

# El axioma de elección

Esteban Martínez Vañó

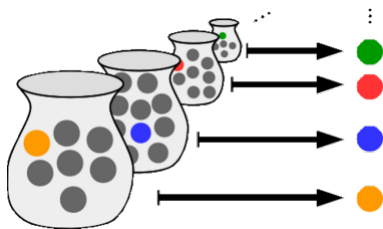
Universidad de Granada  
Departamento de Análisis Matemático

29 de mayo de 2025

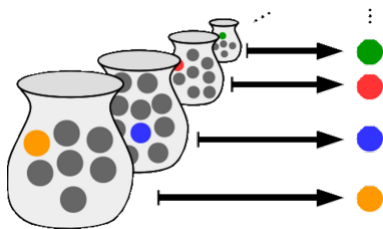
- 1 ¿Qué es el axioma de elección?
- 2 Afirmaciones equivalentes al axioma de elección
- 3 Formas débiles del axioma de elección
- 4 Desastres sin elección
- 5 Desastres con elección
- 6 Desastres por doquier
- 7 Referencias

- 1 ¿Qué es el axioma de elección?
- 2 Afirmaciones equivalentes al axioma de elección
- 3 Formas débiles del axioma de elección
- 4 Desastres sin elección
- 5 Desastres con elección
- 6 Desastres por doquier
- 7 Referencias

# ¿Qué es el axioma de elección?



## ¿Qué es el axioma de elección?



Dada cualquier familia de conjuntos  $I$  que no contenga al vacío existe una función de elección para  $I$ , es decir, existe una función  $f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} i$  de modo que  $f(i) \in i$  para cada  $i \in I$ .

## ¿Qué es el axioma de elección?

Dada cualquier familia de conjuntos  $I$ , existe una función de elección para  $I$ , es decir, existe una función  $f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} i$  de modo que  $f(i) \in i$  para cada  $i \in I$ .

## ¿Qué es el axioma de elección?

Dada cualquier familia de conjuntos  $I$ , existe una función de elección para  $I$ , es decir, existe una función  $f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} i$  de modo que  $f(i) \in i$  para cada  $i \in I$ .

Algunas consideraciones:

## ¿Qué es el axioma de elección?

Dada cualquier familia de conjuntos  $I$ , existe una función de elección para  $I$ , es decir, existe una función  $f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} i$  de modo que  $f(i) \in i$  para cada  $i \in I$ .

Algunas consideraciones:

- El axioma nos habla de la existencia de la función de elección, pero NO de una función de elección explícita.

## ¿Qué es el axioma de elección?

Dada cualquier familia de conjuntos  $I$ , existe una función de elección para  $I$ , es decir, existe una función  $f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} i$  de modo que  $f(i) \in i$  para cada  $i \in I$ .

Algunas consideraciones:

- El axioma nos habla de la existencia de la función de elección, pero NO de una función de elección explícita.
- Bajo ciertas condiciones extras (p.e. si los elementos de  $I$  están bien ordenados), podemos construir explícitamente la función de elección.

## ¿Qué es el axioma de elección?

Dada cualquier familia de conjuntos  $I$ , existe una función de elección para  $I$ , es decir, existe una función  $f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} i$  de modo que  $f(i) \in i$  para cada  $i \in I$ .

Algunas consideraciones:

- El axioma nos habla de la existencia de la función de elección, pero NO de una función de elección explícita.
- Bajo ciertas condiciones extras (p.e. si los elementos de  $I$  están bien ordenados), podemos construir explícitamente la función de elección.
- Si la familia  $I$  es finita, no necesitamos este axioma.

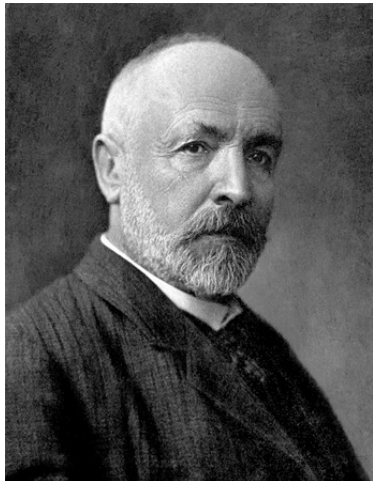
# ¿Qué es el axioma de elección?

¿Cómo surge el axioma de elección?

# ¿Qué es el axioma de elección?

¿Cómo surge el axioma de elección?

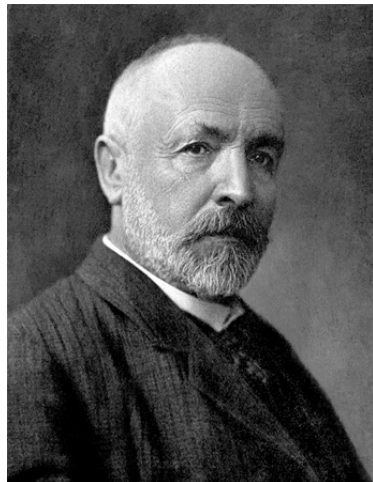
Georg Cantor (1845 - 1918)



# ¿Qué es el axioma de elección?

¿Cómo surge el axioma de elección?

Georg Cantor (1845 - 1918)



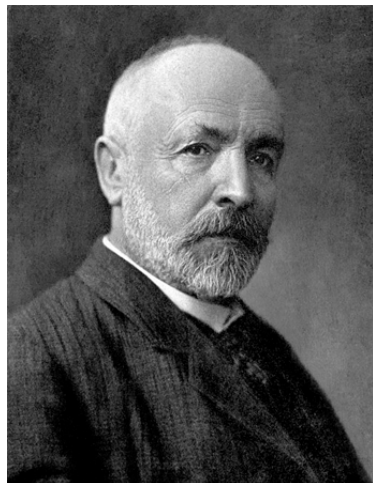
*Siempre es posible transformar cualquier conjunto bien definido en un conjunto bien ordenado. Más adelante diré más sobre esta ley del pensamiento, que me parece fundamental y de gran trascendencia, y que destaca especialmente por su universalidad.*

George Cantor (1883)

# ¿Qué es el axioma de elección?

¿Cómo surge el axioma de elección?

Georg Cantor (1845 - 1918)



David Hilbert (1862 - 1943)



# ¿Qué es el axioma de elección?

## ¿Cómo surge el axioma de elección?

David Hilbert (1862 - 1943)

### MATHEMATICAL PROBLEMS.\*

LECTURE DELIVERED BEFORE THE INTERNATIONAL CONGRESS OF MATHEMATICIANS AT PARIS IN 1900.

BY PROFESSOR DAVID HILBERT.

Who of us would not be glad to lift the veil behind which the future lies hidden; to cast a glance at the next advances of our science and at the secrets of its development during future centuries? What particular goals will there be toward which the leading mathematical spirits of coming generations will strive? What new methods and new facts in the wide and rich field of mathematical thought will the new centuries disclose?

History teaches the continuity of the development of science. We know that every age has its own problems, which the following age either solves or casts aside as profitless and replaces by new ones. If we would obtain an idea of the probable development of mathematical knowledge in the immediate future, we must let the unsettled questions pass before our minds and look over the problems which the science of to-day sets and whose solution we expect from the future. To such a review of problems the present day, lying at the meeting of the centuries, seems to me well adapted. For the close of a great epoch not only invites us to look back into the past but also directs our thoughts to the unknown future.

\*Translated for the BULLETIN, with the author's permission, by Dr. MARY WINSTON NEWSON. The original appeared in the *Göttinger Nachrichten*, 1900, pp. 253-297, and in the *Archiv der Mathematik und Physik*, 3d ser., vol. 1 (1901), pp. 44-63 and 213-237.



# ¿Qué es el axioma de elección?

## ¿Cómo surge el axioma de elección?

David Hilbert (1862 - 1943)

### 1. CANTOR'S PROBLEM OF THE CARDINAL NUMBER OF THE CONTINUUM.

Two systems, *i. e.*, two assemblages of ordinary real numbers or points, are said to be (according to Cantor) equivalent or of equal *cardinal number*, if they can be brought into a relation to one another such that to every number of the one assemblage corresponds one and only one definite number of the other. The investigations of Cantor on such assemblages of points suggest a very plausible theorem, which nevertheless, in spite of the most strenuous efforts, no one has succeeded in proving. This is the theorem :

Every system of infinitely many real numbers, *i. e.*, every assemblage of numbers (or points), is either equivalent to the assemblage of natural integers, 1, 2, 3,... or to the assemblage of all real numbers and therefore to the continuum, that is, to the points of a line ; as regards equivalence there are, therefore, only two assemblages of numbers, the countable assemblage and the continuum.



# ¿Qué es el axioma de elección?

## ¿Cómo surge el axioma de elección?

David Hilbert (1862 - 1943)

Let me mention another very remarkable statement of Cantor's which stands in the closest connection with the theorem mentioned and which, perhaps, offers the key to its proof. Any system of real numbers is said to be ordered, if for every two numbers of the system it is determined which one is the earlier and which the later, and if at the same time this determination is of such a kind that, if  $a$  is before  $b$  and  $b$  is before  $c$ , then  $a$  always comes before  $c$ . The natural arrangement of numbers of a system is defined to be that in which the smaller precedes the larger. But there are, as is easily seen, infinitely many other ways in which the numbers of a system may be arranged.

The question now arises whether the totality of all numbers may not be arranged in another manner so that every partial assemblage may have a first element, i. e., whether the continuum cannot be considered as a well ordered assemblage—a question which Cantor thinks must be answered in the affirmative. It appears to me most desirable to obtain a direct proof of this remarkable statement of Cantor's, perhaps by actually giving an arrangement of numbers such that in every partial system a first number can be pointed out.



# ¿Qué es el axioma de elección?

¿Cómo surge el axioma de elección?

Ernst Zermelo (1871 - 1953)



David Hilbert (1862 - 1943)



# ¿Qué es el axioma de elección?

¿Cómo surge el axioma de elección?

Ernst Zermelo (1871 - 1953)



*Proof that every set can be well-ordered*

ERNST ZERMELO

(1904)

---

The present proof rests upon the assumption that coverings  $\gamma$  actually do exist, hence upon the principle that even for an infinite totality of sets there are always mappings that associate with every set one of its elements, or, expressed formally, that the product of an infinite totality of sets, each containing at least one element, itself differs from zero. This logical principle cannot, to be sure, be reduced to a still simpler one, but it is applied without hesitation everywhere in mathematical deduction. For example, the validity of the proposition that the number of parts into which a set decomposes is less than or equal to the number of all of its elements cannot be proved except by associating with each of the parts in question one of its elements.

