• Series de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(n)}{(n+a)!}$ ($a \in \mathbb{N}$, P polinomio)

Lema 1: Dado $a \in \mathbb{N}$, el conjunto $\{P_0, P_1, \dots, P_k\}$ con

$$\left. \begin{aligned} P_0 &= 1 \\ P_n &= \prod_{i=0}^{n-1} (x+a-i), \quad n = 1, \dots, k \end{aligned} \right\}$$

es base del espacio vectorial $\mathbb{R}_k[x]$

Demostración:

Como la dimensión de $\mathbb{R}_k[x]$ es $k+1$, basta ver que $P_0, \dots, P_k$ son lin. indep.

Veamoslo por inducción en k:

- $k=0$ es claro
- Supongamos cierto para k y veamos $k+1$.

(*) $\mathbb{N}$ incluye el cero

Sin más, si es

$$\alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \cdots + \alpha_k p_k + \alpha_{k+1} p_{k+1} = 0$$

entonces debe ser $\alpha_{k+1} = 0$.

En caso contrario, como

$$\deg(p_n) = n, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

tendríamos que

$$\deg(\alpha_0 p_0 + \cdots + \alpha_k p_k + \alpha_{k+1} p_{k+1}) = k+1$$

lo que supone una contradicción.

Así, $\alpha_{k+1} = 0$ y tenemos que

$$\alpha_0 p_0 + \cdots + \alpha_k p_k = 0$$

Por HI, $p_0, \dots, p_k$ son lin. indep. en $\mathbb{R}_k[x]$, luego lo son en $\mathbb{R}_{k+1}[x]$ y así, $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$ y concluimos que $p_0, \dots, p_{k+1}$ son lin. indep.

Lema 2: Dados $a, k \in \mathbb{N}$ y P_k como en el Lema 1,

se cumple:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_k(n)}{(n+a)!} = e + \sum_{n=0}^{k-1} \frac{P_k(n)}{(n+a)!} - \sum_{n=0}^{a-1} \frac{1}{n!}$$

<u>Demostración</u>:

Si $n \geq k$

$$\frac{P_k(n)}{(n+a)!} = \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(n+a-i)}{(n+a-k)! \prod_{i=0}^{k-1}(n+a-i)} = \frac{1}{(n+a-k)!}$$

Así,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_k(n)}{(n+a)!} = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{P_k(n)}{(n+a)!} + \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{(n+a-k)!} = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{P_k(n)}{(n+a)!} +$$

$$+ \sum_{n=a}^{\infty} \frac{1}{n!} = e + \sum_{n=0}^{k-1} \frac{P_k(n)}{(n+a)!} - \sum_{n=0}^{a-1} \frac{1}{n!} \quad \blacksquare$$

Con todo, dado $p \in \mathbb{R}[x]$ de grado k y $a \in \mathbb{N}$,

por el Lema 1 podemos expresar

$$p(x) = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_k P_k$$

para ciertos $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$.

Utilizando entonces el Lema 2 concluimos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(n)}{(n+a)!} = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_i(n)}{(n+a)!} \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \left[e + \sum_{n=0}^{i-1} \frac{P_i(n)}{(n+a)!} - \sum_{n=0}^{a-1} \frac{1}{n!} \right]$$

Denotando por $A = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(n)}{(n+a)!} = A \cdot \left[e - \sum_{n=0}^{a-1} \frac{1}{n!} \right] + \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \sum_{n=0}^{i-1} \frac{P_i(n)}{(n+a)!}$$