- Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $f: V\times V \to \mathbb{K}$ una aplicación bilineal.

Dado $S \subset V$, decimos que S es f-ortogonal si

$$f(u,v) = 0 \ , \ \forall u,v \in S, \ u \neq v$$

Lema: Si $S \subset V$ es f-ortogonal y $f(u,u) \neq 0$, $\forall u \in S$, entonces S es linealmente independiente.

<u>Demostración:</u>

Sean $u_1, \dots, u_n \in S$ y supongamos que

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = 0,$$

para ciertos $\alpha_i \in \mathbb{K}$.

Entonces, como $f(0,u) = f(u,0) = 0 \cdot f(u,u) = 0$, $\forall u \in V$, tenemos que para cada $i = 1, \dots, n$,

$$0 = f(0, u_i) = f(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n, u_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f(u_j, u_i) = \alpha_i f(u_i, u_i)$$

y como $f(u_i, u_i) \neq 0$, obtenemos que $\alpha_i = 0$. ■

Lema: Si $V = \mathbb{K}^n$, $n \in \mathbb{N}$, entonces $f: \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ dado por

$$f((u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n)) = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$$

es una aplicación bilineal.

La denominaremos producto $\mathbb{K}$-nónico.

- En un pueblo hay n personas apuntadas a m clubs, de modo que en cada club hay un número impar de personas y entre dos clubs distintos el número común de personas es siempre par.

Demuestra que $m \leq n$.

Sea $V = (\mathbb{F}_2)^n$ y definamos (*) para cada $i = 1, \dots, m$

$$u_i = (u_i^1, \dots, u_i^n)$$

con

$$u_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si la persona } j\text{-ésima está en el club } i\text{-ésimo} \\ 0 & \text{si la persona } j\text{-ésima no está en el club } i\text{-ésimo.} \end{cases}$$

Observemos que si es φ el producto $\mathbb{F}_2$-nónico, tenemos que si $i \neq k$

$$\varphi(u_i, u_k) = \sum_{\substack{j=1 \\ u_i^j = u_k^j = 1}}^{n} 1 = 0$$

El número común de personas entre clubs es par

Mientras que

$$\varphi(u_i, u_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ u_i^j = 1}}^{n} 1 = 1 \neq 0$$

El número de personas en cada club es impar

Por tanto, el conjunto $\{u_1, \dots, u_m\}$ es φ-ortogonal con $\varphi(u_i, u_i) \neq 0$, $\forall i = 1, \dots, m$, y con ello es L.I. Como $\dim(V) = n$, obtenemos que $m \leq n$.

(*) Fijamos un orden en las n personas y los m clubs.