Teorema: Si $\{x_n\}_{n\geq 1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ es tal que

$$x_n \to +\infty$$

entonces para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{a}{x_n}\right)^{x_n} = e^a$$

<u>Demostración</u>:

Veamos primero que es cierto si $x_n \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Sabemos que si es

$$z_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$$

se cumple que $z_n \to e^a$, luego dado $\varepsilon > 0$ existirá cierto $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|z_n - e^a| < \varepsilon, \forall n \geq n_0 \quad (1)$$

Por otra parte, como $x_n \to +\infty$, existe cierto $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n > n_0, \forall n \geq n_1 \quad (2)$$

Con todo, si es $n \geq n_1$ tenemos que

$$\left| \left(1 + \frac{a}{x_n}\right)^{x_n} - e^a \right| = \left| z_{x_n} - e^a \right| \underset{(1),(2)}{<} \varepsilon$$

lo que prueba lo deseado.

Ahora, si es $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión no necesariamente de números naturales observemos que para cada n

$$\lfloor x_n \rfloor \leq x_n < \lfloor x_n \rfloor + 1$$

y con ello si $a > 0$:

- $$\frac{a}{x_n} \leq \frac{a}{\lfloor x_n \rfloor} \rightarrow 1 + \frac{a}{x_n} \leq 1 + \frac{a}{\lfloor x_n \rfloor} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(1 + \frac{a}{x_n}\right)^{x_n} \leq \left(1 + \frac{a}{\lfloor x_n \rfloor}\right)^{x_n} \leq \left(1 + \frac{a}{\lfloor x_n \rfloor}\right)^{\lfloor x_n \rfloor + 1}$$

- $$\frac{a}{\lfloor x_n \rfloor + 1} \leq \frac{a}{x_n} \rightarrow 1 + \frac{a}{\lfloor x_n \rfloor + 1} \leq 1 + \frac{a}{x_n} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(1 + \frac{a}{\lfloor x_n \rfloor + 1}\right)^{\lfloor x_n \rfloor} \leq \left(1 + \frac{a}{x_n}\right)^{\lfloor x_n \rfloor} \leq \left(1 + \frac{a}{x_n}\right)^{x_n}$$

Juntando ambas desigualdades tenemos que si $a>0$

$$\left(1+\frac{a}{\lfloor x_n\rfloor+1}\right)^{\lfloor x_n\rfloor} \leq \left(1+\frac{a}{x_n}\right)^{x_n} \leq \left(1+\frac{a}{\lfloor x_n\rfloor}\right)^{\lfloor x_n\rfloor+1} \quad (3)$$

Si $a<0$ (si $a=0$ el resultado es trivial) de la misma forma se obtiene que

$$\left(1+\frac{a}{\lfloor x_n\rfloor}\right)^{\lfloor x_n\rfloor} \leq \left(1+\frac{a}{x_n}\right)^{x_n} \leq \left(1+\frac{a}{\lfloor x_n\rfloor+1}\right)^{\lfloor x_n\rfloor+1} \quad (4)$$

En (3) observemos que por lo visto al comienzo ⊛

- $\left(1+\frac{a}{\lfloor x_n\rfloor+1}\right)^{\lfloor x_n\rfloor} = \left(1+\frac{a}{\lfloor x_n\rfloor+1}\right)^{\lfloor x_n\rfloor+1} \cdot \left(1+\frac{a}{\lfloor x_n\rfloor+1}\right)^{-1} \to e^a$

- $\left(1+\frac{a}{\lfloor x_n\rfloor}\right)^{\lfloor x_n\rfloor+1} = \left(1+\frac{a}{\lfloor x_n\rfloor}\right)^{\lfloor x_n\rfloor} \cdot \left(1+\frac{a}{\lfloor x_n\rfloor}\right) \to e^a$

Luego por el teorema del sandwich concluimos
En (4) se procede de forma análoga. $\blacksquare$

⊛ $\lfloor x_n\rfloor+1 \in \mathbb{N}$ y $\lfloor x_n\rfloor+1 \to +\infty$