

Introducción a la lógica matemática

¿Qué es el razonamiento matemático?

Esteban Martínez Vañó

Universidad de Granada
Departamento de Análisis Matemático

20 de febrero de 2025

Preguntas de la sesión

Preguntas de la sesión

1. ¿Cómo se razona en matemáticas?

Preguntas de la sesión

1. ¿Cómo se razona en matemáticas?
2. ¿En qué consiste la formalización de las matemáticas?

Preguntas de la sesión

1. ¿Cómo se razona en matemáticas?
2. ¿En qué consiste la formalización de las matemáticas?
3. ¿Qué son los números naturales?

1 ¿Cómo se razona en matemáticas?

2 ¿En qué consiste la formalización de las matemáticas?

3 ¿Qué son los números naturales?

¿Cómo se razona en matemáticas?

¿Cómo se razona en matemáticas?

- Existen infinitos números primos.

¿Cómo se razona en matemáticas?

- Existen infinitos números primos.

Si únicamente hubiera una cantidad finita de primos $p_1, p_2, \dots, p_n$, entonces el número

$$N = p_1 p_2 \cdots p_n + 1,$$

no puede ser primo, luego tiene que tener algún divisor primo, pero ninguno de los p_i lo divide (todos dejan resto 1).

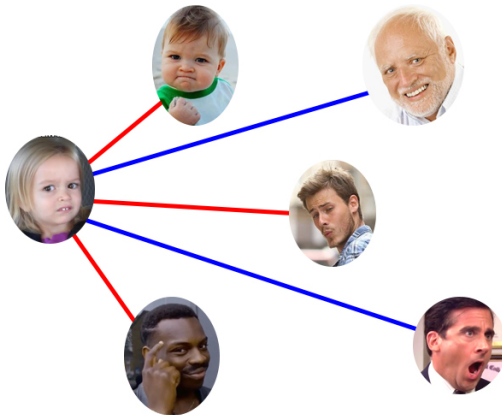
¿Cómo se razona en matemáticas?

- En cualquier fiesta con al menos 6 personas, siempre hay tres que o bien se conocen todos entre sí, o bien no se conoce ninguno.



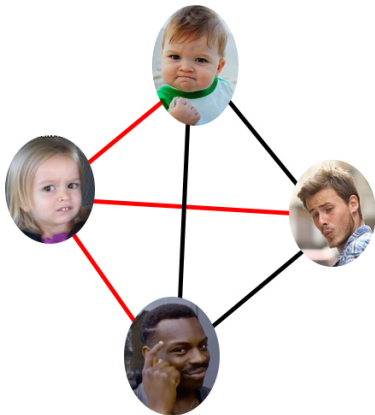
¿Cómo se razona en matemáticas?

- En cualquier fiesta con al menos 6 personas, siempre hay tres que o bien se conocen todos entre sí, o bien no se conoce ninguno.



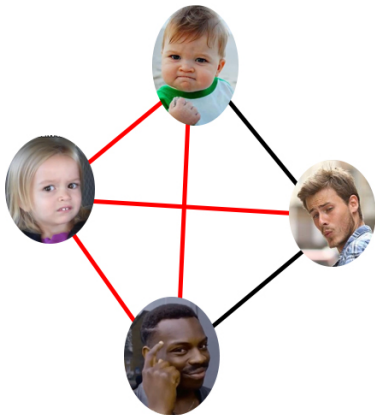
¿Cómo se razona en matemáticas?

- En cualquier fiesta con al menos 6 personas, siempre hay tres que o bien se conocen todos entre sí, o bien no se conoce ninguno.



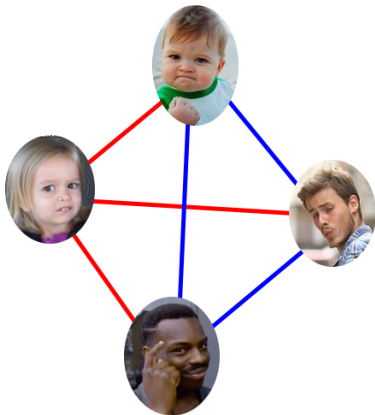
¿Cómo se razona en matemáticas?

