \in y \leftrightarrow \exists v (v \in x \wedge u \in v))$$

$$(Z^*4) \quad \forall x \exists y \forall u (u \in y \leftrightarrow u \in x \wedge \phi(u))$$

donde ϕ es cualquier fórmula de $\mathcal{L}_{tc}$ tal vez con más variables libres, pero distintas de y .

- 1 ¿Qué es una teoría axiomática?
- 2 ¿Qué significa sintáctica/semánticamente que una teoría sea consistente?
- 3 ¿Qué es lo mínimo y máximo que podemos pedirle a una teoría axiomática?

¿Qué significa que una teoría sea consistente?

¿Qué significa que una teoría sea consistente?

Una teoría axiomática T sobre un lenguaje formal $\mathcal{L}$ es **contradictoria** si existe una fórmula α de $\mathcal{L}$ tal que $\vdash_T \alpha$ y $\vdash_T \neg\alpha$.
En caso contrario diremos que T es **consistente**.

¿Qué significa que una teoría sea consistente?

Una teoría axiomática T sobre un lenguaje formal $\mathcal{L}$ es **contradictoria** si existe una fórmula α de $\mathcal{L}$ tal que $\vdash_T \alpha$ y $\vdash_T \neg\alpha$.

En caso contrario diremos que T es **consistente**.

Teorema: Una teoría axiomática T es consistente si, y solo si, existe alguna fórmula que no es un teorema de T .

¿Qué significa que una teoría sea consistente?

Una teoría axiomática T sobre un lenguaje formal $\mathcal{L}$ es **contradictoria** si existe una fórmula α de $\mathcal{L}$ tal que $\vdash_T \alpha$ y $\vdash_T \neg\alpha$.

En caso contrario diremos que T es **consistente**.

Teorema: Una teoría axiomática T es consistente si, y solo si, existe alguna fórmula que no es un teorema de T .

Teorema: Si una teoría axiomática T tiene un modelo, entonces T es consistente.

¿Qué significa que una teoría sea consistente?

Una teoría axiomática T sobre un lenguaje formal $\mathcal{L}$ es **contradictoria** si existe una fórmula α de $\mathcal{L}$ tal que $\vdash_T \alpha$ y $\vdash_T \neg\alpha$.

En caso contrario diremos que T es **consistente**.

Teorema: Una teoría axiomática T es consistente si, y solo si, existe alguna fórmula que no es un teorema de T .

Teorema: Si una teoría axiomática T tiene un modelo, entonces T es consistente.

¿Es cierto el recíproco?

Consistencia

Consistencia

- La teoría $K_{\mathcal{L}}$ es consistente

- La teoría $K_{\mathcal{L}}$ es consistente porque admite un modelo con un único elemento.

Consistencia

- La teoría $K_{\mathcal{L}}$ es consistente porque admite un modelo con un único elemento.
- Las teorías Q y AP son consistentes

Consistencia

- La teoría $K_{\mathcal{L}}$ es consistente porque admite un modelo con un único elemento.
- Las teorías Q y AP son consistentes porque admiten al conjunto de los números naturales como modelo.

- La teoría $K_{\mathcal{L}}$ es consistente porque admite un modelo con un único elemento.
- Las teorías Q y AP son consistentes porque admiten al conjunto de los números naturales como modelo.
- La teoría ZFC-AI es consistente porque admite al conjunto de los números naturales como modelo.

Consistencia

- La teoría $K_{\mathcal{L}}$ es consistente porque admite un modelo con un único elemento.
- Las teorías Q y AP son consistentes porque admiten al conjunto de los números naturales como modelo.
- La teoría ZFC-AI es consistente porque admite al conjunto de los números naturales como modelo.
- La teoría GT es consistente.

- La teoría $K_{\mathcal{L}}$ es consistente porque admite un modelo con un único elemento.
- Las teorías Q y AP son consistentes porque admiten al conjunto de los números naturales como modelo.
- La teoría ZFC-AI es consistente porque admite al conjunto de los números naturales como modelo.
- La teoría GT es consistente.
- No es posible dar un argumento que muestre que la teoría ZF es consistente.

