

Introducción a la lógica matemática

Teoría de conjuntos I

Esteban Martínez Vañó

Universidad de Granada
Departamento de Análisis Matemático

24 de abril de 2025

Preguntas de la sesión

Preguntas de la sesión

1. ¿Qué es una teoría de conjuntos?

Preguntas de la sesión

1. ¿Qué es una teoría de conjuntos?
2. ¿Cómo podemos definir nuevos “símbolos”?

Preguntas de la sesión

1. ¿Qué es una teoría de conjuntos?
2. ¿Cómo podemos definir nuevos “símbolos”?
3. ¿Qué es un conjunto?

1 ¿Qué es una teoría de conjuntos?

2 ¿Cómo podemos definir nuevos “símbolos”?

3 ¿Qué es un conjunto?

La teoría básica de conjuntos

La teoría básica de conjuntos

Una teoría axiomática sobre el lenguaje $\mathcal{L}_{tc}$ (o una extensión de este).

La teoría básica de conjuntos

Una teoría axiomática sobre el lenguaje $\mathcal{L}_{tc}$ (o una extensión de este).

La teoría básica de conjuntos (B)

La teoría básica de conjuntos

Una teoría axiomática sobre el lenguaje $\mathcal{L}_{tc}$ (o una extensión de este).

La teoría básica de conjuntos (B)

Extensionalidad $\forall xy (\forall u (u \in x \leftrightarrow u \in y) \rightarrow x = y)$

La teoría básica de conjuntos

Una teoría axiomática sobre el lenguaje $\mathcal{L}_{tc}$ (o una extensión de este).

La teoría básica de conjuntos (B)

Extensionalidad $\forall xy (\forall u (u \in x \leftrightarrow u \in y) \rightarrow x = y)$

Par $\forall xy \exists z \forall u (u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$

La teoría básica de conjuntos

Una teoría axiomática sobre el lenguaje $\mathcal{L}_{tc}$ (o una extensión de este).

La teoría básica de conjuntos (B)

Extensionalidad $\forall xy (\forall u (u \in x \leftrightarrow u \in y) \rightarrow x = y)$

Par $\forall xy \exists z \forall u (u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$

Unión $\forall x \exists y \forall u (u \in y \leftrightarrow \exists v (v \in x \wedge u \in v))$

La teoría básica de conjuntos

Una teoría axiomática sobre el lenguaje $\mathcal{L}_{tc}$ (o una extensión de este).

La teoría básica de conjuntos (B)

Extensionalidad	$\forall xy (\forall u (u \in x \leftrightarrow u \in y) \rightarrow x = y)$
Par	$\forall xy \exists z \forall u (u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$
Unión	$\forall x \exists y \forall u (u \in y \leftrightarrow \exists v (v \in x \wedge u \in v))$
Diferencia	

La teoría básica de conjuntos

Una teoría axiomática sobre el lenguaje $\mathcal{L}_{tc}$ (o una extensión de este).

La teoría básica de conjuntos (B)

Extensionalidad	$\forall xy (\forall u (u \in x \leftrightarrow u \in y) \rightarrow x = y)$
Par	$\forall xy \exists z \forall u (u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$
Unión	$\forall x \exists y \forall u (u \in y \leftrightarrow \exists v (v \in x \wedge u \in v))$
Diferencia	$\forall xy \exists z \forall u (u \in z \leftrightarrow u \in x \wedge u \notin y)$

La teoría básica de conjuntos

Una teoría axiomática sobre el lenguaje $\mathcal{L}_{tc}$ (o una extensión de este).

La teoría básica de conjuntos (B)

Extensionalidad	$\forall xy (\forall u (u \in x \leftrightarrow u \in y) \rightarrow x = y)$
Par	$\forall xy \exists z \forall u (u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$
Unión	$\forall x \exists y \forall u (u \in y \leftrightarrow \exists v (v \in x \wedge u \in v))$
Diferencia	$\forall xy \exists z \forall u (u \in z \leftrightarrow u \in x \wedge u \notin y)$

Abreviaremos

$$\forall u \in x \alpha \equiv \forall u (u \in x \rightarrow \alpha)$$

$$\exists u \in x \alpha \equiv \exists u (u \in x \wedge \alpha)$$

1 ¿Qué es una teoría de conjuntos?