# ¿Qué es el axioma de elección?

¿Cómo surge el axioma de elección?

Ernst Zermelo (1871 - 1953)



*A new proof of the possibility of a well-ordering*

ERNST ZERMELO

(1908)

Although I still fully uphold my "Proof that every set can be well-ordered", published in 1904, in the face of the various objections that will be thoroughly discussed in § 2, the new proof that I give below of the same theorem may yet be of interest, since, on the one hand, it presupposes no specific theorems of set theory and, on the other, it brings out, more clearly than the first proof did, the purely formal character of the well-ordering, which has nothing at all to do with spatiotemporal arrangement.

# ¿Qué es el axioma de elección?

¿Cómo surge el axioma de elección?

Ernst Zermelo (1871 - 1953)



*Investigations in the foundations of set theory I*

ERNST ZERMELO

(1908a)

---

Now in the present paper I intend to show how the entire theory created by Cantor and Dedekind can be reduced to a few definitions and seven principles, or axioms, which appear to be mutually independent. The further, more philosophical, question about the origin of these principles and the extent to which they are valid will not be discussed here. I have not yet even been able to prove rigorously that my axioms

## ¿Qué es el axioma de elección?

En términos modernos (aunque las pruebas de Zermelo son bastante accesibles) podemos demostrar el teorema de Zermelo utilizando las siguientes herramientas de la teoría de conjuntos:

## ¿Qué es el axioma de elección?

En términos modernos (aunque las pruebas de Zermelo son bastante accesibles) podemos demostrar el teorema de Zermelo utilizando las siguientes herramientas de la teoría de conjuntos:

### Teorema: Teorema de Hartogs (ZF)

Dado un conjunto  $A$ , existe un conjunto  $h(A)$ , que se denomina *número de Hartogs* de  $A$ , que es el menor ordinal tal que no existe una aplicación inyectiva  $f : h(A) \rightarrow A$ .

## ¿Qué es el axioma de elección?

En términos modernos (aunque las pruebas de Zermelo son bastante accesibles) podemos **demostrar** el teorema de Zermelo utilizando las siguientes herramientas de la teoría de conjuntos:

### Teorema: Teorema de Hartogs (ZF)

Dado un conjunto  $A$ , existe un conjunto  $h(A)$ , que se denomina *número de Hartogs* de  $A$ , que es el menor ordinal tal que no existe una aplicación inyectiva  $f : h(A) \rightarrow A$ .

### Teorema: Teorema de recursión transfinita (ZF)

Si  $G$  es una función de  $V$  en  $V$  (la clase de todos los conjuntos), entonces existe una función  $F : \Omega \rightarrow V$  (con  $\Omega$  la clase de todos los ordinales) tal que

$$F(\alpha) = G(F|_{\alpha}).$$

# ¿Qué es el axioma de elección?

¿Podría llevarnos el axioma de elección a una contradicción?

## ¿Qué es el axioma de elección?

¿Podría llevarnos el axioma de elección a una contradicción?

Kurt Gödel (1906 - 1978)



### Teorema: Gödel, 1938

Si ZF es consistente, entonces lo es ZFC.

## ¿Qué es el axioma de elección?

¿Podría llevarnos el axioma de elección a una contradicción?

Gödel introdujo una jerarquía de conjuntos:

$$\begin{aligned}L_0 &= \emptyset \\L_{\alpha+1} &= \text{Def}(L_\alpha) \\L_\lambda &= \bigcup_{\alpha < \lambda} L_\alpha\end{aligned}$$

## ¿Qué es el axioma de elección?

¿Podría llevarnos el axioma de elección a una contradicción?

Gödel introdujo una jerarquía de conjuntos:

$$\begin{aligned}L_0 &= \emptyset \\L_{\alpha+1} &= \text{Def}(L_\alpha) \\L_\lambda &= \bigcup_{\alpha < \lambda} L_\alpha\end{aligned}$$

A la clase

$$L = \bigcup_{\alpha \in \Omega} L_\alpha$$

la llamo *el universo constructible* y demostró que es un modelo de ZF más el axioma que afirma que todo conjunto es constructible, teoría en la cual se puede demostrar el axioma de elección.

## ¿Qué es el axioma de elección?

**Moraleja:** El axioma de elección, por sí mismo, no introduce conjuntos “raros” de los que no tenemos ninguna descripción concreta, pues si únicamente tratamos con conjuntos constructibles es un teorema. Para que introduzca conjuntos “raros”, debemos estar ya tratando con conjuntos “raros”.

# ¿Qué es el axioma de elección?

Pero, ¿podría ser redundante? ¿Podría ser un teorema de ZF?

## ¿Qué es el axioma de elección?

Pero, ¿podría ser redundante? ¿Podría ser un teorema de ZF?

Paul Cohen (1934 - 2007)



### Teorema: Cohen, 1963

Si ZF es consistente, entonces lo es  $ZF \neg C$ .

- 1 ¿Qué es el axioma de elección?
- 2 Afirmaciones equivalentes al axioma de elección**
- 3 Formas débiles del axioma de elección
- 4 Desastres sin elección
- 5 Desastres con elección
- 6 Desastres por doquier
- 7 Referencias

# Afirmaciones equivalentes al axioma de elección

Son equivalentes:

- (I) El axioma de elección.

# Afirmaciones equivalentes al axioma de elección

Son equivalentes:

- (I) El axioma de elección.
- (II) El lema de Zorn.

Todo conjunto ordenado en el cual toda cadena tiene cota superior contiene un elemento maximal.

# Afirmaciones equivalentes al axioma de elección

Son equivalentes:

- (I) El axioma de elección.
  - (II) El lema de Zorn.
  - (III) El principio del buen orden.
- Todo conjunto admite un buen orden.

# Afirmaciones equivalentes al axioma de elección

Son equivalentes:

- (I) El axioma de elección.
- (II) El lema de Zorn.
- (III) El principio del buen orden.

Todo conjunto admite un buen orden.

*El Axioma de Elección es claramente cierto, el Principio del Buen Orden es claramente falso; ¿y quién puede decir nada sobre el lema de Zorn?*

Jerry L. Bona

# Afirmaciones equivalentes al axioma de elección

Son equivalentes:

- (I) El axioma de elección.
- (II) El lema de Zorn.
- (III) El principio del buen orden.
- (IV) Principio maximal de Hausdorff.

En cualquier conjunto ordenado cada cadena puede extenderse a una cadena maximal.

# Afirmaciones equivalentes al axioma de elección

Son equivalentes:

- (I) El axioma de elección.
- (II) El lema de Zorn.
- (III) El principio del buen orden.
- (IV) Principio maximal de Hausdorff.
- (V) Ley de tricotomía para cardinales.

Dados dos conjuntos, o bien son equipotentes, o bien existe una inyección de uno al otro o viceversa.

# Afirmaciones equivalentes al axioma de elección

Son equivalentes:

- (I) El axioma de elección.
- (II) El lema de Zorn.
- (III) El principio del buen orden.
- (IV) Principio maximal de Hausdorff.
- (V) Ley de tricotomía para cardinales.
- (VI) Teorema de Tarski.

Dados cualquier conjunto infinito  $A$ , existe una biyección entre  $A$  y  $A \times A$ .

# Afirmaciones equivalentes al axioma de elección

Son equivalentes:

- (I) El axioma de elección.
- (II) El lema de Zorn.
- (III) El principio del buen orden.
- (IV) Principio maximal de Hausdorff.
- (V) Ley de tricotomía para cardinales.
- (VI) Teorema de Tarski.

Dados cualquier conjunto infinito  $A$ , existe una biyección entre  $A$  y  $A \times A$ .

Al intentar Tarski publicar su resultado en la Academia de las Ciencias de París Fréchet y Lebesgue lo rechazaron. Fréchet escribió que una equivalencia entre dos resultados bien conocidos no es un resultado nuevo. Lebesgue escribió que una equivalencia entre dos proposiciones falsas no tiene interés ninguno.

# Afirmaciones equivalentes al axioma de elección

Son equivalentes:

- (I) El axioma de elección.
- (II) El lema de Zorn.
- (III) El principio del buen orden.
- (IV) Principio maximal de Hausdorff.
- (V) Ley de tricotomía para cardinales.
- (VI) Teorema de Tarski.
- (VII) Toda función sobreyectiva tiene inversa por la derecha.

# Afirmaciones equivalentes al axioma de elección

Son equivalentes:

- (I) El axioma de elección.
- (II) El lema de Zorn.
- (III) El principio del buen orden.
- (IV) Principio maximal de Hausdorff.
- (V) Ley de tricotomía para cardinales.
- (VI) Teorema de Tarski.
- (VII) Toda función sobreyectiva tiene inversa por la derecha.
- (VIII) Todo espacio vectorial tiene una base.

# Afirmaciones equivalentes al axioma de elección

Son equivalentes:

- (I) El axioma de elección.
- (II) El lema de Zorn.
- (III) El principio del buen orden.
- (IV) Principio maximal de Hausdorff.
- (V) Ley de tricotomía para cardinales.
- (VI) Teorema de Tarski
- (VII) Toda función sobreyectiva tiene inversa por la derecha.
- (VIII) Todo espacio vectorial tiene una base.
- (IX) Todo conjunto admite estructura de grupo (grupo abeliano, anillo, anillo conmutativo, dominio de integridad con unidad).

# Afirmaciones equivalentes al axioma de elección

Son equivalentes:

(x) Teorema de Krull.

En todo anillo unitario, cualquier ideal puede extenderse a un ideal maximal.

# Afirmaciones equivalentes al axioma de elección

Son equivalentes:

- (X) Teorema de Krull.
- (XI) La bola dual de un espacio normado real tiene un punto extremo.

# Afirmaciones equivalentes al axioma de elección

Son equivalentes:

- (X) Teorema de Krull.
- (XI) La bola dual de un espacio normado real tiene un punto extremo.
- (XII) El teorema de Hahn-Banach junto al teorema de Krein-Milman para subconjuntos quasicompactos convexos.

Un subconjunto  $K$  de un espacio vectorial topológico es quasicompacto si cualquier familia de cerrados convexos con la propiedad de intersección finita tiene intersección no vacía.

