Complejidad en espacios de Banach separables

Esteban Martínez Vañó

Universidad de Granada

Noviembre, 2023

Índice

La idea

$$\forall x \in [0,1]\, \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall y \in [0,1]\, (|x - y| < \delta \to |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

La idea

LA FÓRMULA DE LOS HORRORES

$$\forall x \in [0,1]\, \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall y \in [0,1]\, (|x-y| < \delta \to |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

La idea

LA FÓRMULA DE LOS HORRORES

$$\forall x \in [0,1]\, \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall y \in [0,1]\, (|x-y| < \delta \to |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

Pero, ¿por qué es un horror?

La idea

LA FÓRMULA DE LOS HORRORES

$$\forall x \in [0,1]\, \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall y \in [0,1]\, (|x-y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

La idea

LA FÓRMULA DE LOS HORRORES

$$\forall x \in [0,1]\, \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall y \in [0,1]\, (|x-y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

Consideremos $(B[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ y sea

$$C = \{f \in B[0,1] : f \text{ es continua en } [0,1]\}$$

La idea

LA FÓRMULA DE LOS HORRORES

$$\forall x \in [0,1]\, \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall y \in [0,1]\, (|x - y| < \delta \to |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

Consideremos $(B[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ y sea

$$C = \{f \in B[0,1] : f \text{ es uniformemente continua en } [0,1]\}$$

La idea

LA FÓRMULA DE LOS HORRORES

$$\cancel{\forall x \in [0,1]}\, \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x, y \in [0,1]\, (|x-y| < \delta \to |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

Consideremos $(B[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ y sea

$$C = \{f \in B[0,1] : f \text{ es uniformemente continua en } [0{,}1]\}$$

La idea

LA NUEVA FÓRMULA DE LOS HORRORES

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x, y \in [0,1]\, (|x - y| < \delta \to |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)$$

Consideremos $(B[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ y sea

$$C = \{f \in B[0,1] : f \text{ es uniformemente continua en } [0,1]\}$$

La idea

LA FÓRMULA DE LOS HORRORES

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x, y \in [0,1] \, (|x - y| < \delta \to |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)$$

EL CONJUNTO DE LOS HORRORES

$$C = \{f \in B[0,1] : f \text{ es uniformemente continua en } [0,1]\}$$

La idea

LA FÓRMULA DE LOS HORRORES

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x, y \in [0,1]\, (|x-y| < \delta \to |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)$$

EL CONJUNTO DE LOS HORRORES

$$C = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{\delta>0} \bigcap_{x\in[0,1]} \bigcap_{y\in B(x,\delta)} \{f \in B[0,1] : |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon\}$$

La idea

LA FÓRMULA DE LOS HORRORES

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x, y \in [0,1] \, (|x - y| < \delta \to |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)$$

EL CONJUNTO DE LOS HORRORES

$$C = \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{x \in [0,1]} \bigcap_{y \in B(x, 1/m)} \{f \in B[0,1] : |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon\}$$

La idea

LA FÓRMULA DE LOS HORRORES

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x, y \in [0,1]\, (|x-y| < \delta \to |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)$$

EL CONJUNTO DE LOS HORRORES

$$C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{x\in[0,1]} \bigcap_{y\in B(x,1/m)} \{f \in B[0,1] : |f(x) - f(y)| \leq 1/n\}$$

La idea

LA FÓRMULA DE LOS HORRORES

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x, y \in [0,1]\, (|x - y| < \delta \to |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)$$

EL CONJUNTO DE LOS HORRORES

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \underbrace{\bigcap_{x \in [0,1]} \bigcap_{y \in B(x,1/m)} \{f \in B[0,1] : |f(x) - f(y)| \leq 1/n\}}_{\text{CERRADO}}$$

La idea

LA FÓRMULA DE LOS HORRORES

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x, y \in [0,1]\, (|x-y| < \delta \to |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)$$

EL CONJUNTO DE LOS HORRORES

$$C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \underbrace{\bigcap_{x\in[0,1]} \bigcap_{y\in B(x,1/m)} \{f \in B[0,1] : |f(x) - f(y)| \leq 1/n\}}_{\text{CERRADO}}$$

Teorema

$C \in \Pi^0_3(B[0,1])$

¿Cómo lo hacemos para espacios de Banach?

No existe el conjunto de todos los espacios de Banach separables.

¿Qué podemos hacer para hablar de la complejidad de propiedades generales sobre espacios de Banach separables?

¿Cómo lo hacemos para espacios de Banach?

No existe el conjunto de todos los espacios de Banach separables.

¿Qué podemos hacer para hablar de la complejidad de propiedades generales sobre espacios de Banach separables?

Necesitaremos dos cosas:

¿Cómo lo hacemos para espacios de Banach?

No existe el conjunto de todos los espacios de Banach separables.