2 ¿Cómo podemos definir nuevos “símbolos”?

3 ¿Qué es un conjunto?

¿Cómo podemos definir la inclusión?

¿Cómo podemos definir la inclusión?

¿Cómo podemos definir la inclusión?

¿Cómo podemos definir la inclusión?

Diremos que x está contenido en y si todo elemento de x es un elemento de y , es decir, si

$$\forall u (u \in x \rightarrow u \in y)$$

y lo denotaremos por $x \subset y$.

¿Cómo podemos definir la inclusión?

¿Cómo podemos definir la inclusión?

Diremos que x está contenido en y si todo elemento de x es un elemento de y , es decir, si

$$\forall u(u \in x \rightarrow u \in y)$$

y lo denotaremos por $x \subset y$.

Pero, ¿qué es $\subset$?

¿Cómo podemos definir la inclusión?

¿Cómo podemos definir la inclusión?

Diremos que x está contenido en y si todo elemento de x es un elemento de y , es decir, si

$$\forall u(u \in x \rightarrow u \in y)$$

y lo denotaremos por $x \subset y$.

Pero, ¿qué es $\subset$?

Para nosotros, $x \subset y$ es solo una abreviatura, un nombre para la fórmula

$$\forall u(u \in x \rightarrow u \in y)$$

Propiedades de la inclusión



Propiedades de la inclusión

$$\vdash_B \forall x \, x \subset x$$

$$\vdash_B \forall xyz \, (x \subset y \wedge y \subset z \rightarrow x \subset z)$$

$$\vdash_B \forall xy \, (x \subset y \wedge y \subset x \rightarrow x = y)$$

¿Cómo podemos definir un par desordenado?

El axioma del par nos dice que dados dos conjuntos x e y existe un conjunto z cuyos únicos elementos son x e y .

¿Cómo podemos definir un par desordenado?

El axioma del par nos dice que dados dos conjuntos x e y existe un conjunto z cuyos únicos elementos son x e y .

¿Nos basta esto para “ponerle nombre” a este conjunto z ?

¿Cómo podemos definir un par desordenado?

El axioma del par nos dice que dados dos conjuntos x e y existe un conjunto z cuyos únicos elementos son x e y .

¿Nos basta esto para “ponerle nombre” a este conjunto z ?

En B podemos probar

$$\forall x \exists z x \in z$$

¿Tiene sentido ponerle nombre al conjunto z del teorema anterior?

¿Qué lo diferencia del conjunto cuya existencia nos da el axioma del par?

¿Cómo podemos definir un par desordenado?

El axioma del par nos dice que dados dos conjuntos x e y existe un conjunto z cuyos únicos elementos son x e y .

¿Nos basta esto para “ponerle nombre” a este conjunto z ?

En B podemos probar

$$\forall x \exists z x \in z$$

¿Tiene sentido ponerle nombre al conjunto z del teorema anterior?

¿Qué lo diferencia del conjunto cuya existencia nos da el axioma del par?

Por el axioma de extensionalidad y el axioma del par **existe un único conjunto** z cuyos únicos elementos son x e y , luego podemos denotar a dicho conjunto z por $\{x, y\}$.

¿Cómo podemos definir un par desordenado?

El axioma del par nos dice que dados dos conjuntos x e y existe un conjunto z cuyos únicos elementos son x e y .

¿Nos basta esto para “ponerle nombre” a este conjunto z ?

En B podemos probar

$$\forall x \exists z x \in z$$

¿Tiene sentido ponerle nombre al conjunto z del teorema anterior?

¿Qué lo diferencia del conjunto cuya existencia nos da el axioma del par?

Por el axioma de extensionalidad y el axioma del par **existe un único conjunto** z cuyos únicos elementos son x e y , luego podemos denotar a dicho conjunto z por $\{x, y\}$.

Pero, ¿qué es $\{x, y\}$?

¿Cómo podemos definir un par desordenado?