Teorema: Sean T y S teorías axiomáticas sobre un lenguaje formal $\mathcal{L}$ tales que todo axioma propio de S es un teorema de T . Entonces, todo teorema de S es un teorema de T y, por tanto, si T es consistente, S también lo es.

Teorema: Sean T y S teorías axiomáticas sobre un lenguaje formal $\mathcal{L}$ tales que todo axioma propio de S es un teorema de T . Entonces, todo teorema de S es un teorema de T y, por tanto, si T es consistente, S también lo es.

Teorema: Sea T una teoría axiomática y α una sentencia. La teoría $T + \alpha$ es consistente si, y solo si, no $\vdash_T \neg\alpha$.

Consistencia

Teorema: Sean T y S teorías axiomáticas sobre un lenguaje formal $\mathcal{L}$ tales que todo axioma propio de S es un teorema de T . Entonces, todo teorema de S es un teorema de T y, por tanto, si T es consistente, S también lo es.

Teorema: Sea T una teoría axiomática y α una sentencia. La teoría $T + \alpha$ es consistente si, y solo si, no $\vdash_T \neg\alpha$.

¿Qué pasa si α no es una sentencia en el teorema anterior?

Pista: Tomar como T la teoría cuyo único axioma propio es

$\exists xy \, x \neq y$ y $\alpha \equiv x = y$.

Clausura universal

Observando las teorías Q y GT, ¿qué diferencias encontráis?

$$(Q1) \quad \forall x \, x' \neq 0$$

$$(Q2) \quad \forall xy (x' = y' \rightarrow x = y)$$

$$(Q3) \quad \forall x (x \neq 0 \rightarrow \exists y \, x = y')$$

$$(Q4) \quad \forall x \, x + 0 = x$$

$$(Q5) \quad \forall xy \, x + y' = (x + y)'$$

$$(Q6) \quad \forall x \, x \cdot 0 = 0$$

$$(Q7) \quad \forall xy \, x \cdot y' = x \cdot y + x$$

$$(GT1) \quad \overline{ab} \equiv \overline{ba}$$

$$(GT2) \quad \overline{ab} \equiv \overline{pq} \wedge \overline{ab} \equiv \overline{rs} \rightarrow \overline{pq} \equiv \overline{rs}$$

$$(GT3) \quad \overline{ab} \equiv \overline{cc} \rightarrow a = b$$

$$(GT4) \quad \exists x (q - a - x \wedge \overline{ax} \equiv \overline{bc})$$

$$(GT5) \quad a \neq b \wedge a - b - c \wedge a' - b' - c' \wedge$$

$$\overline{ab} \equiv \overline{a'b'} \wedge \overline{bc} \equiv \overline{b'c'} \wedge$$

$$\overline{ad} \equiv \overline{a'd'} \wedge \overline{bd} \equiv \overline{b'd'} \rightarrow$$

$$\overline{cd} \equiv \overline{c'd'}$$

$$(GT6) \quad a - b - a \rightarrow a = b$$

$$(GT7) \quad a - p - b \wedge q - c - b \rightarrow$$

$$\exists x (p - x - q \wedge c - x - a)$$

$$(GT8) \quad \exists abc (\neg a - b - c \wedge \neg b - c - a \wedge \neg c - a - b)$$

Clausura universal

Observando las teorías Q y GT, ¿qué diferencias encontráis?