¿Qué podemos hacer para hablar de la complejidad de propiedades generales sobre espacios de Banach separables?

Necesitaremos dos cosas:

(I) Un conjunto que codifica cada espacio de Banach separable como uno de sus elementos.

¿Cómo lo hacemos para espacios de Banach?

No existe el conjunto de todos los espacios de Banach separables.

¿Qué podemos hacer para hablar de la complejidad de propiedades generales sobre espacios de Banach separables?

Necesitaremos dos cosas:

(I) Un conjunto que codifica cada espacio de Banach separable como uno de sus elementos.

(II) Dotar al conjunto de una “buena” topología.

Índice

Índice

σ-álgebra de Borel

σ-álgebra de Borel en un espacio topológico X

$\mathcal{B}(X) \equiv \sigma$-álgebra generada por la topología de X.

σ-álgebra de Borel

σ-álgebra de Borel en un espacio topológico X

$\mathcal{B}(X) \equiv \sigma$-álgebra generada por la topología de X.

- Los abiertos $(\Sigma^0_1(X))$ y cerrados $(\Pi^0_1(X))$ de X están en $\mathcal{B}(X)$.

σ-álgebra de Borel

σ-álgebra de Borel en un espacio topológico X

$\mathcal{B}(X) \equiv \sigma$-álgebra generada por la topología de X.

- Los abiertos ($\Sigma_1^0(X)$) y cerrados ($\Pi_1^0(X)$) de X están en $\mathcal{B}(X)$.
- Los conjuntos G_δ y F_σ están en $\mathcal{B}(X)$.

σ-álgebra de Borel

σ-álgebra de Borel en un espacio topológico X

$\mathcal{B}(X) \equiv \sigma$-álgebra generada por la topología de X.

- Los abiertos $(\Sigma_1^0(X))$ y cerrados $(\Pi_1^0(X))$ de X están en $\mathcal{B}(X)$.
- Los conjuntos G_δ y F_σ están en $\mathcal{B}(X)$.
- Las uniones numerables de conjuntos G_δ o las intersecciones numerables de conjuntos F_σ están en $\mathcal{B}(X)$.

Jerarquía de Borel

Jerarquía de Borel en un espacio metrizable X

Para cada ordinal $\alpha > 1$ definimos por recursión transfinita:

$$\Sigma^0_\alpha(X) = \left\{ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n : \forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \bigcup_{0<\beta<\alpha} \Pi^0_\beta(X) \right\},$$

$$\Pi^0_\alpha(X) = \left\{ \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n : \forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \bigcup_{0<\beta<\alpha} \Sigma^0_\beta(X) \right\}.$$

¿Por qué “jerarquía”?

¿Por qué “jerarquía”?

$$\Delta^0_\alpha(X) = \Sigma^0_\alpha(X) \cap \Pi^0_\alpha(X)$$

¿Por qué “jerarquía”?

$$\Delta^0_\alpha(X) = \Sigma^0_\alpha(X) \cap \Pi^0_\alpha(X)$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \Sigma^0_1(X) \arrow[dr, phantom, sloped, "\subset"] & & \Sigma^0_2(X) \arrow[dr, phantom, sloped, "\subset"] & & \Sigma^0_3(X) \arrow[dr, phantom, sloped, "\subset"] & & \cdots \\
\Delta^0_1(X) \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subset"] & & \Delta^0_2(X) \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subset"] & & \Delta^0_3(X) \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subset"] & & \Delta^0_4(X) \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subset"] & \\
& \Pi^0_1(X) \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] & & \Pi^0_2(X) \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] & & \Pi^0_3(X) \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] & & \cdots
\end{tikzcd}$$

¿Por qué "de Borel"?

Teorema

Si X es un espacio metrizable y α un ordinal mayor o igual a ω_1 entonces

$$\Sigma^0_\alpha(X) = \Pi^0_\alpha(X) = \Delta^0_\alpha(X) = \Delta^0_{\omega_1}(X) = \Sigma^0_{\omega_1}(X) = \\ = \Pi^0_{\omega_1}(X) = \bigcup_{0<\delta<\omega_1} \Delta^0_\delta = \mathcal{B}(X).$$

Aplicaciones medibles

Aplicación Σ^0_α-medible $f : X \to Y$

$$A \text{ abierto en } Y \Rightarrow f^{-1}(A) \in \Sigma^0_\alpha(X).$$

Aplicaciones medibles

Aplicación Σ^0_α-medible $f : X \to Y$

$$A \text{ abierto en } Y \Rightarrow f^{-1}(A) \in \Sigma^0_\alpha(X).$$

Teorema

$f : X \to Y$ es Σ^0_α-medible y β un ordinal:

$$A \in \Sigma^0_{1+\beta}(Y) \Rightarrow f^{-1}(A) \in \Sigma^0_{\alpha+\beta}(X)$$
$$B \in \Pi^0_{1+\beta}(Y) \Rightarrow f^{-1}(B) \in \Pi^0_{\alpha+\beta}(X)$$

Índice

Conjuntos analíticos

Sea B un conjunto de Borel en el plano y $A = \pi(B)$ la proyección respecto a alguna de sus componentes en $\mathbb{R}$.