Tenemos tres posibilidades:

1. Añadir al lenguaje $\mathcal{L}_{tc}$ un nuevo funtor diádico f y añadir a B el axioma

$$\forall xyu (u \in fxy \leftrightarrow u = x \vee u = y)$$

¿Cómo podemos definir un par desordenado?

Tenemos tres posibilidades:

1. Añadir al lenguaje $\mathcal{L}_{tc}$ un nuevo funtor diádico $\{\cdot, \cdot\}$ y añadir a B el axioma

$$\forall xy u (u \in \{x, y\} \leftrightarrow u = x \vee u = y)$$

¿Cómo podemos definir un par desordenado?

Tenemos tres posibilidades:

1. Añadir al lenguaje $\mathcal{L}_{tc}$ un nuevo funtor diádico $\{\cdot, \cdot\}$ y añadir a B el axioma

$$\forall xyu (u \in \{x, y\} \leftrightarrow u = x \vee u = y)$$

2. Considerar que $\{x, y\}$ no es “nada”, sino una abreviatura en cada fórmula que lo contenga:

$$w \in \{x, y\} \equiv w = x \vee w = y$$

$$w = \{x, y\} \equiv \exists z (w = z \wedge \forall u (u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y))$$

$$\{x, y\} \in w \equiv \exists z \in w \forall u (u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$$

¿Cómo podemos definir un par desordenado?

Tenemos tres posibilidades:

1. Añadir al lenguaje $\mathcal{L}_{tc}$ un nuevo funtor diádico $\{\cdot, \cdot\}$ y añadir a B el axioma

$$\forall xyu (u \in \{x, y\} \leftrightarrow u = x \vee u = y)$$

2. Considerar que $\{x, y\}$ no es “nada”, sino una abreviatura en cada fórmula que lo contenga:

$$w \in \{x, y\} \equiv w = x \vee w = y$$

$$w = \{x, y\} \equiv \exists z (w = z \wedge \forall u (u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y))$$

$$\{x, y\} \in w \equiv \exists z \in w \forall u (u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$$

3. Utilizar el descriptor para definir $\{x, y\}$ como una abreviatura:

$$\{x, y\} \equiv z \mid \forall u (u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$$

¿Cómo podemos definir un par desordenado?



¿Cómo podemos definir un par desordenado?

Si llamamos

$$\alpha \equiv \forall u (u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$$

sabemos que

$$\vdash_B \exists! z \alpha,$$

luego por la regla (DP) tenemos que

$$\vdash_B S_z^z |^\alpha \alpha$$

¿Cómo podemos definir un par desordenado?

Si llamamos

$$\alpha \equiv \forall u (u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$$

sabemos que

$$\vdash_B \exists! z \alpha,$$

luego por la regla (DP) tenemos que

$$\vdash_B \forall u (u \in z | \alpha \leftrightarrow u = x \vee u = y)$$

¿Cómo podemos definir un par desordenado?

Si llamamos

$$\alpha \equiv \forall u (u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$$

sabemos que

$$\vdash_B \exists! z \alpha,$$

luego por la regla (DP) tenemos que

$$\vdash_B \forall u (u \in \{x, y\} \leftrightarrow u = x \vee u = y)$$

Unión y diferencia de conjuntos

De igual modo, podemos definir

$$\bigcup x \equiv z \mid \forall u (u \in z \leftrightarrow \exists v (v \in x \wedge u \in v))$$

y

$$x \setminus y \equiv z \mid \forall u (u \in z \leftrightarrow u \in x \wedge u \notin y)$$

Unión y diferencia de conjuntos

De igual modo, podemos definir

$$\bigcup x \equiv z \mid \forall u (u \in z \leftrightarrow \exists v (v \in x \wedge u \in v))$$

y

$$x \setminus y \equiv z \mid \forall u (u \in z \leftrightarrow u \in x \wedge u \notin y)$$

¿Cómo definimos la unión e intersección de dos conjuntos?

