

Teorema de integración por partes generalizado

Sean $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tales que f es derivable y f' integrable, y g integrable con primitiva G . Entonces

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x) dx$$

Demstración:

Observamos que

$$[f(x)G(x)]' = f'(x)G(x) + f(x)g(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

luego $f \cdot G$ es una primitiva de $f' \cdot G + f \cdot g$.

Como f' , g y G son integrables (las dos primeras por hipótesis y G por ser continua)

tenemos que $f'G$ y $f \cdot g$ lo son, y así también $f'G + f \cdot g$.

Por el 2° TFC

$$\int_a^b f(x)g(x) dx + \int_a^b f'(x)G(x) dx = \int_a^b [f(x)g(x) + f'(x)G(x)] dx = [f(x)G(x)]_a^b$$

y así se obtiene lo deseado. ■