Conjuntos analíticos

Sea B un conjunto de Borel en el plano y $A = \pi(B)$ la proyección respecto a alguna de sus componentes en $\mathbb{R}$.

¿Es A un conjunto de Borel en $\mathbb{R}$?

Conjuntos analíticos

Sea B un conjunto de Borel en el plano y $A = \pi(B)$ la proyección respecto a alguna de sus componentes en $\mathbb{R}$.

¿Es A un conjunto de Borel en $\mathbb{R}$?

Conjuntos analíticos en un espacio polaco X

$A \subset X$ es **analítico** si:

- $A = \emptyset$
- $A = f(Y)$ con $f : Y \to X$ continua e Y polaco.

La familia de conjuntos analíticos de X se denota por $\Sigma^1_1(X)$.

Propiedades de los conjuntos analíticos

Sean X e Y espacios polacos.

Teorema

$\Sigma_1^1(X)$ es cerrada por uniones e intersecciones numerables.

Propiedades de los conjuntos analíticos

Sean X e Y espacios polacos.

Teorema

$\Sigma_1^1(X)$ es cerrada por uniones e intersecciones numerables.

Teorema

Si $f : X \to Y$ es Σ_α^0-medible, entonces:

(I) $A \in \Sigma_1^1(X) \Rightarrow f(A) \in \Sigma_1^1(Y)$.

(II) $B \in \Sigma_1^1(Y) \Rightarrow f^{-1}(B) \in \Sigma_1^1(X)$.

Índice

Estructura de Effros-Borel

Denotamos por $\mathcal{F}(X)$ la familia de los subconjuntos cerrados de X.

Estructura de Effros-Borel de X

El espacio medible $(\mathcal{F}(X), S_{EF})$ donde S_{EF} es la σ-álgebra generada por los conjuntos

$$E^+(U) = \{F \in \mathcal{F}(X) : F \cap U \neq \emptyset\}$$

para cada abierto U de X.

Estructura de Effros-Borel

Teorema

X polaco $\Rightarrow (\mathcal{F}(X), \tau)$ polaco y $\mathcal{B}(\mathcal{F}(X), \tau) = S_{EF}$.

Índice

Codificación de Bossard

En [Bos93] y [Bos02] Bossard presenta la siguiente codificación:

Codificación de Bossard

En [Bos93] y [Bos02] Bossard presenta la siguiente codificación:

- **Conjunto codificador**: $\mathrm{SB}(C[0,1])$ o $\mathrm{SB}_\infty(C[0,1])$.

Codificación de Bossard

En [Bos93] y [Bos02] Bossard presenta la siguiente codificación:

- **Conjunto codificador**: $\mathrm{SB}(C[0,1])$ o $\mathrm{SB}_\infty(C[0,1])$.
- **“Buena” topología**: Una topología polaca tal que su σ-álgebra de Borel es la estructura de Effros-Borel en X.

Codificación de Bossard

En [Bos93] y [Bos02] Bossard presenta la siguiente codificación:

- **Conjunto codificador**: $\mathrm{SB}(C[0,1])$ o $\mathrm{SB}_\infty(C[0,1])$.
- **"Buena" topología**: Una topología polaca tal que su σ-álgebra de Borel es la estructura de Effros-Borel en X.

Problemas con la codificación:

Codificación de Bossard

En [Bos93] y [Bos02] Bossard presenta la siguiente codificación:

- **Conjunto codificador**: $\mathrm{SB}(C[0,1])$ o $\mathrm{SB}_\infty(C[0,1])$.
- **"Buena" topología**: Una topología polaca tal que su σ-álgebra de Borel es la estructura de Effros-Borel en X.

Problemas con la codificación:

- La relación de isometría entre espacios de Banach no es "suave".

Codificación de Bossard

En [Bos93] y [Bos02] Bossard presenta la siguiente codificación:

- **Conjunto codificador**: $\mathrm{SB}(C[0,1])$ o $\mathrm{SB}_\infty(C[0,1])$.
- **"Buena" topología**: Una topología polaca tal que su σ-álgebra de Borel es la estructura de Effros-Borel en X.

Problemas con la codificación:

- La relación de isometría entre espacios de Banach no es "suave".
- No existe un espacio universalmente isométrico canónico.

Codificación de Bossard

En [Bos93] y [Bos02] Bossard presenta la siguiente codificación:

- **Conjunto codificador**: $\mathrm{SB}(C[0,1])$ o $\mathrm{SB}_\infty(C[0,1])$.
- **“Buena” topología**: Una topología polaca tal que su σ-álgebra de Borel es la estructura de Effros-Borel en X.