- En cualquier fiesta con al menos 6 personas, siempre hay tres que o bien se conocen todos entre sí, o bien no se conoce ninguno.



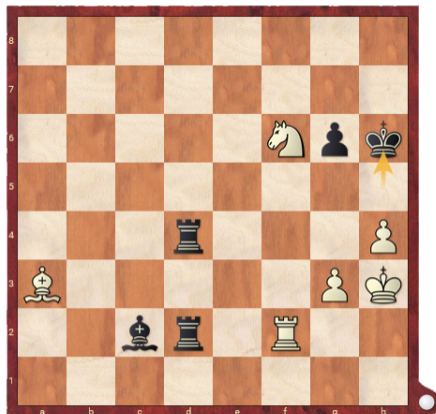
¿Cómo se razona en matemáticas?

- En cualquier fiesta con al menos 6 personas, siempre hay tres que o bien se conocen todos entre sí, o bien no se conoce ninguno.



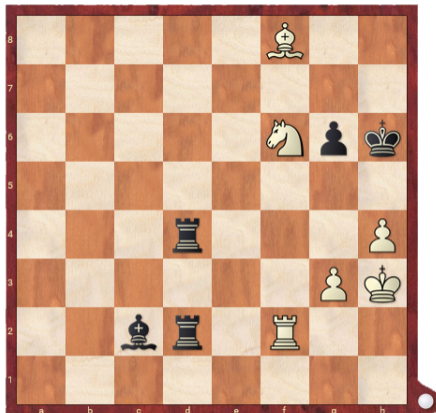
¿Cómo se razona en matemáticas?

- Juegan las blancas y dan mate en 2 movimientos:



¿Cómo se razona en matemáticas?

- Juegan las blancas y dan mate en 2 movimientos:



¿Cómo se razona en matemáticas?

- No existe ninguna función sobreyectiva entre un conjunto y el conjunto formado por todos sus subconjuntos. (Georg Cantor)

¿Cómo se razona en matemáticas?

- No existe ninguna función sobreyectiva entre un conjunto y el conjunto formado por todos sus subconjuntos. (Georg Cantor)

Si existiera dicha función, digamos que es $f : X \longrightarrow \mathcal{P}X$, entonces para cada $x \in X$ se tiene que $f(x)$ es un subconjunto de X , con lo que o bien $x \in f(x)$, o bien $x \notin f(x)$. Podemos entonces formar el conjunto

$$C = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}.$$

Como f es sobreyectiva existe un $c \in X$ tal que $f(c) = C$, pero esto supone una contradicción:

- Si $c \in f(c)$, entonces $c \in C$ y, por definición, $c \notin f(c)$.
- Si $c \notin f(c)$, entonces por definición $c \in C$, pero también $c \notin f(c) = C$.

¿Cómo se razona en matemáticas?

¿Qué pasa si aplicamos el resultado anterior a V el conjunto de todos los conjuntos?

¿Cómo se razona en matemáticas?

¿Qué pasa si aplicamos el resultado anterior a V el conjunto de todos los conjuntos?

- Por un lado, el resultado nos dice que no existe ninguna aplicación sobreyectiva $f : V \longrightarrow \mathcal{P}V$.

¿Cómo se razona en matemáticas?

¿Qué pasa si aplicamos el resultado anterior a V el conjunto de todos los conjuntos?

- Por un lado, el resultado nos dice que no existe ninguna aplicación sobreyectiva $f : V \longrightarrow \mathcal{P}V$.
- Por otro lado, podemos considerar la función $f : V \longrightarrow \mathcal{P}V$ definida como sigue:
 - Si $x \in V$ es un conjunto cuyos elementos son conjuntos, es decir, si x es un subconjunto de V , definimos $f(x) = x$.
 - Si $x \in V$ es un conjunto tal que alguno de sus elementos no es un conjunto, definimos $f(x) = V$.

