- Son equivalentes:

    i) Todo subconjunto infinito de $\mathbb{R}$ contiene un subconjunto infinito numerable

    ii) $\mathrm{Fin}(\mathbb{R}) \equiv$ Todo subconjunto infinito de $\mathbb{R}$ es D-infinito.

<u>Demostración:</u>

ii) $\Rightarrow$ i)

Sea $X \subset \mathbb{R}$ infinito, entonces por ii) es D-infinito y existe pues $f: \mathbb{N} \to X$ inyectiva. Así pues, $f(\mathbb{N}) \subset X$ siendo $f: \mathbb{N} \to f(\mathbb{N})$ una biyección, luego $f(\mathbb{N})$ es un subconjunto numerable de X.

i) $\Rightarrow$ ii)

Sea $X \subset \mathbb{R}$ infinito, entonces por i) existe $A \subset X$ numerable. Así, existe una biyección $g: \mathbb{N} \to A$ y, por tanto, $g: \mathbb{N} \to X$ es inyectiva concluyendo que X es D-infinito. ■

- Dado $X \subset \mathbb{R}$ no numerable existe una aplicación inyectiva $f: \mathbb{N} \to X$ tal que

$$f(n) > 0, \ \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad \sum_{n \geq 1}^{\infty} f(n) = +\infty$$

o

$$f(n) < 0, \ \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = -\infty$$

Demostración (Usa $CC(\mathbb{R})$):

Observemos que si son

$$X^{+} = \{x \in X : x > 0\}$$

$$X^{-} = \{x \in X : x < 0\}$$

entonces

$$X = X^{+} \cup X^{-} \cup (X \cap \{0\})$$

y, por tanto, X^{+} o X^{-} es no numerable.

Supongamos que X^{+} lo es (el otro caso es análogo) y observemos que

$$X^{+} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : x > 1/n\}$$

Si cada conjunto en la unión fuera a lo sumo numerable, entonces X^{+} sería numerable, luego existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$A_{n_0} = \{x \in X : x > 1/n_0\}$$

es no numerable.

Como $CC(\mathbb{R})$ implica $Fin(\mathbb{R})$, tenemos que A_{n_0} es Dedekind-infinito y existe pues $f : \mathbb{N} \to A_{n_0}$ inyectiva (luego $f : \mathbb{N} \to X$) inyectiva, siendo $f(n) > 1/n_0 > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Además,

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) > \sum_{n=1}^{N} 1/n_0 = \frac{N}{n_0} \xrightarrow[N \to +\infty]{} +\infty$$

luego $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = +\infty$. ∎