# Afirmaciones equivalentes al axioma de elección

Son equivalentes:

- (X) Teorema de Krull.
- (XI) La bola dual de un espacio normado real tiene un punto extremo.
- (XII) El teorema de Hahn-Banach junto al teorema de Krein-Milman para subconjuntos quasicompactos convexos.
- (XIII) El producto cartesiano de espacios conexos es conexo.

## Afirmaciones equivalentes al axioma de elección

Son equivalentes:

- (X) Teorema de Krull.
- (XI) La bola dual de un espacio normado real tiene un punto extremo.
- (XII) El teorema de Hahn-Banach junto al teorema de Krein-Milman para subconjuntos quasicompactos convexos.
- (XIII) El producto cartesiano de espacios conexos es conexo.
- (XIV) Teorema de Tychonoff.  
El producto cartesiano de espacios compactos es compacto.

## Afirmaciones equivalentes al axioma de elección

Son equivalentes:

- (X) Teorema de Krull.
- (XI) La bola dual de un espacio normado real tiene un punto extremo.
- (XII) El teorema de Hahn-Banach junto al teorema de Krein-Milman para subconjuntos quasicompactos convexos.
- (XIII) El producto cartesiano de espacios conexos es conexo.
- (XIV) Teorema de Tychonoff.
- (XV) En la topología producto, la clausura del producto cartesiano de una familia de subconjuntos es igual al producto de las clausuras.

## Afirmaciones equivalentes al axioma de elección

Son equivalentes:

- (X) Teorema de Krull.
- (XI) La bola dual de un espacio normado real tiene un punto extremo.
- (XII) El teorema de Hahn-Banach junto al teorema de Krein-Milman para subconjuntos quasicompactos convexos.
- (XIII) El producto cartesiano de espacios conexos es conexo.
- (XIV) Teorema de Tychonoff.
- (XV) En la topología producto, la clausura del producto cartesiano de una familia de subconjuntos es igual al producto de las clausuras.
- (XVI) Teorema de Löwenheim-Skolem.  
Si una teoría axiomática tiene un modelo de cardinal  $\kappa$ , entonces tiene un modelo de cardinal  $\mu$  para cada  $\aleph_0 \leq \mu \leq \kappa$ .

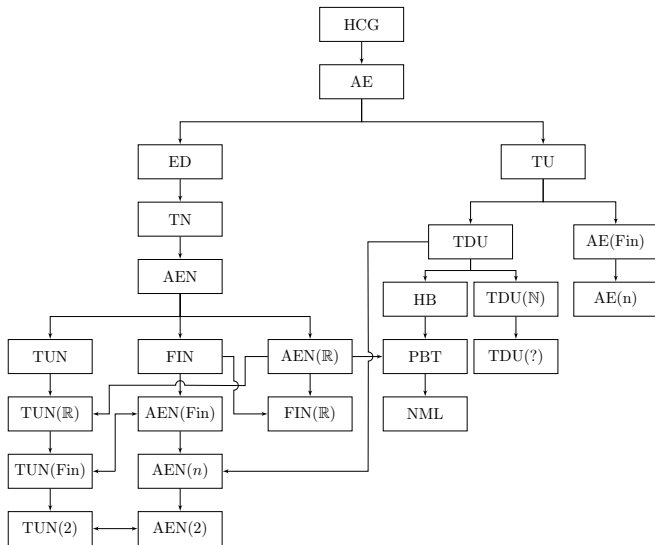
## Afirmaciones equivalentes al axioma de elección

Son equivalentes:

- (X) Teorema de Krull.
- (XI) La bola dual de un espacio normado real tiene un punto extremo.
- (XII) El teorema de Hahn-Banach junto al teorema de Krein-Milman para subconjuntos quasicompactos convexos.
- (XIII) El producto cartesiano de espacios conexos es conexo.
- (XIV) Teorema de Tychonoff.
- (XV) En la topología producto, la clausura del producto cartesiano de una familia de subconjuntos es igual al producto de las clausuras.
- (XVI) Teorema de Löwenheim-Skolem.
- (XVII) Todo grafo conexo tiene un árbol generador.

- 1 ¿Qué es el axioma de elección?
- 2 Afirmaciones equivalentes al axioma de elección
- 3 Formas débiles del axioma de elección**
- 4 Desastres sin elección
- 5 Desastres con elección
- 6 Desastres por doquier
- 7 Referencias

# Formas débiles del axioma de elección



## Formas débiles del axioma de elección

- **HCG**: Hipótesis del continuo generalizada.

Dados  $\kappa$  y  $\mu$  cardinales infinitos, si  $\kappa \leq \mu < 2^\kappa$ , entonces  $\kappa = \mu$ .

# Formas débiles del axioma de elección

- **HCG**: Hipótesis del continuo generalizada.
- **AE**: Axioma de elección.

# Formas débiles del axioma de elección

- **HCG**: Hipótesis del continuo generalizada.
- **AE**: Axioma de elección.
- **ED**: Axioma de elecciones dependientes.

Para cualquier relación entera  $R$  sobre un conjunto  $X$  (es decir, tal que para cada  $x \in X$  existe un  $y \in Y$  de modo que  $xRy$ ) existe una sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $x_n R x_{n+1}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

# Formas débiles del axioma de elección

- **HCG**: Hipótesis del continuo generalizada.
- **AE**: Axioma de elección.
- **ED**: Axioma de elecciones dependientes.
- **TU**: Teorema de los ultrafiltros.

Todo filtro sobre un conjunto se extiende a un ultrafiltro.

# Formas débiles del axioma de elección

- **HCG**: Hipótesis del continuo generalizada.
- **AE**: Axioma de elección.
- **ED**: Axioma de elecciones dependientes.
- **TU**: Teorema de los ultrafiltros.
- **TN**: Teorema de Tychonoff para productos numerables.

Todo producto numerable de espacios compactos es compacto.

# Formas débiles del axioma de elección

- **HCG**: Hipótesis del continuo generalizada.
- **AE**: Axioma de elección.
- **ED**: Axioma de elecciones dependientes.
- **TU**: Teorema de los ultrafiltros.
- **TN**: Teorema de Tychonoff para productos numerables.
- **TDU**: Teorema débil de los ultrafiltros.

Todo conjunto infinito tiene un ultrafiltro libre.

# Formas débiles del axioma de elección

- **HCG**: Hipótesis del continuo generalizada.
- **AE**: Axioma de elección.
- **ED**: Axioma de elecciones dependientes.
- **TU**: Teorema de los ultrafiltros.
- **TN**: Teorema de Tychonoff para productos numerables.
- **TDU**: Teorema débil de los ultrafiltros.
- **AE(Fin)**: Axioma de elección para familias de conjuntos finitos.

Todo familia de conjuntos finitos (no vacíos) tiene una función de elección.

# Formas débiles del axioma de elección

- **HCG**: Hipótesis del continuo generalizada.
- **AE**: Axioma de elección.
- **ED**: Axioma de elecciones dependientes.
- **TU**: Teorema de los ultrafiltros.
- **TN**: Teorema de Tychonoff para productos numerables.
- **TDU**: Teorema débil de los ultrafiltros.
- **AE(Fin)**: Axioma de elección para familias de conjuntos finitos.
- **AEN**: Axioma de elección numerable.

Todo familia numerable de conjuntos (no vacíos) tiene una función de elección.

# Formas débiles del axioma de elección

- **HCG**: Hipótesis del continuo generalizada.
- **AE**: Axioma de elección.
- **ED**: Axioma de elecciones dependientes.
- **TU**: Teorema de los ultrafiltros.
- **TN**: Teorema de Tychonoff para productos numerables.
- **TDU**: Teorema débil de los ultrafiltros.
- **AE(Fin)**: Axioma de elección para familias de conjuntos finitos.
- **AEN**: Axioma de elección numerable.
- **HB**: Teorema de Hahn-Banach

Todo funcional lineal y acotado en un subespacio normado puede extenderse a un funcional en todo el espacio y con la misma norma.

# Formas débiles del axioma de elección

- **HCG**: Hipótesis del continuo generalizada.
- **AE**: Axioma de elección.
- **ED**: Axioma de elecciones dependientes.
- **TU**: Teorema de los ultrafiltros.
- **TN**: Teorema de Tychonoff para productos numerables.
- **TDU**: Teorema débil de los ultrafiltros.
- **AE(Fin)**: Axioma de elección para familias de conjuntos finitos.
- **AEN**: Axioma de elección numerable.
- **HB**: Teorema de Hahn-Banach
- **TDU( $\mathbb{N}$ )**: Teorema débil de los ultrafiltros en  $\mathbb{N}$ .

Existe un ultrafiltro libre en  $\mathbb{N}$ .

# Formas débiles del axioma de elección

- **HCG**: Hipótesis del continuo generalizada.
- **AE**: Axioma de elección.
- **ED**: Axioma de elecciones dependientes.
- **TU**: Teorema de los ultrafiltros.
- **TN**: Teorema de Tychonoff para productos numerables.
- **TDU**: Teorema débil de los ultrafiltros.
- **AE(Fin)**: Axioma de elección para familias de conjuntos finitos.
- **AEN**: Axioma de elección numerable.
- **HB**: Teorema de Hahn-Banach
- **TDU( $\mathbb{N}$ )**: Teorema débil de los ultrafiltros en  $\mathbb{N}$ .
- **AE( $n$ )**: Axioma de elección para familias de conjuntos con  $n$  elementos.

Todo familia formada por conjuntos con  $n$  elementos tiene una fun-

## Formas débiles del axioma de elección

- **TUN**: Teorema de la unión numerable.

La unión numerable de conjuntos numerables es numerable.

# Formas débiles del axioma de elección

- **TUN**: Teorema de la unión numerable.
- **FIN**: Todo conjunto infinito es Dedekind-infinito.

Un conjunto es infinito si no es equipotente a ningún número natural.  
Un conjunto es Dedekind-infinito si es equipotente a un subconjunto propio o, equivalentemente, si tiene un subconjunto numerable.

# Formas débiles del axioma de elección

- **TUN**: Teorema de la unión numerable.
- **FIN**: Todo conjunto infinito es Dedekind-infinito.
- **AEN( $\mathbb{R}$ )**: Axioma de elección numerable en  $\mathbb{R}$ .

Todo familia numerable de conjuntos (no vacíos) de  $\mathbb{R}$  tiene una función de elección.

