• Hallar todas las funciones continuas $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ tales que $\int_0^1 g(x) - xg(x)\,dx = \frac{1}{12}$.

Como g es continua tiene primitiva, luego existe $G:[0,1]\to\mathbb{R}$ tal que $G'=g$ y $G(0)=0$. Entonces

$$\int_0^1 g(x) - xg(x)\,dx = \int_0^1 (1-x)g(x)\,dx = (1-x)\,G(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 G(x)\,dx = \int_0^1 G(x)\,dx$$

Luego debe ser

$$\int_0^1 g(x) - xg(x)\,dx = \int_0^1 G(x)\,dx \quad (1)$$

Si es pues $h\in C^1([0,1])$ tal que $\int_0^1 h(x)\,dx \neq h(0)$ tenemos entonces que $\bar{h}(x) = h(x) - h(0)$ es derivable, $\bar{h}(0)=0$ y

$$I_h = \int_0^1 \bar{h}(x)\,dx = \int_0^1 h(x)\,dx - h(0) \neq 0$$

Definiendo entonces

$$G(x) = \frac{1}{12\, I_h}\,\bar{h}(x)$$

se tiene que

$$\int_0^1 G(x)\,dx = \frac{1}{12}$$

Luego, si es

$$g(x) = G'(x) = \frac{1}{12\, I_h}\,h'(x)$$

se tiene que g es continua y cumple, por (1), lo deseado.

Es decir, si

$$g(x) = \frac{1}{12 I_h} h'(x) \quad (2)$$

con $h \in C^1([0,1])$ e $I_h = \int_0^1 h(x)\,dx - h(0) \neq 0$, entonces satisface lo deseado.

Por otra parte, si g satisface lo deseado, por el TFC,

$$G(x) = \int_0^x g(x)\,dx \in C^1([0,1])$$

Además, $G(0) = 0$,

$$I_G = \int_0^1 G(x)\,dx \underset{(1)}{=} \int_0^1 g(x) - xg(x)\,dx = \frac{1}{12} \neq 0$$

y

$$g(x) = \frac{1}{12 I_G} \cdot G'(x)$$

Por tanto, todas las funciones continuas que satisfacen lo deseado son aquellas de la forma dada por (2).