Problemas con la codificación:

- La relación de isometría entre espacios de Banach no es “suave”.
- No existe un espacio universalmente isométrico canónico.
- Fijado un espacio universal Z, no existe una topología canónica en $\mathrm{SB}(Z)$.

Índice

Topologías admisibles

En [GSR18] Gofefroy y Saint-Raymond introducen el concepto de **topología admisible** en un espacio polaco X:

Topología admisible en $\mathcal{F}(X)$

Una topología polaca τ en $\mathcal{F}(X)$ es **admisible** si satisface:

(I) Para cada abierto U de X, $E^+(U)$ es τ-abierto.

(II) Existe una subbase $\mathcal{S}$ de τ tal que

$$A \in \mathcal{S} \Rightarrow A = \bigcup_{n=1}^{\infty} E^+(U_n) \setminus E^+(V_n)$$

Propiedades de las topologías admisibles

- La σ-álgebra de Borel asociada a una topología admisible es la estructura de Effros-Borel en X.

Propiedades de las topologías admisibles

- La σ-álgebra de Borel asociada a una topología admisible es la estructura de Effros-Borel en X.

Teorema

Existe $f : (SB(X), \tau_1) \to (SB(Y), \tau_2)$ Σ_2^0-medible tal que $F \equiv f(F)$ para cada $F \in SB(X)$.

Propiedades de las topologías admisibles

- La σ-álgebra de Borel asociada a una topología admisible es la estructura de Effros-Borel en X.

Teorema

Existe $f : (SB(X), \tau_1) \to (SB(Y), \tau_2)$ Σ^0_2-medible tal que $F \equiv f(F)$ para cada $F \in SB(X)$.

$$P_{SB(X)} = \{F \in SB(X) : F \text{ satisface } (P)\}$$

Propiedades de las topologías admisibles

- La σ-álgebra de Borel asociada a una topología admisible es la estructura de Effros-Borel en X.

Teorema

Existe $f : (SB(X), \tau_1) \to (SB(Y), \tau_2)$ Σ_2^0-medible tal que $F \equiv f(F)$ para cada $F \in SB(X)$.

$$P_{SB(X)} = \{F \in SB(X) : F \text{ satisface } (P)\} = f^{-1}\left(P_{SB(Y)}\right)$$

Propiedades de las topologías admisibles

- La σ-álgebra de Borel asociada a una topología admisible es la estructura de Effros-Borel en X.

Teorema

Existe $f : (SB(X), \tau_1) \to (SB(Y), \tau_2)$ Σ_2^0-medible tal que $F \equiv f(F)$ para cada $F \in SB(X)$.

$$P_{SB(X)} = \{F \in SB(X) : F \text{ satisface } (P)\} = f^{-1}\left(P_{SB(Y)}\right)$$

$$P_{SB(Y)} \in \Pi_6^0(SB(Y))$$

Propiedades de las topologías admisibles

- La σ-álgebra de Borel asociada a una topología admisible es la estructura de Effros-Borel en X.

Teorema

Existe $f : (SB(X), \tau_1) \to (SB(Y), \tau_2)$ Σ_2^0-medible tal que $F \equiv f(F)$ para cada $F \in SB(X)$.

$$P_{SB(X)} = \{F \in SB(X) : F \text{ satisface } (P)\} = f^{-1}\left(P_{SB(Y)}\right)$$

$$P_{SB(Y)} \in \Pi_6^0(SB(Y)) \Rightarrow P_{SB(X)} \in \Pi_\alpha^0(SB(Y)) \, (\alpha = 5, 6, 7)$$

Índice

Pseudonormas

En [CDDK22a] y [CDDK22b] Cúth, Doležal, Doucha y Kurka desarrollan una nueva codificación de los espacios de Banach separables muy distinta a la anterior, pero en cierto modo equivalente.

Pseudonormas

En [CDDK22a] y [CDDK22b] Cúth, Doležal, Doucha y Kurka desarrollan una nueva codificación de los espacios de Banach separables muy distinta a la anterior, pero en cierto modo equivalente.

Pseudonormas

Sea X es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ con valor absoluto. Una aplicación $\mu : X \longrightarrow \mathbb{K}$ es una **pseudonorma** en X si cumple:

(I) $\mu(\lambda x) = |\lambda| \mu(x), \forall x \in X, \lambda \in \mathbb{K};$

(II) $\mu(x+y) \leq \mu(x) + \mu(y), \forall x, y \in X.$

El espacio $\mathcal{P}$

El espacio $\mathcal{P}$

Sea V el espacio de sucesiones en $\mathbb{Q}$ con soporte finito. Se define el espacio de pseudonormas $\mathcal{P}$ como

$$\mathcal{P} = \left\{ \mu \in \mathbb{R}^V : \mu \text{ es una pseudonorma} \right\}$$

El espacio $\mathcal{P}$

El espacio $\mathcal{P}$

Sea V el espacio de sucesiones en $\mathbb{Q}$ con soporte finito. Se define el espacio de pseudonormas $\mathcal{P}$ como

$$\mathcal{P} = \left\{\mu \in \mathbb{R}^V : \mu \text{ es una pseudonorma}\right\}$$

Lema

$\mathcal{P}$ es cerrado en $\mathbb{R}^V$ y, por tanto, un espacio polaco.