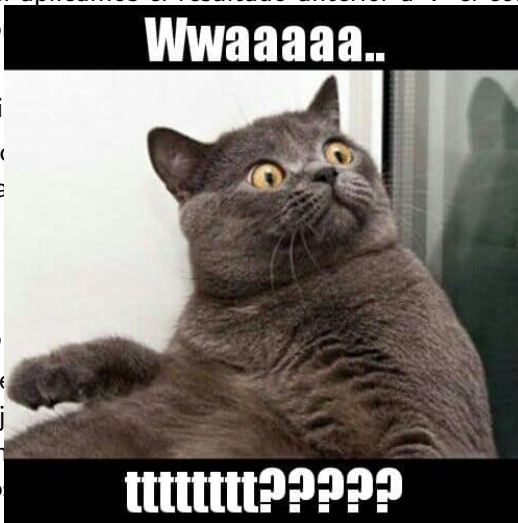
Entonces f es sobreyectiva, pues dado $x \in \mathcal{P}V$, es decir, un subconjunto de V , está claro que es un conjunto tal que todos sus elementos son conjuntos (pues son elementos de V) y tenemos entonces que $x = f(x)$.

¿Cómo se razona en matemáticas?

¿Qué pasa si aplicamos el resultado anterior a V el conjunto de todos los co

- Por un aplicaci
- Por otro definida
 - Si es
 - Si no

Entonces subconj sus elemen tenemos



ninguna

$V \rightarrow \mathcal{P}V$

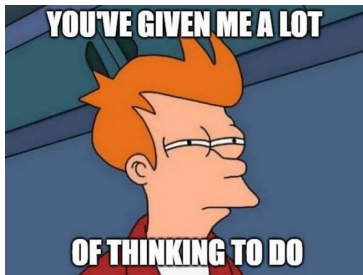
conjuntos,
os $f(x) = x$.
s elementos

s decir, un
al que todos
de V) y

¿Cómo se razona en matemáticas?

Toca pensar:

- ¿Podría ocurrir una paradoja como la del último ejemplo con los tres primeros?
- ¿Qué los diferencia del último?
- ¿Hay algún fallo en la “forma” de la demostración del teorema de Cantor?



¿Cómo se razona en matemáticas?

Razonamientos **informales** o **semánticos**

Consisten en dar una serie de afirmaciones que concluyan con la tesis que se desea probar de modo que nos aseguremos que cada afirmación dada es verdadera. El **significado** de cada afirmación es fundamental para determinar la validez del razonamiento. ¡Es importante no confundir informal con poco riguroso!

¿Cómo se razona en matemáticas?

Razonamientos **informales** o **semánticos**

Consisten en dar una serie de afirmaciones que concluyan con la tesis que se desea probar de modo que nos aseguremos que cada afirmación dada es verdadera. El **significado** de cada afirmación es fundamental para determinar la validez del razonamiento. ¡Es importante no confundir informal con poco riguroso!
Los tres primeros ejemplos son razonamientos informales.

¿Cómo se razona en matemáticas?

Razonamientos **informales** o **semánticos**

Consisten en dar una serie de afirmaciones que concluyan con la tesis que se desea probar de modo que nos aseguremos que cada afirmación dada es verdadera. El **significado** de cada afirmación es fundamental para determinar la validez del razonamiento. ¡Es importante no confundir informal con poco riguroso!
Los tres primeros ejemplos son razonamientos informales.

Un buen razonamiento es aquel que si uno está de acuerdo con las premisas y no con las conclusiones, entonces mueres.

Filósofo cuyo nombre no consigo recordar.

¿Cómo se razona en matemáticas?

En matemáticas los objetos sobre los que se razona son inmutables, eternos y atemporales, por eso tiene un sentido preciso establecer criterios de verdad absolutos y objetivos.

¿Cómo se razona en matemáticas?

En matemáticas los objetos sobre los que se razona son inmutables, eternos y atemporales, por eso tiene un sentido preciso establecer criterios de verdad absolutos y objetivos.

Arquímedes será recordado, mientras que Esquilo cae en el olvido, porque los lenguajes mueren, pero las ideas matemáticas no. Puede que "inmortalidad" sea una palabra absurda, pero es muy probable que sea un matemático el que tenga más probabilidades de alcanzarla, sea cual sea su significado.

G. H. Hardy

¿Cómo se razona en matemáticas?

Razonamientos formales o sintácticos

Consisten en dar una serie de afirmaciones que concluyan con la tesis que se desea probar de modo que cada afirmación se deduce de las anteriores por medio de una reglas prefijadas que cumplen:

- Únicamente atienden a la forma de las afirmaciones involucradas, no a su significado.
- Al aplicarle la regla a una afirmación verdadera debe obtenerse una afirmación verdadera.