Unión y diferencia de conjuntos

De igual modo, podemos definir

$$\bigcup x \equiv z \mid \forall u (u \in z \leftrightarrow \exists v (v \in x \wedge u \in v))$$

y

$$x \setminus y \equiv z \mid \forall u (u \in z \leftrightarrow u \in x \wedge u \notin y)$$

¿Cómo definimos la unión e intersección de dos conjuntos?

$$x \cup y \equiv z \mid \forall u (u \in z \leftrightarrow u \in x \vee u \in y)$$

$$x \cap y \equiv z \mid \forall u (u \in z \leftrightarrow u \in x \wedge u \in y)$$

Unión y diferencia de conjuntos

De igual modo, podemos definir

$$\bigcup x \equiv z \mid \forall u (u \in z \leftrightarrow \exists v (v \in x \wedge u \in v))$$

y

$$x \setminus y \equiv z \mid \forall u (u \in z \leftrightarrow u \in x \wedge u \notin y)$$

¿Cómo definimos la unión e intersección de dos conjuntos?

$$x \cup y \equiv z \mid \forall u (u \in z \leftrightarrow u \in x \vee u \in y)$$

$$x \cap y \equiv z \mid \forall u (u \in z \leftrightarrow u \in x \wedge u \in y)$$

¿Cómo definimos el conjunto vacío?

Unión y diferencia de conjuntos

De igual modo, podemos definir

$$\bigcup x \equiv z \mid \forall u (u \in z \leftrightarrow \exists v (v \in x \wedge u \in v))$$

y

$$x \setminus y \equiv z \mid \forall u (u \in z \leftrightarrow u \in x \wedge u \notin y)$$

¿Cómo definimos la unión e intersección de dos conjuntos?

$$x \cup y \equiv z \mid \forall u (u \in z \leftrightarrow u \in x \vee u \in y)$$

$$x \cap y \equiv z \mid \forall u (u \in z \leftrightarrow u \in x \wedge u \in y)$$

¿Cómo definimos el conjunto vacío?

$$\emptyset \equiv z \mid \forall u u \notin z$$

Pares ordenados

Dados dos conjuntos x, y definimos

$$(x, y) \equiv \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

Se cumple entonces que

$$\vdash_B \forall xyx'y' ((x, y) = (x', y') \leftrightarrow x = x' \wedge y = y')$$

1 ¿Qué es una teoría de conjuntos?

2 ¿Cómo podemos definir nuevos “símbolos”?

3 ¿Qué es un conjunto?

¿Qué es un conjunto?



¿Qué es un conjunto?



¿Qué es un conjunto?

Un conjunto será cualquier objeto en un modelo fijado de $\mathcal{B}$.

¿Qué es un conjunto?

Un conjunto será cualquier objeto en un modelo fijado de B .

Más aún, si M es un modelo de B y a es un objeto de M , observemos que podemos definir la colección (metamatemática) de todos los objetos b de M que cumplen

$$M \models (y \in x) \left[v_{xy}^{ab} \right],$$

a la cual llamaremos la **extensión** de a .

¿Qué es un conjunto?

Un conjunto será cualquier objeto en un modelo fijado de B .

Más aún, si M es un modelo de B y a es un objeto de M , observemos que podemos definir la colección (metamatemática) de todos los objetos b de M que cumplen

$$M \models (y \in x) \left[v_{xy}^{ab} \right],$$

a la cual llamaremos la **extensión** de a .

Ejercicio: Si a, a' son conjuntos (objetos de M) con la misma extensión, entonces $a \equiv a'$.

¿Qué es un conjunto?

Un conjunto será cualquier objeto en un modelo fijado de B .

Más aún, si M es un modelo de B y a es un objeto de M , observemos que podemos definir la colección (metamatemática) de todos los objetos b de M que cumplen

$$M \models (y \in x) \left[v_{xy}^{ab} \right],$$

a la cual llamaremos la **extensión** de a .

Ejercicio: Si a, a' son conjuntos (objetos de M) con la misma extensión, entonces $a \equiv a'$.

¿Podemos entonces hablar de la colección de todos los conjuntos?

Clases

Si $\phi(x)$ es una fórmula de $\mathcal{L}_{tc}$ la **clase** A definida por ϕ será la colección de objetos a de M que cumplan

$$M \models \phi[v_x^a],$$

a los cuales llamaremos la **extensión** de A (donde la valoración será relevante si ϕ tiene más variables libres aparte de x).