# Formas débiles del axioma de elección

- **TUN**: Teorema de la unión numerable.
- **FIN**: Todo conjunto infinito es Dedekind-infinito.
- **AEN**( $\mathbb{R}$ ): Axioma de elección numerable en  $\mathbb{R}$ .
- **PBT**: Paradoja de Banach-Tarski.

Existe una partición  $\{A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n\}$  de la bola unidad  $B$  en  $\mathbb{R}^3$  y ciertas isometrías  $f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n$  tales que:

$$B = \bigcup_{i=1}^n f_i(A_i)$$

$$B = \bigcup_{i=1}^n g_i(B_i).$$

# Formas débiles del axioma de elección

- **TUN**: Teorema de la unión numerable.
- **FIN**: Todo conjunto infinito es Dedekind-infinito.
- **AEN( $\mathbb{R}$ )**: Axioma de elección numerable en  $\mathbb{R}$ .
- **PBT**: Paradoja de Banach-Tarski.
- **TDU(?)**: Existe un conjunto que tiene un ultrafiltro libre.

# Formas débiles del axioma de elección

- **TUN**: Teorema de la unión numerable.
- **FIN**: Todo conjunto infinito es Dedekind-infinito.
- **AEN( $\mathbb{R}$ )**: Axioma de elección numerable en  $\mathbb{R}$ .
- **PBT**: Paradoja de Banach-Tarski.
- **TDU(?)**: Existe un conjunto que tiene un ultrafiltro libre.
- **TUN( $\mathbb{R}$ )**: Teorema de la unión numerable en  $\mathbb{R}$ .

La unión numerable de subconjuntos numerables de  $\mathbb{R}$  es numerable.

# Formas débiles del axioma de elección

- **TUN**: Teorema de la unión numerable.
- **FIN**: Todo conjunto infinito es Dedekind-infinito.
- **AEN( $\mathbb{R}$ )**: Axioma de elección numerable en  $\mathbb{R}$ .
- **PBT**: Paradoja de Banach-Tarski.
- **TDU(?)**: Existe un conjunto que tiene un ultrafiltro libre.
- **TUN( $\mathbb{R}$ )**: Teorema de la unión numerable en  $\mathbb{R}$ .
- **AEN(Fin)**: Ax. de elección numerable para conjuntos finitos.

Todo familia numerable de conjuntos finitos (no vacíos) tiene una función de elección.

# Formas débiles del axioma de elección

- **TUN**: Teorema de la unión numerable.
- **FIN**: Todo conjunto infinito es Dedekind-infinito.
- **AEN( $\mathbb{R}$ )**: Axioma de elección numerable en  $\mathbb{R}$ .
- **PBT**: Paradoja de Banach-Tarski.
- **TDU(?)**: Existe un conjunto que tiene un ultrafiltro libre.
- **TUN( $\mathbb{R}$ )**: Teorema de la unión numerable en  $\mathbb{R}$ .
- **AEN(Fin)**: Ax. de elección numerable para conjuntos finitos.
- **FIN( $\mathbb{R}$ )**: Todo conjunto infinito de  $\mathbb{R}$  es Dedekind-infinito.

# Formas débiles del axioma de elección

- **TUN**: Teorema de la unión numerable.
- **FIN**: Todo conjunto infinito es Dedekind-infinito.
- **AEN( $\mathbb{R}$ )**: Axioma de elección numerable en  $\mathbb{R}$ .
- **PBT**: Paradoja de Banach-Tarski.
- **TDU(?)**: Existe un conjunto que tiene un ultrafiltro libre.
- **TUN( $\mathbb{R}$ )**: Teorema de la unión numerable en  $\mathbb{R}$ .
- **AEN(Fin)**: Ax. de elección numerable para conjuntos finitos.
- **FIN( $\mathbb{R}$ )**: Todo conjunto infinito de  $\mathbb{R}$  es Dedekind-infinito.
- **NML**: Existen conjuntos no medibles-Lebesgue.

## Formas débiles del axioma de elección

- **TUN**: Teorema de la unión numerable.
- **FIN**: Todo conjunto infinito es Dedekind-infinito.
- **AEN( $\mathbb{R}$ )**: Axioma de elección numerable en  $\mathbb{R}$ .
- **PBT**: Paradoja de Banach-Tarski.
- **TDU(?)**: Existe un conjunto que tiene un ultrafiltro libre.
- **TUN( $\mathbb{R}$ )**: Teorema de la unión numerable en  $\mathbb{R}$ .
- **AEN(Fin)**: Ax. de elección numerable para conjuntos finitos.
- **FIN( $\mathbb{R}$ )**: Todo conjunto infinito de  $\mathbb{R}$  es Dedekind-infinito.
- **NML**: Existen conjuntos no medibles-Lebesgue.
- **TUN(Fin)**: La unión num. de conjuntos finitos es numerable.

## Formas débiles del axioma de elección

- **TUN**: Teorema de la unión numerable.
- **FIN**: Todo conjunto infinito es Dedekind-infinito.
- **AEN( $\mathbb{R}$ )**: Axioma de elección numerable en  $\mathbb{R}$ .
- **PBT**: Paradoja de Banach-Tarski.
- **TDU(?)**: Existe un conjunto que tiene un ultrafiltro libre.
- **TUN( $\mathbb{R}$ )**: Teorema de la unión numerable en  $\mathbb{R}$ .
- **AEN(Fin)**: Ax. de elección numerable para conjuntos finitos.
- **FIN( $\mathbb{R}$ )**: Todo conjunto infinito de  $\mathbb{R}$  es Dedekind-infinito.
- **NML**: Existen conjuntos no medibles-Lebesgue.
- **TUN(Fin)**: La unión num. de conjuntos finitos es numerable.
- **AEN( $n$ )**: Ax. de elección num. para conjuntos con  $n$  elementos.

## Formas débiles del axioma de elección

- **TUN**: Teorema de la unión numerable.
- **FIN**: Todo conjunto infinito es Dedekind-infinito.
- **AEN( $\mathbb{R}$ )**: Axioma de elección numerable en  $\mathbb{R}$ .
- **PBT**: Paradoja de Banach-Tarski.
- **TDU(?)**: Existe un conjunto que tiene un ultrafiltro libre.
- **TUN( $\mathbb{R}$ )**: Teorema de la unión numerable en  $\mathbb{R}$ .
- **AEN(Fin)**: Ax. de elección numerable para conjuntos finitos.
- **FIN( $\mathbb{R}$ )**: Todo conjunto infinito de  $\mathbb{R}$  es Dedekind-infinito.
- **NML**: Existen conjuntos no medibles-Lebesgue.
- **TUN(Fin)**: La unión num. de conjuntos finitos es numerable.
- **AEN( $n$ )**: Ax. de elección num. para conjuntos con  $n$  elementos.
- **TUN(2)**: La unión num. de cjtos. con dos elementos es num.

## Formas débiles del axioma de elección

- **TUN**: Teorema de la unión numerable.
- **FIN**: Todo conjunto infinito es Dedekind-infinito.
- **AEN( $\mathbb{R}$ )**: Axioma de elección numerable en  $\mathbb{R}$ .
- **PBT**: Paradoja de Banach-Tarski.
- **TDU(?)**: Existe un conjunto que tiene un ultrafiltro libre.
- **TUN( $\mathbb{R}$ )**: Teorema de la unión numerable en  $\mathbb{R}$ .
- **AEN(Fin)**: Ax. de elección numerable para conjuntos finitos.
- **FIN( $\mathbb{R}$ )**: Todo conjunto infinito de  $\mathbb{R}$  es Dedekind-infinito.
- **NML**: Existen conjuntos no medibles-Lebesgue.
- **TUN(Fin)**: La unión num. de conjuntos finitos es numerable.
- **AEN( $n$ )**: Ax. de elección num. para conjuntos con  $n$  elementos.
- **TUN(2)**: La unión num. de cjtos. con dos elementos es num.
- **AEN(2)**: Ax. de elección num. para conjuntos con 2 elementos.

- 1 ¿Qué es el axioma de elección?
- 2 Afirmaciones equivalentes al axioma de elección
- 3 Formas débiles del axioma de elección
- 4 Desastres sin elección**
- 5 Desastres con elección
- 6 Desastres por doquier
- 7 Referencias

En ZF puede ocurrir que:

En ZF puede ocurrir que:

- La unión Dedekind-finita de conjuntos Dedekind-finitos es Dedekind-infinita.

En ZF puede ocurrir que:

- La unión Dedekind-finita de conjuntos Dedekind-finitos es Dedekind-infinita.
- El conjunto de partes de un conjunto Dedekind-finito sea Dedekind-infinito.

En ZF puede ocurrir que:

- La unión Dedekind-finita de conjuntos Dedekind-finitos es Dedekind-infinita.
- El conjunto de partes de un conjunto Dedekind-finito sea Dedekind-infinito.
- La imagen de un conjunto Dedekind-finito sea Dedekind-infinita.

En ZF puede ocurrir que:

- La unión Dedekind-finita de conjuntos Dedekind-finitos es Dedekind-infinita.
- El conjunto de partes de un conjunto Dedekind-finito sea Dedekind-infinito.
- La imagen de un conjunto Dedekind-finito sea Dedekind-infinita.

Sin embargo, si se tiene que en ZF se cumplen:

En ZF puede ocurrir que:

- La unión Dedekind-finita de conjuntos Dedekind-finitos es Dedekind-infinita.
- El conjunto de partes de un conjunto Dedekind-finito sea Dedekind-infinito.
- La imagen de un conjunto Dedekind-finito sea Dedekind-infinita.

Sin embargo, si se tiene que en ZF se cumplen:

- La unión finita de conjuntos finitos es finita.

En ZF puede ocurrir que:

- La unión Dedekind-finita de conjuntos Dedekind-finitos es Dedekind-infinita.
- El conjunto de partes de un conjunto Dedekind-finito sea Dedekind-infinito.
- La imagen de un conjunto Dedekind-finito sea Dedekind-infinita.

Sin embargo, si se tiene que en ZF se cumplen:

- La unión finita de conjuntos finitos es finita.
- El conjunto de partes de un conjunto finito es finito.

En ZF puede ocurrir que:

- La unión Dedekind-finita de conjuntos Dedekind-finitos es Dedekind-infinita.
- El conjunto de partes de un conjunto Dedekind-finito sea Dedekind-infinito.
- La imagen de un conjunto Dedekind-finito sea Dedekind-infinita.

