- Extensión continua de H_n (números armónicos)

Definamos

$$H(n) = H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y observemos que

$$H(n+1) = H(n) + \frac{1}{n+1}, \quad \forall n \geq 1$$

Como la sucesión $H(n)$ queda completamente definida por la recursión

$$\left.\begin{aligned} &H(0) = 0 \\ &H(n+1) = H(n) + \frac{1}{n+1}, \quad \forall n \geq 1 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Buscaremos una función que cumpla (en cierto conjunto)

$$H(x+1) = H(x) + \frac{1}{x+1} \quad (2)$$

y extienda la sucesión.

Ahora, de (2) obtenemos que

$$H(x+2) = H((x+1)+1) = H(x+1) + \frac{1}{x+2} = H(x) + \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{x+k}$$

$$H(x+3) = H(x+2) + \frac{1}{x+3} = H(x) + \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{x+k}$$

y, de forma inductiva, que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$H(x+n) = H(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x+k} \quad (3)$$

Así, basta obtener el valor de H en $[0,1]$ y con (3) podemos extenderlo a $[0,+\infty)$

Si además imponemos que H sea creciente (tal y como lo es la sucesión (2)) tenemos que dado $x \in [0,1]$,

$$0 \leq H(x+n) - H(n) \leq H(n+1) - H(n) = \frac{1}{n+1}, \quad \forall n \geq 0$$

con lo que

$$\lim_{n\to+\infty} H(x+n) - H(n) = 0, \quad \forall x \in [0,1] \quad (4)$$

Por otro lado,

$$H(x+n) - H(n) \underset{(3)}{=} H(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} =$$

$$= H(x) - x \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(x+k)} \quad (5)$$

Como la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(x+k)}$$

converge para todo $x \geq 0$ (de hecho uniformemente pues

$\left| \frac{1}{k(x+k)} \right| \leq \frac{1}{k^2}, \forall k \geq 1$), de (4) y (5) obtenemos

$$\boxed{H(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k(x+k)}, \forall x \geq 0}$$

Es claro que

$$H(0) = 0$$

y observemos que

$$H(x+1) - H(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x+1}{k((x+1)+k)} - \frac{x}{k(x+k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)(x+k+1)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x+k} - \frac{1}{x+k+1} = \frac{1}{x+1}$$

con lo que H efectivamente satisface (2), y en particular, extiende la sucesión de números armónicos.

Para finalizar, veamos que H puede extenderse a $\mathbb{C} \setminus \{-1,-2,\dots\}$

Si es $z = x+iy$ con $z \neq -1,-2,\dots$ y $x \geq 0$ es

$$\frac{1}{|k(z+k)|} = \frac{1}{k|z+k|} \leq \frac{1}{k|Re(z+k)|} = \frac{1}{k|x+k|}, \quad \forall k \geq 1 \quad (6)$$

Así pues, por lo anterior y utilizando el test-M de Weierstrass $\left(\frac{1}{k|x+k|} \leq \frac{1}{k^2}\right)$, obtenemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z}{k(k+z)}$$

Converge uniformemente en $Re\, z \geq 0$. (H es analítica en $Re\, z > 0$).

Ahora, si $x<0$, observemos que tomando $K_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K_0 := -\lfloor x \rfloor$ se tiene que para $K > K_0$ $(Re(z+k)>0)$

$$\frac{1}{|k(z+k)|} \leq \frac{1}{k|x+k|} = \frac{1}{k(x+k)} \leq \frac{1}{(x+k)^2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{(\lfloor x \rfloor + k)^2}$$

Como

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{(\lfloor x \rfloor + k)^2} = \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{(k-k_0)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$$

Concluimos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z}{k(k+z)}$$

converge absolutamente.