Denotaremos a la clase A por

$$A \equiv \{x | \phi(x)\}$$

Clases

Si $\phi(x)$ es una fórmula de $\mathcal{L}_{tc}$ la **clase** A definida por ϕ será la colección de objetos a de M que cumplan

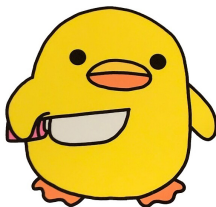
$$M \models \phi[v_x^a],$$

a los cuales llamaremos la **extensión** de A (donde la valoración será relevante si ϕ tiene más variables libres aparte de x).

Denotaremos a la clase A por

$$A \equiv \{x | \phi(x)\}$$

Pero, ¿formalmente que es una clase?



Clases

Formalmente la clase A definida por la fórmula $\phi(x)$ no es más que la propia fórmula y si B es otra clase definida por la fórmula $\psi(x)$ denotaremos:

$$x \in A \equiv \phi(x)$$

$$y = A \equiv \forall x(x \in y \leftrightarrow x \in A) \equiv \forall x(x \in y \leftrightarrow \phi(x))$$

$$A = B \equiv \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B) \equiv \forall x(\phi(x) \leftrightarrow \psi(x))$$

$$A \in z \equiv \exists y \in z \ y = A \equiv \exists y \in z \forall x(x \in y \leftrightarrow \phi(x))$$

$$A \in B \equiv \exists y(y = A \wedge y \in B) \equiv \exists y(\forall x(x \in y \leftrightarrow \phi(x)) \wedge \psi(y))$$

Clases

Formalmente la clase A definida por la fórmula $\phi(x)$ no es más que la propia fórmula y si B es otra clase definida por la fórmula $\psi(x)$ denotaremos:

$$x \in A \equiv \phi(x)$$

$$y = A \equiv \forall x(x \in y \leftrightarrow x \in A) \equiv \forall x(x \in y \leftrightarrow \phi(x))$$

$$A = B \equiv \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B) \equiv \forall x(\phi(x) \leftrightarrow \psi(x))$$

$$A \in z \equiv \exists y \in z \ y = A \equiv \exists y \in z \forall x(x \in y \leftrightarrow \phi(x))$$

$$A \in B \equiv \exists y(y = A \wedge y \in B) \equiv \exists y(\forall x(x \in y \leftrightarrow \phi(x)) \wedge \psi(y))$$

Podemos entonces expresar cualquier fórmula en términos de clases:

$$A \subset B \equiv \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \equiv \forall x(\phi(x) \rightarrow \psi(x)).$$

¿Cuándo una clase será un conjunto?

¿Cuándo una clase será un conjunto?

Diremos que una clase $A = \{x | \phi(x)\}$ es un conjunto si existe un conjunto en M con la misma extensión que A , formalmente si se cumple que

$$\exists y \, y = A \equiv \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow \phi(x))$$

Si una clase no es un conjunto diremos que es una **clase propia**.

Clases

¿Cuándo una clase será un conjunto?

Diremos que una clase $A = \{x | \phi(x)\}$ es un conjunto si existe un conjunto en M con la misma extensión que A , formalmente si se cumple que

$$\exists y y = A \equiv \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow \phi(x))$$

Si una clase no es un conjunto diremos que es una **clase propia**. Definamos la clase de Russell

$$R = \{x | x \notin x\}$$

$$¿R \in R? \quad ¿R \notin R?$$

Clases

¿Cuándo una clase será un conjunto?

Diremos que una clase $A = \{x | \phi(x)\}$ es un conjunto si existe un conjunto en M con la misma extensión que A , formalmente si se cumple que

$$\exists y y = A \equiv \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow \phi(x))$$

Si una clase no es un conjunto diremos que es una **clase propia**. Definamos la clase de Russell

$$R = \{x | x \notin x\}$$

$$¿R \in R? \quad ¿R \notin R?$$

R no es un conjunto, luego en particular no puede pertenecer a ninguna otra clase o conjunto y, por tanto, $R \notin R$, es decir, la extensión de la clase de Russell nunca será la extensión de un conjunto en ningún modelo.