

- Calcula el valor de la siguiente integral:

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^2(x)}{1 + \cos^2(x)} dx$$

Resolución incorrecta

Observemos que

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^2(x)}{1 + \cos^2(x)} dx = \int_0^{\pi} -1 + \frac{2}{1 + \cos^2(x)} dx = -\pi + 2 \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \cos^2(x)} dx \quad (1)$$

Por tanto, busquemos una primitiva de $\frac{1}{1+\cos^2(x)}$.

Para ello, observemos primero que

$$\frac{1}{1 + \cos^2(x)} = \frac{\sec^2(x)}{\sec^2(x) + 1} = \frac{\sec^2(x)}{2 + \tan^2(x)} \quad (2)$$

Luego, con el cambio de variable $u = \tan(x)$ (donde $du = \sec^2(x) dx$ se obtiene que

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1 + \cos^2(x)} dx &\stackrel{(2)}{=} \int \frac{\sec^2(x)}{2 + \tan^2(x)} dx = \int \frac{1}{2 + u^2} du = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2} du = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1 + \left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2} du = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) + C = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan\left(\frac{\tan(x)}{\sqrt{2}}\right) + C \end{aligned} \quad (3)$$

Juntando entonces (1) y (3) obtenemos que

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^2(x)}{1 + \cos^2(x)} dx = -\pi + 2 \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \cos^2(x)} dx = -\pi + 2 \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \arctan\left(\frac{\tan(x)}{\sqrt{2}}\right) \right]_0^{\pi} = -\pi \quad (4)$$

Esta respuesta es claramente errónea pues el integrando es positivo y hemos obtenido un valor negativo para la integral.

Resolución correcta

Todo lo dicho hasta (3) es correcto con un matiz:

Cuando en (2) multiplicamos el numerador y denominador por $\sec^2(x)$ debemos tener en cuenta que la expresión no queda bien definida si $x = \frac{\pi}{2}$ (realmente en todos los múltiplos impares de este valor, pero como queremos integrar la función en el intervalo $[0, \pi]$, únicamente este valor es relevante).

Por tanto, la primitiva calculada en (3) no es válida en todo el intervalo $(0, \pi)$ (no está definida en $\pi/2$) y, en consecuencia, no es posible aplicar el segundo teorema fundamental del cálculo tal y como se ha aplicado en (4).

Para obtener correctamente el valor de la integral recordemos que el primer teorema fundamental del cálculo nos dice que las funciones $F_1 : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$ y $F_2 : [\pi/2, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$F_1(x) = \int_0^x \frac{1}{1 + \cos^2(t)} dt \quad (5)$$

$$F_2(x) = \int_x^\pi \frac{1}{1 + \cos^2(t)} dt \quad (6)$$

son continuas.

Podemos entonces expresar

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{1}{1 + \cos^2(x)} dx &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cos^2(x)} dx + \int_{\pi/2}^\pi \frac{1}{1 + \cos^2(x)} dx = F_1(\pi/2) + F_2(\pi/2) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} F_1(x) + \lim_{x \rightarrow \pi/2^+} F_2(x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \int_0^x \frac{1}{1 + \cos^2(t)} dt + \lim_{x \rightarrow \pi/2^+} \int_x^\pi \frac{1}{1 + \cos^2(t)} dt \end{aligned} \quad (7)$$

Ahora sí, si $0 < x < \pi/2$ entonces (3) nos da una primitiva de $\frac{1}{1 + \cos^2(x)}$ y obtenemos que

$$\int_0^x \frac{1}{1 + \cos^2(t)} dt = \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \left(\frac{\tan(t)}{\sqrt{2}} \right) \right]_0^x = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \left(\frac{\tan(x)}{\sqrt{2}} \right) \quad (8)$$

También, si $\pi/2 < x < \pi$ entonces (3) también es una primitiva de $\frac{1}{1 + \cos^2(x)}$ y obtenemos que

$$\int_x^\pi \frac{1}{1 + \cos^2(t)} dt = \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \left(\frac{\tan(t)}{\sqrt{2}} \right) \right]_x^\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \left(\frac{\tan(x)}{\sqrt{2}} \right) \quad (9)$$

Luego, por (7), (8) y (9) obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{1}{1 + \cos^2(x)} dx &= \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \left(\frac{\tan(x)}{\sqrt{2}} \right) + \lim_{x \rightarrow \pi/2^+} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \left(\frac{\tan(x)}{\sqrt{2}} \right) \right) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\pi}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \end{aligned} \quad (10)$$

Por (1) y (10) obtenemos finalmente que

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2(x)}{1 + \cos^2(x)} dx = -\pi + 2 \int_0^\pi \frac{1}{1 + \cos^2(x)} dx = -\pi + 2 \frac{\sqrt{2}}{2} \pi = (\sqrt{2} - 1)\pi \quad (11)$$

La resolución anterior se puede acortar un poco utilizando integrales impropias.

Recordemos que si f es una función integrable en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{b^-} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$$
$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a^+}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$$

Como (3) si nos proporciona una primitiva de $\frac{1}{1+\cos^2(x)}$ en los intervalos $[0, \pi/2)$ y $(\pi/2, \pi]$, utilizando la regla de Barrow para integrales impropias obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{1}{1+\cos^2(x)} dx &= \int_0^{\pi/2^-} \frac{1}{1+\cos^2(x)} dx + \int_{\pi/2^+}^\pi \frac{1}{1+\cos^2(x)} dx = \\ &= \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \left(\frac{\tan(x)}{\sqrt{2}} \right) \right]_0^{\pi/2^-} + \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \left(\frac{\tan(x)}{\sqrt{2}} \right) \right]_{\pi/2^+}^\pi = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \end{aligned} \tag{12}$$

Desde este punto, utilizando (1) concluimos.