Teorema 1. *Demuestra que si A es un conjunto conulo de $(0, +\infty)$, es decir, su complemento tiene medida (de Lebesgue) nula, entonces todo real positivo puede expresarse como producto de dos elementos de A.*

Demostración:

Denotemos por B el complemento de A en $(0, +\infty)$. Como B tiene medida nula, se cumple que A es medible.

Ahora, dado $\alpha > 0$ para probar el resultado basta ver que el conjunto

$$M_\alpha = \left\{ \frac{\alpha}{x} : x \in A \cap (0, \alpha) \right\}$$

no está contenido en B. Observemos que M_α no es vacío al ser A denso en $(0, +\infty)$.

Supongamos pues, por reducción al absurdo, que $M_\alpha \subset B$. Como B es un conjunto de medida nula, se tiene entonces que M_α es medible y además tiene medida nula.

Por tanto, dado $\varepsilon > 0$ tenemos que existe una sucesión de intervalos $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$, con $I_n = (a_n, b_n)$, tales que

$$M_\alpha \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n - a_n < \frac{\varepsilon}{\alpha}$$

Además, como $M_\alpha \subset (1, +\infty)$ podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $a_n \geq 1$ para cada natural n.

Con esto, observemos que si denotamos por $J_n = \left(\frac{\alpha}{b_n}, \frac{\alpha}{a_n} \right)$ entonces se cumple que

$$A \cap (0, \alpha) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$$

y que (como $a_n b_n \geq 1$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \frac{b_n - a_n}{a_n b_n} \leq \alpha \sum_{n=1}^{\infty} b_n - a_n < \varepsilon.$$

Concluimos entonces que $A \cap (0, \alpha)$ tiene medida nula, pero esta es la contradicción buscada pues entonces, como

$$(0, \alpha) = [(0, \alpha) \cap A] \cup [(0, \alpha) \cap B]$$

se tendría que $(0, \alpha)$ tiene medida nula, lo cual claramente no es así. ■

Podemos dar una demostración más sencilla utilizando el siguiente resultado (Teorema 4.39, Análisis Matemático, Carlos Ivorra):

Teorema 2. *La imagen de un conjunto nulo por una función diferenciable entre dos abiertos de $\mathbb{R}^n$ es un conjunto nulo.*

Demostración alternativa del Teorema 1:

Dado $r > 0$ basta ver que $B = \{r/a \mid a \in A\}$ no está contenido en $\mathbb{R} \setminus A$.

Definiendo $f : (0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$ biyectiva dada por $a \mapsto r/a$, se cumple entonces que $B = f(A)$ y que

$$(0, +\infty) = f(A) \cup f(\mathbb{R} \setminus A).$$

Ahora bien, la imagen de un conjunto nulo por una aplicación diferenciable es nula, así que $f(\mathbb{R} \setminus A)$ es nulo y $B = f(A)$ tiene medida infinita, con lo que en particular no puede estar contenido en $\mathbb{R} \setminus A$. $\blacksquare$