Sin embargo, si se tiene que en ZF se cumplen:

- La unión finita de conjuntos finitos es finita.
- El conjunto de partes de un conjunto finito es finito.
- La imagen de un conjunto finito es finita.

El culpable es el axioma **FIN**, pues si bien es cierto en ZF que todo conjunto finito es Dedekind-finito, tenemos que son equivalentes en ZF:

El culpable es el axioma **FIN**, pues si bien es cierto en ZF que todo conjunto finito es Dedekind-finito, tenemos que son equivalentes en ZF:

- La unión Dedekind-finita de conjuntos Dedekind-finitos es Dedekind-finita.

El culpable es el axioma **FIN**, pues si bien es cierto en ZF que todo conjunto finito es Dedekind-finito, tenemos que son equivalentes en ZF:

- La unión Dedekind-finita de conjuntos Dedekind-finitos es Dedekind-finita.
- El conjunto de partes de un conjunto Dedekind-finito es Dedekind-finito.

El culpable es el axioma **FIN**, pues si bien es cierto en ZF que todo conjunto finito es Dedekind-finito, tenemos que son equivalentes en ZF:

- La unión Dedekind-finita de conjuntos Dedekind-finitos es Dedekind-finita.
- El conjunto de partes de un conjunto Dedekind-finito es Dedekind-finito.
- La imagen de un conjunto Dedekind-finito es Dedekind-finita.

El culpable es el axioma **FIN**, pues si bien es cierto en ZF que todo conjunto finito es Dedekind-finito, tenemos que son equivalentes en ZF:

- La unión Dedekind-finita de conjuntos Dedekind-finitos es Dedekind-finita.
- El conjunto de partes de un conjunto Dedekind-finito es Dedekind-finito.
- La imagen de un conjunto Dedekind-finito es Dedekind-finita.
- Todo conjunto Dedekind-finito es finito.

En ZF existe un subconjunto no vacío  $X$  de  $\mathbb{R}$  tal que:

En ZF existe un subconjunto no vacío  $X$  de  $\mathbb{R}$  tal que:

- $X$  no contiene ninguna sucesión decreciente, pero no está bien ordenado.

En ZF existe un subconjunto no vacío  $X$  de  $\mathbb{R}$  tal que:

- $X$  no contiene ninguna sucesión decreciente, pero no está bien ordenado.
- $X$  es infinito, pero no contiene ninguna sucesión estrictamente creciente, ni estrictamente decreciente.

En ZF existe un subconjunto no vacío  $X$  de  $\mathbb{R}$  tal que:

- $X$  no contiene ninguna sucesión decreciente, pero no está bien ordenado.
- $X$  es infinito, pero no contiene ninguna sucesión estrictamente creciente, ni estrictamente decreciente.
- $X$  no tiene máximo, pero no contiene ninguna sucesión estrictamente creciente.

En ZF existe un subconjunto no vacío  $X$  de  $\mathbb{R}$  tal que:

- $X$  no contiene ninguna sucesión decreciente, pero no está bien ordenado.
- $X$  es infinito, pero no contiene ninguna sucesión estrictamente creciente, ni estrictamente decreciente.
- $X$  no tiene máximo, pero no contiene ninguna sucesión estrictamente creciente.

En efecto, **basta tomar**  $X$  como un subconjunto infinito y Dedekind-finito.

En ZF existen:

En ZF existen:

- Espacios vectoriales sin base.

En ZF existen:

- Espacios vectoriales sin base.
- Espacios vectoriales con dos bases de distinto cardinal.

En ZF existen:

- Espacios vectoriales sin base.
- Espacios vectoriales con dos bases de distinto cardinal.
- Un espacio vectorial con un subespacio no complementado.

En ZF existen:

- Espacios vectoriales sin base.
- Espacios vectoriales con dos bases de distinto cardinal.
- Un espacio vectorial con un subespacio no complementado.
- Un espacio vectorial puede tener únicamente subespacios propios de dimensión finita, pero no ser finito-dimensional.

En ZF existen:

- Espacios vectoriales sin base.
- Espacios vectoriales con dos bases de distinto cardinal.
- Un espacio vectorial con un subespacio no complementado.
- Un espacio vectorial puede tener únicamente subespacios propios de dimensión finita, pero no ser finito-dimensional.

De hecho, en ZF son equivalentes:

En ZF existen:

- Espacios vectoriales sin base.
- Espacios vectoriales con dos bases de distinto cardinal.
- Un espacio vectorial con un subespacio no complementado.
- Un espacio vectorial puede tener únicamente subespacios propios de dimensión finita, pero no ser finito-dimensional.

De hecho, en ZF son equivalentes:

- Todo espacio vectorial tiene base.

En ZF existen:

- Espacios vectoriales sin base.
- Espacios vectoriales con dos bases de distinto cardinal.
- Un espacio vectorial con un subespacio no complementado.
- Un espacio vectorial puede tener únicamente subespacios propios de dimensión finita, pero no ser finito-dimensional.

De hecho, en ZF son equivalentes:

- Todo espacio vectorial tiene base.
- Todo subespacio de un espacio vectorial está complementado.

En ZF existen:

- Espacios vectoriales sin base.
- Espacios vectoriales con dos bases de distinto cardinal.
- Un espacio vectorial con un subespacio no complementado.
- Un espacio vectorial puede tener únicamente subespacios propios de dimensión finita, pero no ser finito-dimensional.

De hecho, en ZF son equivalentes:

- Todo espacio vectorial tiene base.
- Todo subespacio de un espacio vectorial está complementado.
- El axioma de elección.

# Análisis

Antes de ver los “desastres”, observemos que en ZF sí se cumplen:

Antes de ver los “desastres”, observemos que en ZF sí se cumplen:

- $\mathbb{R}$  y todos sus subespacios son metrizable.

# Análisis

Antes de ver los “desastres”, observemos que en ZF sí se cumplen:

- $\mathbb{R}$  y todos sus subespacios son metrizables.
- $\mathbb{R}$  y todos sus subespacios tienen bases numerables.

Antes de ver los “desastres”, observemos que en ZF sí se cumplen:

- $\mathbb{R}$  y todos sus subespacios son metrizables.
- $\mathbb{R}$  y todos sus subespacios tienen bases numerables.
- $\mathbb{R}$  es separable.

Antes de ver los “desastres”, observemos que en ZF sí se cumplen:

- $\mathbb{R}$  y todos sus subespacios son metrizables.
- $\mathbb{R}$  y todos sus subespacios tienen bases numerables.
- $\mathbb{R}$  es separable.
- Un subespacio de  $\mathbb{R}$  es conexo si, y solo si, es un intervalo.

Antes de ver los “desastres”, observemos que en ZF sí se cumplen:

- $\mathbb{R}$  y todos sus subespacios son metrizables.
- $\mathbb{R}$  y todos sus subespacios tienen bases numerables.
- $\mathbb{R}$  es separable.
- Un subespacio de  $\mathbb{R}$  es conexo si, y solo si, es un intervalo.
- Un subespacio de  $\mathbb{R}$  es compacto si, y solo si, es cerrado y acotado.

Antes de ver los “desastres”, observemos que en ZF sí se cumplen:

- $\mathbb{R}$  y todos sus subespacios son metrizablees.
- $\mathbb{R}$  y todos sus subespacios tienen bases numerables.
- $\mathbb{R}$  es separable.
- Un subespacio de  $\mathbb{R}$  es conexo si, y solo si, es un intervalo.
- Un subespacio de  $\mathbb{R}$  es compacto si, y solo si, es cerrado y acotado.
- Todo conjunto infinito y acotado de  $\mathbb{R}$  tiene un punto de acumulación en  $\mathbb{R}$ .

Antes de ver los “desastres”, observemos que en ZF sí se cumplen:

- $\mathbb{R}$  y todos sus subespacios son metrizablees.
- $\mathbb{R}$  y todos sus subespacios tienen bases numerables.
- $\mathbb{R}$  es separable.
- Un subespacio de  $\mathbb{R}$  es conexo si, y solo si, es un intervalo.
- Un subespacio de  $\mathbb{R}$  es compacto si, y solo si, es cerrado y acotado.
- Todo conjunto infinito y acotado de  $\mathbb{R}$  tiene un punto de acumulación en  $\mathbb{R}$ .
- Una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua si, y solo si, es secuencialmente continua.

Antes de ver los “desastres”, observemos que en ZF sí se cumplen:

- $\mathbb{R}$  y todos sus subespacios son metrizables.
- $\mathbb{R}$  y todos sus subespacios tienen bases numerables.
- $\mathbb{R}$  es separable.
- Un subespacio de  $\mathbb{R}$  es conexo si, y solo si, es un intervalo.
- Un subespacio de  $\mathbb{R}$  es compacto si, y solo si, es cerrado y acotado.
- Todo conjunto infinito y acotado de  $\mathbb{R}$  tiene un punto de acumulación en  $\mathbb{R}$ .
- Una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua si, y solo si, es secuencialmente continua.
- Una función  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua si, y solo si, es uniformemente continua.

Sin embargo, en ZF puede ocurrir:

Sin embargo, en ZF puede ocurrir:

- $\mathbb{R}$  no es Fréchet-Urysohn.

Existe un subconjunto  $A \subset \mathbb{R}$  y un punto  $a \in \bar{A}$  de modo que no existe ninguna sucesión contenida en  $A$  que converja al punto  $a$ .

Sin embargo, en ZF puede ocurrir:

- $\mathbb{R}$  no es Fréchet-Urysohn.
- $\mathbb{R}$  no es secuencial.

Existe un subconjunto  $A \subset \mathbb{R}$  tal que para cualquier sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$  convergente a cierto  $x \in \mathbb{R}$  se cumple que  $x \in A$ , pero de modo que  $A$  no es cerrado.

Sin embargo, en ZF puede ocurrir:

- $\mathbb{R}$  no es Fréchet-Urysohn.
- $\mathbb{R}$  no es secuencial.
- $\mathbb{R}$  no es Lindelöf.

Un espacio topológico  $X$  es Lindelöf si todo cubrimiento abierto de  $X$  tiene un subcubrimiento numerable.

Sin embargo, en ZF puede ocurrir:

- $\mathbb{R}$  no es Fréchet-Urysohn.
- $\mathbb{R}$  no es secuencial.
- $\mathbb{R}$  no es Lindelöf.
- Existen subespacios de  $\mathbb{R}$  no separables.