¿Cómo se razona en matemáticas?

Razonamientos formales o sintácticos

Consisten en dar una serie de afirmaciones que concluyan con la tesis que se desea probar de modo que cada afirmación se deduce de las anteriores por medio de una reglas prefijadas que cumplen:

- Únicamente atienden a la forma de las afirmaciones involucradas, no a su significado.
- Al aplicarle la regla a una afirmación verdadera debe obtenerse una afirmación verdadera.

Por ejemplo, los siguientes son razonamientos formales:

Todo A es B		Todo A es B
C es A		C no es B
luego C es B		luego C no es A

¿Cómo se razona en matemáticas?

Razonamientos formales o sintácticos

Sin embargo, el siguiente no es un razonamiento formal:

Todo A es B

C no es A

luego C no es B

¿Cómo se razona en matemáticas?

Razonamientos formales o sintácticos

Sin embargo, el siguiente no es un razonamiento formal:

Todo A es B
 C no es A
luego C no es B

En efecto, el siguiente ejemplo muestra que de afirmaciones verdaderas concluye con afirmaciones falsas:

Todos los humanos tienen corazón,
los perros no son humanos,
luego los perros no tienen corazón.

¿Cómo se razona en matemáticas?

Con todo lo que hemos dicho, ¿cuál es entonces la conclusión que podemos extraer sobre el teorema de Cantor?

¿Cómo se razona en matemáticas?

Con todo lo que hemos dicho, ¿cuál es entonces la conclusión que podemos extraer sobre el teorema de Cantor?

La conclusión es que no podemos razonar informalmente con cualquier concepto, por ejemplo, no podemos razonar informalmente con el concepto general de “conjunto”. Necesitaremos razonar formalmente con ellos.

¿Cómo se razona en matemáticas?

Con todo lo que hemos dicho, ¿cuál es entonces la conclusión que podemos extraer sobre el teorema de Cantor?

La conclusión es que no podemos razonar informalmente con cualquier concepto, por ejemplo, no podemos razonar informalmente con el concepto general de “conjunto”. Necesitaremos razonar formalmente con ellos.

Las matemáticas podrían definirse como la ciencia en la que nunca sabemos de qué estamos hablando ni si lo que decimos es verdad.

Bertrand Russell

¿Cómo se razona en matemáticas?

¿Qué debe cumplir un concepto para poder razonar informalmente con él?

¿Cómo se razona en matemáticas?

¿Qué debe cumplir un concepto para poder razonar informalmente con él?

- Que todos los objetos que determina estén descritos sin ningún tipo de ambigüedad (p.e. los números naturales o los conjuntos de números naturales, pero no los conjuntos en general).

¿Cómo se razona en matemáticas?

¿Qué debe cumplir un concepto para poder razonar informalmente con él?

- Que todos los objetos que determina estén descritos sin ningún tipo de ambigüedad (p.e. los números naturales o los conjuntos de números naturales, pero no los conjuntos en general).
- Que para cualquier propiedad precisa y objetiva sobre estos objetos no exista ninguna duda sobre que significa que todos los objetos la cumplan o que exista algún objeto que la cumpla (p.e. los números naturales, pero NO los conjuntos de números naturales).

¿Cómo se razona en matemáticas?

¿Qué debe cumplir un concepto para poder razonar informalmente con él?

- Que todos los objetos que determina estén descritos sin ningún tipo de ambigüedad (p.e. los números naturales o los conjuntos de números naturales, pero no los conjuntos en general).
- Que para cualquier propiedad precisa y objetiva sobre estos objetos no exista ninguna duda sobre que significa que todos los objetos la cumplan o que exista algún objeto que la cumpla (p.e. los números naturales, pero NO los conjuntos de números naturales).

Diremos que un **conjunto está bien definido** cuando se cumplan los dos puntos anteriores para sus objetos.

¿Cómo se razona en matemáticas?

¿Por qué hemos excluido a los subconjuntos de los números naturales como objetos con los que trabajar informalmente?

¿Cómo se razona en matemáticas?

