• Si $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es dos veces derivable en x_0,

entonces

$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)}{h^2}$$

Demostración:

Por el teorema de Taylor

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + t(x)(x-x_0)^2$$

siendo

$$\lim_{x \to x_0} t(x) = 0$$

Así

$$\left.\begin{aligned} f(x_0+h) &= f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + t(x_0+h)h^2 \\ f(x_0-h) &= f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + t(x_0-h)h^2 \end{aligned}\right\}$$

y con ello

$$\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2} = f''(x_0) + t(x_0+h) + t(x_0-h)$$

Por tanto, por el teorema de composición de límites, concluimos lo deseado.