Sin embargo, en ZF puede ocurrir:

- $\mathbb{R}$  no es Fréchet-Urysohn.
- $\mathbb{R}$  no es secuencial.
- $\mathbb{R}$  no es Lindelöf.
- Existen subespacios de  $\mathbb{R}$  no separables.
- Existen subespacios completos y no cerrados.

Sin embargo, en ZF puede ocurrir:

- $\mathbb{R}$  no es Fréchet-Urysohn.
- $\mathbb{R}$  no es secuencial.
- $\mathbb{R}$  no es Lindelöf.
- Existen subespacios de  $\mathbb{R}$  no separables.
- Existen subespacios completos y no cerrados.
- Existen subespacios secuencialmente compactos y no compactos.

Sin embargo, en ZF puede ocurrir:

- $\mathbb{R}$  no es Fréchet-Urysohn.
- $\mathbb{R}$  no es secuencial.
- $\mathbb{R}$  no es Lindelöf.
- Existen subespacios de  $\mathbb{R}$  no separables.
- Existen subespacios completos y no cerrados.
- Existen subespacios secuencialmente compactos y no compactos.
- Existen funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  secuencialmente continuas en un punto  $x$ , pero no continuas en  $x$ .

Sin embargo, en ZF puede ocurrir:

- $\mathbb{R}$  no es Fréchet-Urysohn.
- $\mathbb{R}$  no es secuencial.
- $\mathbb{R}$  no es Lindelöf.
- Existen subespacios de  $\mathbb{R}$  no separables.
- Existen subespacios completos y no cerrados.
- Existen subespacios secuencialmente compactos y no compactos.
- Existen funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  secuencialmente continuas en un punto  $x$ , pero no continuas en  $x$ .
- Existen funciones  $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  secuencialmente continuas, pero no continuas.

Basta considerar el axioma **AEN**( $\mathbb{R}$ ) para solucionar todos estos “desastres” y, de hecho, en ZF son equivalentes:

Basta considerar el axioma **AEN**( $\mathbb{R}$ ) para solucionar todos estos “desastres” y, de hecho, en ZF son equivalentes:

- AEN( $\mathbb{R}$ )

Basta considerar el axioma **AEN**( $\mathbb{R}$ ) para solucionar todos estos “desastres” y, de hecho, en ZF son equivalentes:

- AEN( $\mathbb{R}$ )
- $\mathbb{R}$  es Fréchet-Urysohn.

Basta considerar el axioma **AEN**( $\mathbb{R}$ ) para solucionar todos estos “desastres” y, de hecho, en ZF son equivalentes:

- AEN( $\mathbb{R}$ )
- $\mathbb{R}$  es Fréchet-Urysohn.
- $\mathbb{R}$  es Lindelöf.

Basta considerar el axioma **AEN( $\mathbb{R}$ )** para solucionar todos estos “desastres” y, de hecho, en ZF son equivalentes:

- AEN( $\mathbb{R}$ )
- $\mathbb{R}$  es Fréchet-Urysohn.
- $\mathbb{R}$  es Lindelöf.
- Todo subespacios de  $\mathbb{R}$  es separable.

Basta considerar el axioma **AEN**( $\mathbb{R}$ ) para solucionar todos estos “desastres” y, de hecho, en ZF son equivalentes:

- AEN( $\mathbb{R}$ )
- $\mathbb{R}$  es Fréchet-Urysohn.
- $\mathbb{R}$  es Lindelöf.
- Todo subespacios de  $\mathbb{R}$  es separable.
- Una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en un punto  $x$  si, y solo si, es secuencialmente continua en  $x$ .

Basta considerar el axioma **AEN( $\mathbb{R}$ )** para solucionar todos estos “desastres” y, de hecho, en ZF son equivalentes:

- AEN( $\mathbb{R}$ )
- $\mathbb{R}$  es Fréchet-Urysohn.
- $\mathbb{R}$  es Lindelöf.
- Todo subespacios de  $\mathbb{R}$  es separable.
- Una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en un punto  $x$  si, y solo si, es secuencialmente continua en  $x$ .
- Para cualquier subconjunto  $X \subset \mathbb{R}$ , una función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es continua si, y solo si, es secuencialmente continua.

Es resto de puntos son equivalentes en ZF al axioma  $AEN(c\mathbb{R})$ , el axioma de elección numerable para familias de subespacios completos (no vacíos) de  $\mathbb{R}$ . Es decir, son equivalentes:

Es resto de puntos son equivalentes en ZF al axioma  $\text{AEN}(c\mathbb{R})$ , el axioma de elección numerable para familias de subespacios completos (no vacíos) de  $\mathbb{R}$ . Es decir, son equivalentes:

- $\text{AEN}(c\mathbb{R})$

Es resto de puntos son equivalentes en ZF al axioma  $\text{AEN}(c\mathbb{R})$ , el axioma de elección numerable para familias de subespacios completos (no vacíos) de  $\mathbb{R}$ . Es decir, son equivalentes:

- $\text{AEN}(c\mathbb{R})$
- $\mathbb{R}$  es secuencial.

Es resto de puntos son equivalentes en ZF al axioma  $\text{AEN}(c\mathbb{R})$ , el axioma de elección numerable para familias de subespacios completos (no vacíos) de  $\mathbb{R}$ . Es decir, son equivalentes:

- $\text{AEN}(c\mathbb{R})$
- $\mathbb{R}$  es secuencial.
- Todos subespacio completo de  $\mathbb{R}$  es cerrado.

Es resto de puntos son equivalentes en ZF al axioma  $\text{AEN}(c\mathbb{R})$ , el axioma de elección numerable para familias de subespacios completos (no vacíos) de  $\mathbb{R}$ . Es decir, son equivalentes:

- $\text{AEN}(c\mathbb{R})$
- $\mathbb{R}$  es secuencial.
- Todos subespacio completo de  $\mathbb{R}$  es cerrado.
- Todo subespacio secuencialmente compacto de  $\mathbb{R}$  es compacto.

Es resto de puntos son equivalentes en ZF al axioma  $\text{AEN}(c\mathbb{R})$ , el axioma de elección numerable para familias de subespacios completos (no vacíos) de  $\mathbb{R}$ . Es decir, son equivalentes:

- $\text{AEN}(c\mathbb{R})$
- $\mathbb{R}$  es secuencial.
- Todos subespacio completo de  $\mathbb{R}$  es cerrado.
- Todo subespacio secuencialmente compacto de  $\mathbb{R}$  es compacto.
- $\text{AE}(c\mathbb{R})$ .

Otros “desastres” importantes son:

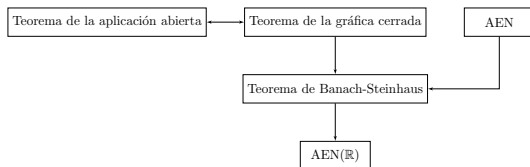
Otros “desastres” importantes son:

- El axioma de elección es equivalente al teorema de Krein-Milman junto al teorema de Alaoglu-Bourbaki.

# Análisis

Otros “desastres” importantes son:

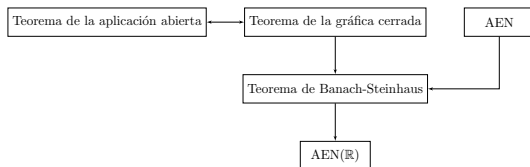
- El axioma de elección es equivalente al teorema de Krein-Milman junto al teorema de Alaoglu-Bourbaki.
- El teorema de Hahn-Banach no es un teorema de ZF, así como tampoco lo son ninguno de los teoremas básicos del análisis funcional:



# Análisis

Otros “desastres” importantes son:

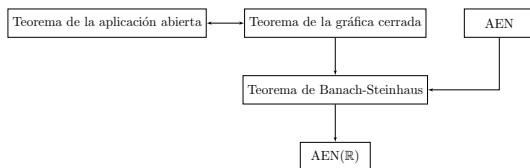
- El axioma de elección es equivalente al teorema de Krein-Milman junto al teorema de Alaoglu-Bourbaki.
- El teorema de Hahn-Banach no es un teorema de ZF, así como tampoco lo son ninguno de los teoremas básicos del análisis funcional:



- El teorema de Arzelà-Ascoli es equivalente al axioma AEN( $\mathbb{R}$ ).

Otros “desastres” importantes son:

- El axioma de elección es equivalente al teorema de Krein-Milman junto al teorema de Alaoglu-Bourbaki.
- El teorema de Hahn-Banach no es un teorema de ZF, así como tampoco lo son ninguno de los teoremas básicos del análisis funcional:



- El teorema de Arzelà-Ascoli es equivalente al axioma AEN( $\mathbb{R}$ ).
- El axioma de elecciones dependientes (ED) es equivalente al teorema de categorías de Baire.

En ZF se cumplen:

En ZF se cumplen:

- El axioma de elección es equivalente al teorema de Tychonoff.

En ZF se cumplen:

- El axioma de elección es equivalente al teorema de Tychonoff.
- Son equivalentes:

En ZF se cumplen:

- El axioma de elección es equivalente al teorema de Tychonoff.
- Son equivalentes:
  - El teorema de los ultrafiltros.

En ZF se cumplen:

- El axioma de elección es equivalente al teorema de Tychonoff.
- Son equivalentes:
  - El teorema de los ultrafiltros.
  - El producto de espacios de Hausdorff compactos es compacto.

En ZF se cumplen:

- El axioma de elección es equivalente al teorema de Tychonoff.
- Son equivalentes:
  - El teorema de los ultrafiltros.
  - El producto de espacios de Hausdorff compactos es compacto.
  - El cubo de Hilbert  $([0, 1]^J)$  es compacto.

En ZF se cumplen:

- El axioma de elección es equivalente al teorema de Tychonoff.
- Son equivalentes:
  - El teorema de los ultrafiltros.
  - El producto de espacios de Hausdorff compactos es compacto.
  - El cubo de Hilbert  $([0, 1]^J)$  es compacto.
  - El cubo de Cantor  $(\{0, 1\}^J)$  es compacto.

# Teoría de grafos

En ZFC se puede probar que para todo grafo  $G$  y todo natural  $n$  son equivalentes:

# Teoría de grafos

En ZFC se puede probar que para todo grafo  $G$  y todo natural  $n$  son equivalentes:

- $G$  es  $n$ -coloreable.