¿Por qué hemos excluido a los subconjuntos de los números naturales como objetos con los que trabajar informalmente? Consideremos las siguientes propiedades, la primera sobre los números naturales, la segunda sobre los subconjuntos de números naturales:

- Si n es un número natural par mayor que 2, entonces se puede expresar como suma de dos números primos.
- Si A es un subconjunto infinito de $\mathcal{P}\mathbb{N}$, entonces o bien A es equipotente con $\mathbb{N}$, o bien lo es con $\mathcal{P}\mathbb{N}$.

¿Cómo se razona en matemáticas?

¿Por qué hemos excluido a los subconjuntos de los números naturales como objetos con los que trabajar informalmente? Consideremos las siguientes propiedades, la primera sobre los números naturales, la segunda sobre los subconjuntos de números naturales:

- Si n es un número natural par mayor que 2, entonces se puede expresar como suma de dos números primos.
- Si A es un subconjunto infinito de $\mathcal{P}\mathbb{N}$, entonces o bien A es equipotente con $\mathbb{N}$, o bien lo es con $\mathcal{P}\mathbb{N}$.

¿Podemos afirmar que no hay duda alguna sobre que significa que todos los naturales cumplan la primera propiedad o que exista alguno que lo haga? ¿Podemos afirmar lo mismo de la segunda?

¿Cómo se razona en matemáticas?

¿Por qué hemos excluido a los subconjuntos de los números naturales como objetos con los que trabajar informalmente? Consideremos las siguientes propiedades, la primera sobre los números naturales, la segunda sobre los subconjuntos de números naturales:

- Si n es un número natural par mayor que 2, entonces se puede expresar como suma de dos números primos.
- Si A es un subconjunto infinito de $\mathcal{P}\mathbb{N}$, entonces o bien A es equipotente con $\mathbb{N}$, o bien lo es con $\mathcal{P}\mathbb{N}$.

¿Podemos afirmar que no hay duda alguna sobre que significa que todos los naturales cumplan la primera propiedad o que exista alguno que lo haga? ¿Podemos afirmar lo mismo de la segunda? No se debe confundir el no conocer la veracidad de una afirmación, con que tenga o no un significado informal preciso.

1 ¿Cómo se razona en matemáticas?

2 ¿En qué consiste la formalización de las matemáticas?

3 ¿Qué son los números naturales?

¿En qué consiste la formalización de las matemáticas?

En encontrar un sistema de razonamiento formal que nos permita desarrollar cualquier razonamiento matemático:

¿En qué consiste la formalización de las matemáticas?

En encontrar un sistema de razonamiento formal que nos permita desarrollar cualquier razonamiento matemático:

- Los razonamientos únicamente deben depender de la forma no de las afirmaciones, NO de su posible significado.

¿En qué consiste la formalización de las matemáticas?

En encontrar un sistema de razonamiento formal que nos permita desarrollar cualquier razonamiento matemático:

- Los razonamientos únicamente deben depender de la forma no de las afirmaciones, NO de su posible significado.
- Al aplicar una regla formal a una afirmación verdadera, debemos obtener otra afirmación verdadera.

¿En qué consiste la formalización de las matemáticas?

En encontrar un sistema de razonamiento formal que nos permita desarrollar cualquier razonamiento matemático:

- Los razonamientos únicamente deben depender de la forma no de las afirmaciones, NO de su posible significado.
- Al aplicar una regla formal a una afirmación verdadera, debemos obtener otra afirmación verdadera.

Pero, ¿podemos conformarnos únicamente con estos dos puntos?

¿En qué consiste la formalización de las matemáticas?

En encontrar un sistema de razonamiento formal que nos permita desarrollar cualquier razonamiento matemático:

- Los razonamientos únicamente deben depender de la forma no de las afirmaciones, NO de su posible significado.
- Al aplicar una regla formal a una afirmación verdadera, debemos obtener otra afirmación verdadera.

Pero, ¿podemos conformarnos únicamente con estos dos puntos? Es folclore general que la hipótesis del continuo no es demostrable en ZFC. Es decir, NO existe una demostración FORMAL de dicha afirmación en ZFC, ¿pero podría ocurrir que alguien de un argumento que la demuestre y que no esté contemplado en nuestra definición de razonamiento formal?