Codificación

Primero asociamos a cada $\mu \in \mathcal{P}$ un espacio de Banach separable $(X_\mu, \hat{\mu})$ mediante el siguiente procedimiento:

Codificación

Primero asociamos a cada $\mu \in \mathcal{P}$ un espacio de Banach separable $(X_\mu, \hat{\mu})$ mediante el siguiente procedimiento:

(I) Consideramos $\bar{\mu}$ como la única pseudonorma sobre c_{00} que extiende a μ.

Codificación

Primero asociamos a cada $\mu \in \mathcal{P}$ un espacio de Banach separable $(X_\mu, \hat{\mu})$ mediante el siguiente procedimiento:

(I) Consideramos $\bar{\mu}$ como la única pseudonorma sobre c_{00} que extiende a μ.

(II) Consideramos la norma $\tilde{\mu}$ sobre c_{00}/N_μ donde

$$N_\mu = \{x \in c_{00} : \bar{\mu}(x) = 0\}.$$

Codificación

Primero asociamos a cada $\mu \in \mathcal{P}$ un espacio de Banach separable $(X_\mu, \hat{\mu})$ mediante el siguiente procedimiento:

(I) Consideramos $\bar{\mu}$ como la única pseudonorma sobre c_{00} que extiende a μ.

(II) Consideramos la norma $\tilde{\mu}$ sobre c_{00}/N_μ donde

$$N_\mu = \{x \in c_{00} : \bar{\mu}(x) = 0\}.$$

(III) $(X_\mu, \hat{\mu})$ será cualquier compleción de $(c_{00}/N_\mu, \tilde{\mu})$.

Codificación

Primero asociamos a cada $\mu \in \mathcal{P}$ un espacio de Banach separable $(X_\mu, \hat{\mu})$ mediante el siguiente procedimiento:

(I) Consideramos $\bar{\mu}$ como la única pseudonorma sobre c_{00} que extiende a μ.

(II) Consideramos la norma $\tilde{\mu}$ sobre c_{00}/N_μ donde

$$N_\mu = \{x \in c_{00} : \bar{\mu}(x) = 0\}.$$

(III) $(X_\mu, \hat{\mu})$ será cualquier compleción de $(c_{00}/N_\mu, \tilde{\mu})$.

(IV) $\bar{V} = \{v + N_\mu : v \in V\}$ es un subconjunto denso de X_μ.

Codificación

Ahora, veamos que para cada espacio de Banach separable $(X, \|\cdot\|)$ existe un $\mu \in \mathcal{P}$ tal que $X \equiv X_\mu$.

Codificación

Ahora, veamos que para cada espacio de Banach separable $(X, \|\cdot\|)$ existe un $\mu \in \mathcal{P}$ tal que $X \equiv X_\mu$.

- Fijamos $\{x_n\}$ una sucesión densa en X.

Codificación

Ahora, veamos que para cada espacio de Banach separable $(X, \|\cdot\|)$ existe un $\mu \in \mathcal{P}$ tal que $X \equiv X_\mu$.

- Fijamos $\{x_n\}$ una sucesión densa en X.
- Para cada $v = \sum a_n e_n \in V$ definimos la pseudonorma

$$\mu(v) = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\|.$$

Codificación

Ahora, veamos que para cada espacio de Banach separable $(X, \|\cdot\|)$ existe un $\mu \in \mathcal{P}$ tal que $X \equiv X_\mu$.

- Fijamos $\{x_n\}$ una sucesión densa en X.
- Para cada $v = \sum a_n e_n \in V$ definimos la pseudonorma

$$\mu(v) = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\|.$$

- $(X, \|\cdot\|)$ es una compleción de $(c_{00}/N_\mu, \tilde{\mu})$ con lo que $X_\mu \equiv X$.

Los espacios $\mathcal{P}_\infty$ y $\mathcal{B}$

Los espacios $\mathcal{P}_\infty$ y $\mathcal{B}$

Se definen los espacios de pseudonormas

$$\mathcal{P}_\infty = \{\mu \in \mathcal{P} : X_\mu \text{ es de dimensión infinita}\}$$
$$\mathcal{B} = \{\mu \in \mathcal{P}_\infty : \bar{\mu} \text{ es una norma en } c_{00}\}$$

Los espacios $\mathcal{P}_\infty$ y $\mathcal{B}$

Los espacios $\mathcal{P}_\infty$ y $\mathcal{B}$

Se definen los espacios de pseudonormas

$$\mathcal{P}_\infty = \{\mu \in \mathcal{P} : X_\mu \text{ es de dimensión infinita}\}$$
$$\mathcal{B} = \{\mu \in \mathcal{P}_\infty : \bar{\mu} \text{ es una norma en } c_{00}\}$$

Lema

$\mathcal{P}_\infty$ y $\mathcal{B}$ son G_δ en $\mathcal{P}$ y, por tanto, espacios polacos.