# Teoría de grafos

En ZFC se puede probar que para todo grafo  $G$  y todo natural  $n$  son equivalentes:

- $G$  es  $n$ -coloreable.
- Todo subgrafo finito de  $G$  es  $n$ -coloreable.

# Teoría de grafos

En ZFC se puede probar que para todo grafo  $G$  y todo natural  $n$  son equivalentes:

- $G$  es  $n$ -coloreable.
- Todo subgrafo finito de  $G$  es  $n$ -coloreable.

Sin embargo, en ZF se tiene que son equivalentes:

# Teoría de grafos

En ZFC se puede probar que para todo grafo  $G$  y todo natural  $n$  son equivalentes:

- $G$  es  $n$ -coloreable.
- Todo subgrafo finito de  $G$  es  $n$ -coloreable.

Sin embargo, en ZF se tiene que son equivalentes:

- Si todo subgrafo finito de un grafo  $G$  es 2-coloreable, entonces lo es  $G$ .

# Teoría de grafos

En ZFC se puede probar que para todo grafo  $G$  y todo natural  $n$  son equivalentes:

- $G$  es  $n$ -coloreable.
- Todo subgrafo finito de  $G$  es  $n$ -coloreable.

Sin embargo, en ZF se tiene que son equivalentes:

- Si todo subgrafo finito de un grafo  $G$  es 2-coloreable, entonces lo es  $G$ .
- AEN(2).

# Teoría de grafos

En ZFC se puede probar que para todo grafo  $G$  y todo natural  $n$  son equivalentes:

- $G$  es  $n$ -coloreable.
- Todo subgrafo finito de  $G$  es  $n$ -coloreable.

Sin embargo, en ZF se tiene que son equivalentes:

- Si todo subgrafo finito de un grafo  $G$  es 2-coloreable, entonces lo es  $G$ .
- AEN(2).

Podemos salvar el caso para  $n = 2$  en ZF exigiendo además que  $G$  sea conexo, pero para  $n = 3$  no hay esperanza, pues son equivalentes:

# Teoría de grafos

En ZFC se puede probar que para todo grafo  $G$  y todo natural  $n$  son equivalentes:

- $G$  es  $n$ -coloreable.
- Todo subgrafo finito de  $G$  es  $n$ -coloreable.

Sin embargo, en ZF se tiene que son equivalentes:

- Si todo subgrafo finito de un grafo  $G$  es 2-coloreable, entonces lo es  $G$ .
- AEN(2).

Podemos salvar el caso para  $n = 2$  en ZF exigiendo además que  $G$  sea conexo, pero para  $n = 3$  no hay esperanza, pues son equivalentes:

- Si todo subgrafo finito de un grafo  $G$  es 3-coloreable, entonces lo es  $G$ .

# Teoría de grafos

En ZFC se puede probar que para todo grafo  $G$  y todo natural  $n$  son equivalentes:

- $G$  es  $n$ -coloreable.
- Todo subgrafo finito de  $G$  es  $n$ -coloreable.

Sin embargo, en ZF se tiene que son equivalentes:

- Si todo subgrafo finito de un grafo  $G$  es 2-coloreable, entonces lo es  $G$ .
- AEN(2).

Podemos salvar el caso para  $n = 2$  en ZF exigiendo además que  $G$  sea conexo, pero para  $n = 3$  no hay esperanza, pues son equivalentes:

- Si todo subgrafo finito de un grafo  $G$  es 3-coloreable, entonces lo es  $G$ .
- El teorema de los ultrafiltros.

- 1 ¿Qué es el axioma de elección?
- 2 Afirmaciones equivalentes al axioma de elección
- 3 Formas débiles del axioma de elección
- 4 Desastres sin elección
- 5 Desastres con elección**
- 6 Desastres por doquier
- 7 Referencias

# Análisis

Decimos que una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisface la ecuación de Cauchy si

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

# Análisis

Decimos que una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisface la ecuación de Cauchy si

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Es fácil ver que si  $f$  satisface la ecuación de Cauchy y es continua, entonces  $f$  es una función lineal.

# Análisis

Decimos que una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisface la ecuación de Cauchy si

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Es fácil ver que si  $f$  satisface la ecuación de Cauchy y es continua, entonces  $f$  es una función lineal.

¿Existen soluciones no continuas?

# Análisis

Decimos que una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisface la ecuación de Cauchy si

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Es fácil ver que si  $f$  satisface la ecuación de Cauchy y es continua, entonces  $f$  es una función lineal.

¿Existen soluciones no continuas?

Una solución no continua de la ecuación de Cauchy se dice que es una solución **fea**.

Usando el **axioma de elección** podemos construirlas, ¿pero es realmente este axioma el culpable?

# Análisis

Decimos que una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisface la ecuación de Cauchy si

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Es fácil ver que si  $f$  satisface la ecuación de Cauchy y es continua, entonces  $f$  es una función lineal.

¿Existen soluciones no continuas?

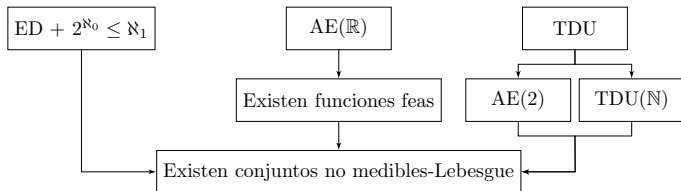
Una solución no continua de la ecuación de Cauchy se dice que es una solución **fea**.

Usando el **axioma de elección** podemos construirlas, ¿pero es realmente este axioma el culpable?

## Teorema

En ZF una función fea es no medible, luego la existencia de funciones feas implica la existencia de conjuntos no medibles-Lebsegue.

# Análisis



# Geometría

Existen algunos resultados geométricos en ZFC que aunque no sean “molestos” para la intuición, resultan muy curiosos:

# Geometría

Existen algunos resultados geométricos en ZFC que aunque no sean “molestos” para la intuición, resultan muy curiosos:

- En ZFC existe un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  que corta cada recta del plano en exactamente dos puntos.

Existen algunos resultados geométricos en ZFC que aunque no sean “molestos” para la intuición, resultan muy curiosos:

- En ZFC existe un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  que corta cada recta del plano en exactamente dos puntos.
- En ZFC existe una partición de  $\mathbb{R}^3$  formada por círculos de radio 1 (en este caso tal vez no sea necesario el axioma de elección [Fat25], [Fat24]).

Existen algunos resultados geométricos en ZFC que aunque no sean “molestos” para la intuición, resultan muy curiosos:

- En ZFC existe un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  que corta cada recta del plano en exactamente dos puntos.
- En ZFC existe una partición de  $\mathbb{R}^3$  formada por círculos de radio 1 (en este caso tal vez no sea necesario el axioma de elección [Fat25], [Fat24]).

Sin embargo, la cumbre del “odio” al axioma de elección se lo lleva el siguiente teorema:

Existen algunos resultados geométricos en ZFC que aunque no sean “molestos” para la intuición, resultan muy curiosos:

- En ZFC existe un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  que corta cada recta del plano en exactamente dos puntos.
- En ZFC existe una partición de  $\mathbb{R}^3$  formada por círculos de radio 1 (en este caso tal vez no sea necesario el axioma de elección [Fat25], [Fat24]).

Sin embargo, la cumbre del “odio” al axioma de elección se lo lleva el siguiente teorema:

## Teorema: Paradoja de Banach-Tarski (ZFC)

Dados  $A, B \subset \mathbb{R}^3$  acotados con interior no vacío, existen particiones finitas  $\{A_1, \dots, A_n\}$  y  $\{B_1, \dots, B_n\}$  de  $A$  y  $B$  respectivamente e isometrías  $f_1, \dots, f_n$  tales que  $f_i(A_i) = B_i$  para cada  $i = 1, \dots, n$ .

- 1 ¿Qué es el axioma de elección?
- 2 Afirmaciones equivalentes al axioma de elección
- 3 Formas débiles del axioma de elección
- 4 Desastres sin elección
- 5 Desastres con elección
- 6 Desastres por doquier**
- 7 Referencias

# Teoría de juegos

Un juego  $G$  es una 4-tupla

$$G = G(n, (X_1, \dots, X_n), (Y_1, \dots, Y_n), A)$$

donde:

- $n \in \mathbb{Z}^+$  es el número de jugadas por jugador.

Un juego  $G$  es una 4-tupla

$$G = G(n, (X_1, \dots, X_n), (Y_1, \dots, Y_n), A)$$

donde:

- $n \in \mathbb{Z}^+$  es el número de jugadas por jugador.
- $(X_1, \dots, X_n) ((Y_1, \dots, Y_n))$  es una  $n$ -tupla de conjuntos no vacíos cuyos elementos son los posibles movimientos del primer (segundo) jugador en cada jugada.

# Teoría de juegos

Un juego  $G$  es una 4-tupla

$$G = G(n, (X_1, \dots, X_n), (Y_1, \dots, Y_n), A)$$

donde:

- $n \in \mathbb{Z}^+$  es el número de jugadas por jugador.
- $(X_1, \dots, X_n) ((Y_1, \dots, Y_n))$  es una  $n$ -tupla de conjuntos no vacíos cuyos elementos son los posibles movimientos del primer (segundo) jugador en cada jugada.
- $A \subset \prod_{i=1}^n X_i \times Y_i$  es el conjunto ganador para el segundo jugador.

# Teoría de juegos

Un juego  $G$  se juega como sigue:

- Los jugadores escogen sucesivamente elementos

$$x_1 \in X_1, y_1 \in Y_1, \dots, x_n \in X_n, y_n \in Y_n$$

conociendo en cada jugada los resultados anteriores.

Un juego  $G$  se juega como sigue:

- Los jugadores escogen sucesivamente elementos

$$x_1 \in X_1, y_1 \in Y_1, \dots, x_n \in X_n, y_n \in Y_n$$

conociendo en cada jugada los resultados anteriores.

- La  $2n$ -tupla  $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$  se llama el **resultado** del juego y el segundo jugador gana si ésta pertenece a  $A$ . En caso contrario gana el primer jugador.