¿En qué consiste la formalización de las matemáticas?

La respuesta es que NO, puesto que debemos exigir a nuestro sistema formal un tercer punto:

- Todo razonamiento semántico debe ser formalizable.

¿En qué consiste la formalización de las matemáticas?

La respuesta es que NO, puesto que debemos exigir a nuestro sistema formal un tercer punto:

- Todo razonamiento semántico debe ser formalizable.

Este punto es el contenido de la tesis doctoral de Gödel y se conoce como *teorema de completitud semántica*.

¿En qué consiste la formalización de las matemáticas?

La respuesta es que NO, puesto que debemos exigir a nuestro sistema formal un tercer punto:

- Todo razonamiento semántico debe ser formalizable.

Este punto es el contenido de la tesis doctoral de Gödel y se conoce como *teorema de completitud semántica*.

Así, la formalización de las matemáticas consiste en desarrollar un sistema **formal**, cuyos razonamientos sean semánticamente verdaderos y de modo que todo razonamiento semántico sea formalizable.

¿En qué consiste la formalización de las matemáticas?

La rama que estudia de forma lógica las teorías axiomáticas formales, como definir las, su alcance y los resultados positivos (como el teorema de completitud semántica) o negativos (como los teoremas de incompletitud) se conoce como **metamatemática**.

¿En qué consiste la formalización de las matemáticas?

La rama que estudia de forma lógica las teorías axiomáticas formales, como definir las, su alcance y los resultados positivos (como el teorema de completitud semántica) o negativos (como los teoremas de incompletitud) se conoce como **metamatemática**.

Es claro que si buscamos estudiar las teorías formales, la metamatemática debe estudiarse informalmente e intentando que todos los resultados sean lo más finitistas posibles.

¿En qué consiste la formalización de las matemáticas?

Ahora bien, una vez definidos de forma informal todos los conceptos y resultados básicos es posible formalizar la metamatemática dentro de teorías formales potentes, por ejemplo en ZFC, y resulta indispensable entonces no confundir resultados metamatemáticos sobre ZFC con resultados matemáticos formales de ZFC.

¿En qué consiste la formalización de las matemáticas?

Ahora bien, una vez definidos de forma informal todos los conceptos y resultados básicos es posible formalizar la metamatemática dentro de teorías formales potentes, por ejemplo en ZFC, y resulta indispensable entonces no confundir resultados metamatemáticos sobre ZFC con resultados matemáticos formales de ZFC.

Por ejemplo, en ZFC la colección de fórmulas que definen un número real es un conjunto metamatemático bien definido, pero no es posible formalizarlo en ZFC, es decir, no existe el conjunto de las fórmulas (formalizadas) que definen números reales.

1 ¿Cómo se razona en matemáticas?

2 ¿En qué consiste la formalización de las matemáticas?

3 ¿Qué son los números naturales?

¿Qué son los números naturales?

¿Cómo definiríais los números naturales?

¿Qué son los números naturales?

¿Cómo definiríais los números naturales?

Los números naturales son unos objetos abstractos, es decir, no son nada en específico, de modo que cumplen:

- Existe un primer número natural, al que llamamos *cero*.
- Cada número natural tiene asociado otro al que llamamos su *siguiente*.
- Si vamos enumerando los números naturales empezando con el cero, luego el siguiente de cero, luego el siguiente del siguiente de cero, y así sucesivamente, cada número que añadimos a la sucesión es distinto de los precedentes, y los números naturales son únicamente los que van apareciendo en esa sucesión y nada más.

¿Qué son los números naturales?

¿Cómo definiríais los números naturales?

Los números naturales son unos objetos abstractos, es decir, no son nada en específico, de modo que cumplen:

- Existe un primer número natural, al que llamamos *cero*.
- Cada número natural tiene asociado otro al que llamamos su *siguiente*.
- Si vamos enumerando los números naturales empezando con el cero, luego el siguiente de cero, luego el siguiente del siguiente de cero, y así sucesivamente, cada número que añadimos a la sucesión es distinto de los precedentes, y los números naturales son únicamente los que van apareciendo en esa sucesión y nada más.

¿Podríais definir la suma y el producto de manera informal y demostrar sus propiedades básicas?