Índice

Comparación entre codificaciones

	$SB(X)$	$SB_\infty(X)$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}_\infty$	$\mathcal{B}$
$SB(X)$	-	Σ^0_1	Σ^0_3	-	-
$SB_\infty(X)$	-	-	-	Σ^0_3	Σ^0_2
$\mathcal{P}$	Σ^0_1	-	-	Σ^0_1	Σ^0_1
$\mathcal{P}_\infty$	-	Σ^0_1	-	-	Σ^0_2
$\mathcal{B}$	-	Σ^0_2	-	Σ^0_2	-

$SB(X) \longrightarrow \mathcal{P}$

Existe aplicación continua $\phi : SB(X) \longrightarrow \mathcal{P}$ tal que

$$F \equiv X_{\phi(F)}$$

para cada $F \in SB(X)$.

Índice

Índice

Espacios de Hilbert

¿Cómo de compleja es la clase de los espacios de Hilbert separables de dimensión infinita?

Espacios de Hilbert

¿Cómo de compleja es la clase de los espacios de Hilbert separables de dimensión infinita?

$$\{\mu \in \mathcal{I} : X_\mu \text{ es de Hilbert (separable)}\} = \{\mu \in \mathcal{I} : X_\mu \equiv \ell_2\}$$

Espacios de Hilbert

¿Cómo de compleja es la clase de los espacios de Hilbert separables de dimensión infinita?

$$\{\mu \in \mathcal{I} : X_\mu \text{ es de Hilbert (separable)}\} = \langle \ell_2 \rangle_{\equiv}^{\mathcal{I}}$$

Espacios de Hilbert

¿Cómo de compleja es la clase de los espacios de Hilbert separables de dimensión infinita?

$$\{\mu \in \mathcal{I} : X_\mu \text{ es de Hilbert (separable)}\} = \langle \ell_2 \rangle_{\equiv}^{\mathcal{I}}$$

Teorema (Cúth et al.)

La clase de isometría de ℓ_2 es cerrada en $\mathcal{P}_\infty$ y en $\mathcal{B}$.

Demostración

$$\mu \in \langle \ell_2 \rangle^{\mathcal{I}}_{\equiv} \leftrightarrow \hat{\mu} \text{ cumple la ley del paralelogramo}$$

Demostración

$$\mu \in \langle \ell_2 \rangle_{\equiv}^{\mathcal{I}} \leftrightarrow \hat{\mu}(x+y)^2 + \hat{\mu}(x-y)^2 = 2\left(\hat{\mu}(x)^2 + \hat{\mu}(y)^2\right), \forall x, y \in X_\mu$$

Demostración

$$\mu \in \langle \ell_2 \rangle_{\equiv}^{\mathcal{I}} \leftrightarrow \hat{\mu}(x+y)^2 + \hat{\mu}(x-y)^2 = 2\left(\hat{\mu}(x)^2 + \hat{\mu}(y)^2\right), \forall x, y \in \bar{V}$$

Demostración

$$\mu \in \langle \ell_2 \rangle_{\equiv}^{\mathcal{I}} \leftrightarrow \hat{\mu}(x+y)^2 + \hat{\mu}(x-y)^2 = 2\left(\hat{\mu}(x)^2 + \hat{\mu}(y)^2\right), \forall x, y \in \bar{V}$$

$$\hat{\mu}(v + N_\mu) = \tilde{\mu}(v + N_\mu) = \mu(v), \forall v \in V$$

Demostración

$$\mu \in \langle \ell_2 \rangle_{\equiv}^{\mathcal{I}} \leftrightarrow \mu(u+v)^2 + \mu(u-v)^2 = 2\left(\mu(v)^2 + \mu(u)^2\right), \; \forall u, v \in V$$

Demostración

$$\mu \in \langle \ell_2 \rangle_{\equiv}^{\mathcal{I}} \leftrightarrow \mu(u+v)^2 + \mu(u-v)^2 = 2\left(\mu(v)^2 + \mu(u)^2\right), \forall u, v \in V$$

Por tanto

$$\langle \ell_2 \rangle_{\equiv}^{\mathcal{I}} = \bigcap_{(u,v) \in V^2} F_{u,v}$$

con

$$F_{u,v} = \left\{ \mu \in \mathcal{I} : \mu(u+v)^2 + \mu(u-v)^2 = 2\left[\mu(u)^2 + \mu(v)^2\right] \right\}.$$

Más sobre ℓ_2

Teorema (Cúth et al.)