$$(Q1) \quad \forall x \, x' \neq 0$$

$$(Q2) \quad \forall xy (x' = y' \rightarrow x = y)$$

$$(Q3) \quad \forall x (x \neq 0 \rightarrow \exists y \, x = y')$$

$$(Q4) \quad \forall x \, x + 0 = x$$

$$(Q5) \quad \forall xy \, x + y' = (x + y)'$$

$$(Q6) \quad \forall x \, x \cdot 0 = 0$$

$$(Q7) \quad \forall xy \, x \cdot y' = x \cdot y + x$$

$$(GT1) \quad \forall ab \, \overline{ab} \equiv \overline{ba}$$

$$(GT2) \quad \forall abpqrs (\overline{ab} \equiv \overline{pq} \wedge \overline{ab} \equiv \overline{rs} \rightarrow \overline{pq} \equiv \overline{rs})$$

$$(GT3) \quad \forall abc (\overline{ab} \equiv \overline{cc} \rightarrow a = b)$$

$$(GT4) \quad \forall abcq \, \exists x (q - a - x \wedge \overline{ax} \equiv \overline{bc})$$

$$(GT5) \quad \forall abcda' b' c' d' (\\ a \neq b \wedge a - b - c \wedge a' - b' - c' \wedge \\ \overline{ab} \equiv \overline{a'b'} \wedge \overline{bc} \equiv \overline{b'c'} \wedge \\ \overline{ad} \equiv \overline{a'd'} \wedge \overline{bd} \equiv \overline{b'd'} \rightarrow \\ \overline{cd} \equiv \overline{c'd'})$$

$$(GT6) \quad \forall ab (a - b - a \rightarrow a = b)$$

$$(GT7) \quad \forall abcpq (a - p - b \wedge q - c - b \rightarrow \\ \exists x (p - x - q \wedge c - x - a))$$

$$(GT8) \quad \exists abc (\neg a - b - c \wedge \neg b - c - a \wedge \\ \neg c - a - b)$$

Clausura universal

Dada una fórmula α en un lenguaje formal $\mathcal{L}$ se define su **clausura universal** como la sentencia α^c que resulta de ligar todas las variables libres de α con cuantificadores universales.

Clausura universal

Dada una fórmula α en un lenguaje formal $\mathcal{L}$ se define su **clausura universal** como la sentencia α^c que resulta de ligar todas las variables libres de α con cuantificadores universales.

Por las reglas (IG) y (EG) se tiene que

$$\alpha \vdash \alpha^c \quad \text{y} \quad \alpha^c \vdash \alpha$$

Clausura universal

Dada una fórmula α en un lenguaje formal $\mathcal{L}$ se define su **clausura universal** como la sentencia α^c que resulta de ligar todas las variables libres de α con cuantificadores universales.

Por las reglas (IG) y (EG) se tiene que

$$\alpha \vdash \alpha^c \quad \text{y} \quad \alpha^c \vdash \alpha$$

Por tanto, si T es una teoría axiomática y T^c es la teoría axiomática resultante de sustituir cada axioma propio de T por su clausura universal, se tiene que:

- $\vdash_T \alpha$ si, y solo si, $\vdash_{T^c} \alpha$.
- $M \models T$ si, y solo si, $M \models T^c$.

Clausura universal

Dada una fórmula α en un lenguaje formal $\mathcal{L}$ se define su **clausura universal** como la sentencia α^c que resulta de ligar todas las variables libres de α con cuantificadores universales.

Por las reglas (IG) y (EG) se tiene que

$$\alpha \vdash \alpha^c \quad \text{y} \quad \alpha^c \vdash \alpha$$

Por tanto, si T es una teoría axiomática y T^c es la teoría axiomática resultante de sustituir cada axioma propio de T por su clausura universal, se tiene que:

- $\vdash_T \alpha$ si, y solo si, $\vdash_{T^c} \alpha$.
- $M \models T$ si, y solo si, $M \models T^c$.

¡OJO! En general NO es cierto que $\vdash \alpha \leftrightarrow \vdash \alpha^c$ (tomar $\alpha \equiv x = y$).

- 1 ¿Qué es una teoría axiomática?
- 2 ¿Qué significa sintáctica/semánticamente que una teoría sea consistente?
- 3 ¿Qué es lo mínimo y máximo que podemos pedirle a una teoría axiomática?

Completitud

Completitud

- ¿Qué es lo mínimo que le debemos exigir a una teoría axiomática para que “sea útil”?