# Teoría de juegos

Una **estrategia** para el primer jugador es una  $n$ -tupla de funciones  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  con

$$\sigma_i : \prod_{j < i} (X_j \times Y_j) \longrightarrow X_i$$

Una estrategia  $\sigma$  para el primer jugador se dice que es **ganadora** si para cualquier  $n$ -tupla  $(y_1, \dots, y_n) \in \prod_{i=1}^n Y_i$  la  $2n$ -tupla  $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$  definida como

$$\begin{aligned}x_1 &= \sigma_1(\emptyset) \\ x_{i+1} &= \sigma_{i+1}((x_1, y_1), \dots, (x_i, y_i))\end{aligned}$$

no pertenece a  $A$ . Es decir, si el primer jugador gana siempre que utilice la estrategia  $\sigma$  sin importar lo que haga el segundo jugador.

# Teoría de juegos

De forma análoga se define una estrategia ganadora para el segundo jugador, y diremos que un juego  $G$  está **determinado** si existe una estrategia ganadora para alguno de los jugadores.

# Teoría de juegos

De forma análoga se define una estrategia ganadora para el segundo jugador, y diremos que un juego  $G$  está **determinado** si existe una estrategia ganadora para alguno de los jugadores.

## Teorema

En ZF, si  $\{X_i\}_{i=1}^n, \{Y_i\}_{i=1}^n$  son familias de conjuntos finitos, entonces el juego

$$G(n, (X_1, \dots, X_n), (Y_1, \dots, Y_n), A)$$

está determinado para cualquier  $A \subset \prod_{i=1}^n X_i \times Y_i$ .

# Teoría de juegos

Es fácil extender la noción de juego a juegos infinitos (con infinitas jugadas), que denotaremos por

$$G(\omega, \{X_i\}_{i \in \omega}, \{Y_i\}_{i \in \omega}, A),$$

y es inmediato ver que los juegos dados por la definición anterior se identifican con aquellos donde  $X_i = Y_i = \{0\}$  a partir de cierto natural  $n_0$ . Además, tendrán una estrategia ganadora si, y solo si, la tienen el correspondiente juego finito. Por esta razón, llamaremos a este tipo de juegos **finitos**.

Es claro entonces que el teorema anterior puede reformularse en términos de juegos finitos:

## Teorema

En ZF, si  $\{X_i\}_{i \in \omega}$ ,  $\{Y_i\}_{i \in \omega}$  son familias de conjuntos finitos y el juego

$$G(\omega, \{X_i\}_{i \in \omega}, \{Y_i\}_{i \in \omega}, A)$$

es finito, entonces está determinado para cada  $A \subset \prod_{i \in \omega} X_i \times Y_i$ .

# Teoría de juegos

Los problemas surgen cuando consideramos juegos infinitos o con infinitas posibilidades por jugada:

# Teoría de juegos

Los problemas surgen cuando consideramos juegos infinitos o con infinitas posibilidades por jugada:

## Teorema

Son equivalentes en ZF:

# Teoría de juegos

Los problemas surgen cuando consideramos juegos infinitos o con infinitas posibilidades por jugada:

## Teorema

Son equivalentes en ZF:

- (I) Todo juego finito está determinado.

# Teoría de juegos

Los problemas surgen cuando consideramos juegos infinitos o con infinitas posibilidades por jugada:

## Teorema

Son equivalentes en ZF:

- (I) Todo juego finito está determinado.
- (II) Todo juego de una jugada está determinado.

# Teoría de juegos

Los problemas surgen cuando consideramos juegos infinitos o con infinitas posibilidades por jugada:

## Teorema

Son equivalentes en ZF:

- (I) Todo juego finito está determinado.
- (II) Todo juego de una jugada está determinado.
- (III) El axioma de elección.

# Teoría de juegos

Los problemas surgen cuando consideramos juegos infinitos o con infinitas posibilidades por jugada:

## Teorema

Son equivalentes en ZF:

- (I) Todo juego finito está determinado.
- (II) Todo juego de una jugada está determinado.
- (III) El axioma de elección.

## Teorema

En ZFC existe un subconjunto  $A$  de  $(\{0, 1\} \times \{0, 1\})^{\mathbb{N}}$  tal que el juego

$$G(\omega, \{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \{0, 1\}^{\mathbb{N}}, A)$$

no está determinado

# Teoría de juegos

¿Cómo solventamos estos problemas sobre la determinación de juegos?

¿Cómo solventamos estos problemas sobre la determinación de juegos?

## Definición: Axioma de determinación (AD)

Todo juego de la forma

$$G(\omega, \{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \{0, 1\}^{\mathbb{N}}, A),$$

o equivalentemente de la forma

$$G(\omega, \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, A),$$

está determinado.

# Teoría de juegos

No se sabe si  $ZF + AD$  es equiconsistente con  $ZF$ , pero si se sabe que:

# Teoría de juegos

No se sabe si  $ZF + AD$  es equiconsistente con  $ZF$ , pero si se sabe que:

- $ZF + AD$  es equiconsistente con  $ZFC$  junto a la existencia de infinitos cardinales de Woodin.

# Teoría de juegos

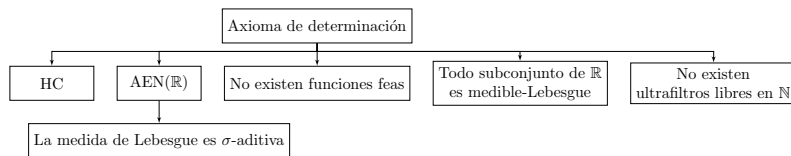
No se sabe si  $ZF + AD$  es equiconsistente con  $ZF$ , pero si se sabe que:

- $ZF + AD$  es equiconsistente con  $ZFC$  junto a la existencia de infinitos cardinales de Woodin.
- Si  $ZF + AD$  es consistente, entonces lo es  $ZF + AD + ED$ .

# Teoría de juegos






No se sabe si  $ZF + AD$  es equiconsistente con  $ZF$ , pero si se sabe que:

- $ZF + AD$  es equiconsistente con  $ZFC$  junto a la existencia de infinitos cardinales de Woodin.
- Si  $ZF + AD$  es consistente, entonces lo es  $ZF + AD + ED$ .







- 1 ¿Qué es el axioma de elección?
- 2 Afirmaciones equivalentes al axioma de elección
- 3 Formas débiles del axioma de elección
- 4 Desastres sin elección
- 5 Desastres con elección
- 6 Desastres por doquier
- 7 Referencias**






# Referencias I

-  Bell, John L.: *The axiom of choice*.  
College Publications, 2009.
-  Bell, John L.: *The Axiom of Choice*.  
En *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. 2021.  
<https://plato.stanford.edu/entries/axiom-choice/>.
-  Bell, J. L. y Fremlin, D. H.: *A geometric form of the axiom of choice*.  
Fundamenta Mathematicae, 77(2):167–170, 1972.
-  Diener, Karl Heinz: *Two new algebraic equivalents to the axiom of choice*.  
Algebra Universalis, 26:189–195, 1989.
-  Fatalini, Azul: *Paradoxical sets and the Axiom of Choice*.  
Tesis de Doctorado, Universität Münster, 2024.






## Referencias II

-  Fatalini, Azul: *Partitions of  $\mathbb{R}^3$  into unit circles with no well-ordering of the reals.*  
arXiv preprint arXiv:2501.03131, 2025.  
<https://arxiv.org/pdf/2501.03131>.
-  Fellhauer, Adrian F. D.: *On the relation of three theorems of analysis to the axiom of choice.*  
Journal of Logic and Analysis, 9(1):1–23, 2017.
-  Gillman, Leonard: *Two classical surprises concerning the axiom of choice and the continuum hypothesis.*  
The American mathematical monthly, 109(6):544–553, 2002.
-  Herrlich, Horst: *Axiom of choice.*  
Springer, 2006.






## Referencias III

-  Hilbert, David: *Mathematical Problems*.  
Bulletin of the American Mathematical Society,  
8(10):437–479, 1902.
-  Hajnal, András y Kertész, Andor: *Some new algebraic equivalents of the axiom of choice*.  
Publicationes Mathematicae Debrecen, 19:339–340, 1972.
-  Howard, Paul y Rubin, Jean E.: *Consequences of the Axiom of Choice*.  
American Mathematical Society, 1998.
-  Ivorra, Carlos: *Cardinales grandes*.  
Universidad de Valencia.
-  Ivorra, Carlos: *Lógica matemática*.  
Universidad de Valencia.




## Referencias IV

-  Ivorra, Carlos: *Pruebas de consistencia*.  
Universidad de Valencia.
-  Ivorra, Carlos: *Teoría de conjuntos*.  
Universidad de Valencia.
-  Ivorra, Carlos: *Teoría descriptiva de conjuntos*.  
Universidad de Valencia.
-  Jech, Thomas J.: *The axiom of choice*.  
Elsevier, 1973.
-  Moore, Gregory H.: *Zermelo's axiom of choice: Its origins, development, and influence*.  
Springer, 1982.

## Referencias V

-  Mycielski, Jan y Świerczkowski, S.: *On the Lebesgue measurability and the axiom of determinateness*. Fundamenta mathematicae, 65:67–71, 1964.
-  Mycielski, Jan: *On the axiom of determinateness*. Fundamenta mathematicae, 53:205–224, 1964.
-  Mycielski, Jan: *On the axiom of determinateness II*. Fundamenta mathematicae, 59(2):203–212, 1966.
-  Rubin, Herman y Rubin, Jean E.: *Equivalents of the Axiom of Choice, II*. Elsevier, 1985.
-  Schechter, Eric: *Handbook of Analysis and its Foundations*. Academic Press, 1997.

# Referencias VI

-  Tomkowicz, Grzegorz y Wagon, Stan: *The Banach–Tarski Paradox*.  
Cambridge University Press, second edición, 2016.
-  Wikipedia: *Axiom of Choice*.  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Axiom\\_of\\_choice](https://en.wikipedia.org/wiki/Axiom_of_choice).
-  Zermelo, Ernst: *Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann*. Reprinted as “Proof that every set can be well-ordered” in: J. Van Heijenoort (ed.) *From Frege to Gödel*.  
Mathematische Annalen, 59:514–516, 1904.

## Referencias VII



Zermelo, Ernst: *Neuer Beweis der Möglichkeit einer Wohlordnung*. Reprinted as “A new proof of the possibility of a well-ordering” in: J. Van Heijenoort (ed.) *From Frege to Gödel*.

Mathematische Annalen, 65:107–128, 1908.



Zermelo, Ernst: *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre: I*. Reprinted as “Investigations in the foundations of set theory I” in: J. Van Heijenoort (ed.) *From Frege to Gödel*.

Mathematische Annalen, 65:261–281, 1908.