El espacio de Hilbert ℓ_2 se caracteriza como el único espacio de Banach separable de dimensión infinita cuya clase de isometría es cerrada en $\mathcal{I}$, siendo $\mathcal{I}$ cualquiera de los espacios $\mathcal{P}_\infty$ o $\mathcal{B}$.

Idea de la demostración

- $\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}\left(\langle X\rangle^{\mathcal{I}}_{\equiv}\right) = \{\mu \in \mathcal{I} : X_\mu$ es finit. repres. en $X\}$.

Idea de la demostración

- $\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}\left(\langle X\rangle_{\equiv}^{\mathcal{I}}\right) = \{\mu \in \mathcal{I} : X_\mu$ es finit. repres. en $X\}$.
- Como ℓ_2 es finit. repres. en cualquier espacio de dimensión infinita X obtenemos que

$$\langle \ell_2\rangle_{\equiv}^{\mathcal{I}} \subset \mathrm{cl}_{\mathcal{I}}\left(\langle X\rangle_{\equiv}^{\mathcal{I}}\right)$$

Idea de la demostración

- $\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}\left(\langle X\rangle^{\mathcal{I}}_{\equiv}\right) = \{\mu \in \mathcal{I} : X_\mu$ es finit. repres. en $X\}$.
- Como ℓ_2 es finit. repres. en cualquier espacio de dimensión infinita X obtenemos que

$$\langle \ell_2\rangle^{\mathcal{I}}_{\equiv} \subset \mathrm{cl}_{\mathcal{I}}\left(\langle X\rangle^{\mathcal{I}}_{\equiv}\right)$$

- Si $\langle X\rangle^{\mathcal{I}}_{\equiv}$ es cerrado, entonces

$$\langle \ell_2\rangle^{\mathcal{I}}_{\equiv} \subset \langle X\rangle^{\mathcal{I}}_{\equiv}$$

con lo que $X \equiv \ell_2$.

Aun más sobre ℓ_2

¿Cómo de compleja es la clase de los espacios de Banach de dimensión infinita isomorfos a espacios de Hilbert separables?

Aun más sobre ℓ_2

¿Cómo de compleja es la clase de los espacios de Banach de dimensión infinita isomorfos a espacios de Hilbert separables?

$$\{\mu \in \mathcal{I} : X_\mu \simeq H \text{ (esp. Hilbert separable)}\} = \{\mu \in \mathcal{I} : X_\mu \simeq \ell_2\}$$

Aun más sobre ℓ_2

¿Cómo de compleja es la clase de los espacios de Banach de dimensión infinita isomorfos a espacios de Hilbert separables?

$$\{\mu \in \mathcal{I} : X_\mu \simeq H \text{ (esp. Hilbert separable)}\} = \langle \ell_2 \rangle_{\simeq}^{\mathcal{I}}$$

Aun más sobre ℓ_2

¿Cómo de compleja es la clase de los espacios de Banach de dimensión infinita isomorfos a espacios de Hilbert separables?

$$\{\mu \in \mathcal{I} : X_\mu \simeq H \text{ (esp. Hilbert separable)}\} = \langle \ell_2 \rangle_{\simeq}^{\mathcal{I}}$$

Teorema (Cúth et al.)

La clase de isomorfía de ℓ_2 es un conjunto F_σ en $\mathcal{P}_\infty$ y en $\mathcal{B}$.

Demostración

$\mu \in \langle \ell_2 \rangle_{\simeq}^{\mathcal{I}} \leftrightarrow X_\mu$ tiene tipo y cotipo 2

Demostración

$\mu \in \langle \ell_2 \rangle^{\mathcal{I}}_{\simeq} \leftrightarrow \exists C, D > 0$ tales que para cualquier conjunto finito $\{x_i\}_{i=1}^n$ de X_μ se cumple que

$$\frac{1}{D^2}\sum_{i=1}^n \hat{\mu}(x_i)^2 \leq \frac{1}{2^n}\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^n} \hat{\mu}\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i\right)^2 \leq C^2 \sum_{i=1}^n \hat{\mu}(x_i)^2$$

Demostración

$\mu \in \langle \ell_2 \rangle_{\simeq}^{\mathcal{I}} \leftrightarrow \exists M \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier conjunto finito $\{x_i\}_{i=1}^n$ de X_μ se cumple que

$$\frac{1}{M}\sum_{i=1}^n \hat{\mu}(x_i)^2 \leq \frac{1}{2^n}\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^n} \hat{\mu}\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i\right)^2 \leq M\sum_{i=1}^n \hat{\mu}(x_i)^2$$