Completitud

- ¿Qué es lo mínimo que le debemos exigir a una teoría axiomática para que “sea útil”?
- ¿Qué es lo máximo que le podemos exigir a una teoría consistente?

Completitud

- ¿Qué es lo mínimo que le debemos exigir a una teoría axiomática para que “sea útil”?
- ¿Qué es lo máximo que le podemos exigir a una teoría consistente?

Una teoría axiomática T es **completa** si toda sentencia α de su lenguaje formal cumple $\vdash_T \alpha$ o $\vdash_T \neg\alpha$.

Completitud

- ¿Qué es lo mínimo que le debemos exigir a una teoría axiomática para que “sea útil”?
- ¿Qué es lo máximo que le podemos exigir a una teoría consistente?

Una teoría axiomática T es **completa** si toda sentencia α de su lenguaje formal cumple $\vdash_T \alpha$ o $\vdash_T \neg\alpha$.

Una teoría axiomática T es **decidible** si existe un algoritmo que determina en un número finito de pasos si una sentencia de su lenguaje formal es o no un teorema de T .

Completitud

- ¿Qué es lo mínimo que le debemos exigir a una teoría axiomática para que “sea útil”?
- ¿Qué es lo máximo que le podemos exigir a una teoría consistente?

Una teoría axiomática T es **completa** si toda sentencia α de su lenguaje formal cumple $\vdash_T \alpha$ o $\vdash_T \neg\alpha$.

Una teoría axiomática T es **decidible** si existe un algoritmo que determina en un número finito de pasos si una sentencia de su lenguaje formal es o no un teorema de T .

¿Se os ocurre alguna teoría completa?

Completitud

- ¿Qué es lo mínimo que le debemos exigir a una teoría axiomática para que “sea útil”?
- ¿Qué es lo máximo que le podemos exigir a una teoría consistente?

Una teoría axiomática T es **completa** si toda sentencia α de su lenguaje formal cumple $\vdash_T \alpha$ o $\vdash_T \neg\alpha$.

Una teoría axiomática T es **decidible** si existe un algoritmo que determina en un número finito de pasos si una sentencia de su lenguaje formal es o no un teorema de T .

¿Se os ocurre alguna teoría **consistente** y completa?

Completitud

- Si T es una teoría contradictoria, entonces es completa y decidible.



Completitud

- Si T es una teoría contradictoria, entonces es completa y decidible.

Completitud

- Si T es una teoría contradictoria, entonces es completa y decidible.
- Si M es un modelo de un lenguaje formal $\mathcal{L}$, la teoría axiomática $Th(M)$ cuyos axiomas propios son todas las sentencias de $\mathcal{L}$ verdaderas en M es consistente, completa, pero (en general) no decidible.

Completitud

- Si T es una teoría contradictoria, entonces es completa y decidible.
- Si M es un modelo de un lenguaje formal $\mathcal{L}$, la teoría axiomática $Th(M)$ cuyos axiomas propios son todas las sentencias de $\mathcal{L}$ verdaderas en M es consistente, completa, pero (en general) no decidible.
- Una pequeña extensión de GT es consistente, completa y decidible.

Completitud

- Si T es una teoría contradictoria, entonces es completa y decidible.
- Si M es un modelo de un lenguaje formal $\mathcal{L}$, la teoría axiomática $Th(M)$ cuyos axiomas propios son todas las sentencias de $\mathcal{L}$ verdaderas en M es consistente, completa, pero (en general) no decidible.
- Una pequeña extensión de GT es consistente, completa y decidible.
- Z^* es consistente, pero no completa.

Completitud

- Si T es una teoría contradictoria, entonces es completa y decidible.
- Si M es un modelo de un lenguaje formal $\mathcal{L}$, la teoría axiomática $Th(M)$ cuyos axiomas propios son todas las sentencias de $\mathcal{L}$ verdaderas en M es consistente, completa, pero (en general) no decidible.
- Una pequeña extensión de GT es consistente, completa y decidible.
- Z^* es consistente, pero no completa.
- Si ZF es consistente, entonces no es completa ni decidible.