Demostración

$\mu \in \langle \ell_2 \rangle^{\mathcal{I}}_{\simeq} \leftrightarrow \exists M \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier conjunto finito $\{v_i\}_{i=1}^n$ de V se cumple que

$$\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n}\mu(v_i)^2 \leq \frac{1}{2^n}\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^n}\mu\left(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i v_i\right)^2 \leq M\sum_{i=1}^{n}\mu(v_i)^2$$

Demostración

$\mu \in \langle \ell_2 \rangle^{\mathcal{I}}_{\simeq} \leftrightarrow \exists M \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier conjunto finito $\{v_i\}_{i=1}^n$ de V se cumple que

$$\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n}\mu(v_i)^2 \leq \frac{1}{2^n}\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^n}\mu\left(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i v_i\right)^2 \leq M\sum_{i=1}^{n}\mu(v_i)^2 \quad (1)$$

Demostración

$\mu \in \langle \ell_2 \rangle^{\mathcal{I}}_{\simeq} \leftrightarrow \exists M \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier conjunto finito $\{v_i\}_{i=1}^n$ de V se cumple que

$$\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n}\mu(v_i)^2 \leq \frac{1}{2^n}\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^n}\mu\left(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i v_i\right)^2 \leq M\sum_{i=1}^{n}\mu(v_i)^2 \quad (1)$$

Por tanto

$$\langle \ell_2 \rangle^{\mathcal{I}}_{\simeq} = \bigcup_{M\in\mathbb{N}}\bigcap_{v\in V^{<\omega}} F_v^M.$$

con

$$F_v^M = \{\mu \in \mathcal{I} : (1)\}$$

Todavía más sobre ℓ_2

Teorema (Cúth et al.)

El espacio de Hilbert ℓ_2 se caracteriza como el único espacio de Banach separable de dimensión infinita cuya clase de isomorfía es un conjunto F_σ en $\mathcal{I}$, siendo $\mathcal{I} \in \{\mathcal{P}_\infty, \mathcal{B}\}$.

Índice

Espacios ℓ_p

Teorema (Cúth et al.)

Si $1 \leq p < \infty$ con $p \neq 2$, la clase de isometría de los espacios ℓ_p es un conjunto Π^0_3 tanto en $\mathcal{P}_\infty$ como en $\mathcal{B}$, y además no pertenece a ninguna clase de Borel inferior.

Espacios ℓ_p

Teorema (Cúth et al.)

Si $1 \leq p < \infty$ con $p \neq 2$, la clase de isometría de los espacios ℓ_p es un conjunto Π_3^0 tanto en $\mathcal{P}_\infty$ como en $\mathcal{B}$, y además no pertenece a ninguna clase de Borel inferior.

Teorema (Godefroy, Saint-Raymond)

Si $1 < p < \infty$ con $p \neq 2$, la clase de isomorfía de los espacios ℓ_p es un conjunto $\Pi_{\omega+1}^0$ tanto en $\mathcal{P}_\infty$ como en $\mathcal{B}$.

Espacios $L_p[0,1]$

Teorema (Cúth et al.)

Si $1 \leq p < \infty$ con $p \neq 2$, la clase de isometría de los espacios $L_p[0,1]$ es un conjunto G_δ tanto en $\mathcal{P}_\infty$ como en $\mathcal{B}$, y además no pertenece a ninguna clase de Borel inferior.

Espacios $L_p[0,1]$

Teorema (Cúth et al.)

Si $1 \leq p < \infty$ con $p \neq 2$, la clase de isometría de los espacios $L_p[0,1]$ es un conjunto G_δ tanto en $\mathcal{P}_\infty$ como en $\mathcal{B}$, y además no pertenece a ninguna clase de Borel inferior.

Teorema (Bossard, Bourgain)

Si $1 < p < \infty$ con $p \neq 2$, la clase de isomorfía de los espacios $L_p[0,1]$ no es un conjunto de Borel tanto en $\mathcal{P}_\infty$ como en $\mathcal{B}$.

Benoît Bossard.
Codages des espaces de Banach séparables. Familles analytiques ou coanalytiques d'espaces de Banach.
Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique, 316(10):1005–1010, 1993.

Benoît Bossard.
A coding of separable banach spaces. analytic and coanalytic families of banach spaces.
Fundamenta Mathematicae, 2(172):117–152, 2002.

Marek Cúth, Martin Doležal, Michal Doucha, and Ondřej Kurka.
Polish spaces of banach spaces.
Forum of Mathematics, Sigma, 10:e26, 2022.

Marek Cúth, Martin Doležal, Michal Doucha, and Ondřej Kurka.
Polish spaces of Banach spaces, 2022.
arXiv:1912.03994.

Gilles Godefroy and Jean Saint-Raymond.
Descriptive complexity of some isomorphism classes of Banach spaces.
Journal of Functional Analysis, 275(4):1008–1022, 2018.

Esteban Martínez Vañó.
Teoría descriptiva en análisis funcional.
Master's thesis, Universidad de Murcia, 2021.