Teorema (Caracterización de la integrabilidad): Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. Son equivalentes:

i) f es integrable en $[a,b]$

ii) Para cada $\varepsilon > 0$, existe una partición P_ε de $[a,b]$ tal que

$$S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) < \varepsilon$$

iii) Para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para toda partición P de $[a,b]$ que cumpla que $|P| < \delta$, se cumple que

$$S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$$

iv) Para cualquier sucesión de particiones $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $[a,b]$ que cumpla que $|P_n| \to 0$, se cumple que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(S(f, P_n) - s(f, P_n) \right) = 0$$

v) Existe una sucesión de particiones $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $[a,b]$ que cumple que $|P_n| \to 0$ y que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(S(f, P_n) - s(f, P_n) \right) = 0$$

Además, si $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de particiones de $[a,b]$ cumpliendo $|P_n| \to 0$, y se cumple alguna de las condiciones anteriores, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} S(f, P_n) = \lim_{n \to +\infty} s(f, P_n)$$

Demostración:

i) $\Rightarrow$ ii)

Supongamos que f es integrable y sea $\varepsilon > 0$.

Entonces, por definición, sabemos que existen particiones P_1, P_2 de $[a,b]$ tales que

$$\left.\begin{aligned} \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2} &> S(f, P_1) \\ \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2} &< s(f, P_2) \end{aligned}\right\} (1)$$

Ahora, si consideramos $P_\varepsilon = P_1 \cup P_2$, tenemos que es un refinamiento de P_1 y P_2, luego

$$\left.\begin{aligned} s(f, P_2) &\leq s(f, P_\varepsilon) \\ S(f, P_1) &\geq S(f, P_\varepsilon) \end{aligned}\right\} (2)$$

Con esto,

$$S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) \underset{(2)}{\leq} S(f, P_1) - s(f, P_2) \underset{(1)}{<} \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2} - \left(\underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2} \right) \underset{f \text{ integrable}}{=} \varepsilon$$

ii) $\Rightarrow$ iii)

Lema: Sea K una cota de $|f|$ y P una partición de $[a,b]$.

Si P' es un refinamiento de P obtenido al añadir n puntos, entonces se cumplen:

$$\left.\begin{aligned} S(f,P) - S(f,P') &\leq 2nK|P'| \\ s(f,P') - s(f,P) &\leq 2nK|P'| \end{aligned}\right\}$$

<u>Demostración del lema</u>:

Sea $P = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_m = b\}$ y denotemos por $y_0^i < \dots < y_{n_i}^i$ los puntos de $P' \cap [x_i, x_{i+1}]$ para cada $i = 0, \dots, m-1$.

Para cada $i = 0, \dots, m-1$ denotemos

$$M_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) \quad y \quad m_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$$

$$M_j^i = \sup_{x \in [y_j^i, y_{j+1}^i]} f(x) \quad y \quad m_j^i = \inf_{x \in [y_j^i, y_{j+1}^i]} f(x), \quad j = 0, \dots, n_i - 1$$

Además, observemos que $y_0^i = x_i$ e $y_{n_i}^i = x_{i+1}$ para cada $i = 0, \dots, m-1$, (luego $n = \sum_{i=0}^{m-1} (n_i - 1)$) y con todo

$$S(f,P)-S(f,P') = \sum_{i=0}^{m-1} M_i (x_{i+1}-x_i) - \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n_i-1} M_j^i (y_{j+1}^i - y_j^i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n_i-1} M_i (y_{j+1}^i - y_j^i) - \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n_i-1} M_j^i (y_{j+1}^i - y_j^i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n_i-1} (M_i - M_j^i)(y_{j+1}^i - y_j^i) \leq |P'| \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n_i-1} (M_i - M_j^i) \quad (3)$$

Análogamente se obtiene que

$$s(f,P')-s(f,P) = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n_i-1} (m_j^i - m_i)(y_{j+1}^i - y_j^i) \leq |P'| \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n_i-1} (m_j^i - m_i) \quad (4)$$

Observemos ahora que ⊛

$$M_i = \max\{M_0^i, \dots, M_{n_i-1}^i\}, \quad \forall i=0,\dots,m-1$$

$$m_i = \min\{m_0^i, \dots, m_{n_i-1}^i\}, \quad \forall i=0,\dots,m-1$$

Con lo cual, para algún $j \in \{0,\dots,n_i-1\}$ será $M_i - M_j^i = 0$ $(m_j^i - m_i = 0)$, y para el resto

⊛ Denotando por $L_i = \max\{M_0^i,\dots,M_{n_i-1}^i\}$, observemos que $M_j^i = \sup_{x\in[y_j^i, y_{j+1}^i]} f(x) \leq \sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x) = M_i$, $\forall j=0,\dots,n_i-1$, luego $L_i \leq M_i$.

Por otro lado, dado $x \in [x_i, x_{i+1}]$, tenemos que existe un $j \in \{0,\dots,n_i-1\}$ tal que $x \in [y_j^i, y_{j+1}^i]$, y así

$$f(x) \leq M_j^i \leq L_i$$

con lo que L_i es cota superior de $\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\}$, y así $M_i \leq L_i$.

Para m_i es análogo.

$$\left.\begin{aligned} M_i - M_j^i &\leq |M_i - M_j^i| \leq |M_i| + |M_j^i| \leq 2K \\ & \qquad \circledast \\ m_j^i - m_i &\leq |m_j^i - m_i| \leq |m_j^i| + |m_i| \leq 2K \end{aligned}\right\}$$

Juntando estas dos observaciones tenemos

$$S(f,P) - S(f,P') \underset{(3)}{\leq} |P'| \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n_i-1} (M_i - M_j^i) \leq |P'| \sum_{i=0}^{m-1} 2K(n_i - 1) \underset{\sum_{i=0}^{m-1}(n_i-1)=n}{=} 2nK|P'|$$

y, análogamente usando (4),

$$s(f,P') - s(f,P) \leq 2nK|P'|$$

lo que concluye la prueba del lema. ■

Dado $\varepsilon > 0$, por ii), sabemos que existe cierta partición P_ε tal que

$$S(f,P_\varepsilon) - s(f,P_\varepsilon) < \varepsilon/2 \quad (5)$$

Sea pues n_ε el número de puntos de P_ε y definamos

$$\delta = \frac{\varepsilon}{8 n_\varepsilon K} \quad (6)$$

$\circledast$ Como $f(x) \leq K$, $\forall x \in [a,b]$, en particular, $M_i, M_j^i \leq K$; y como para cualquier $x \in [y_j^i, y_{j+1}^i]$ es $M_i, M_j^i \geq f(x) \geq -K$, obtenemos que $|M_i|, |M_j^i| \leq K$

Como $f(x) \geq -K$, $\forall x \in [a,b]$, en particular, $m_i, m_j^i \geq -K$; y como para cualquier $x \in [y_j^i, y_{j+1}^i]$ es $m_i, m_j^i \leq f(x) \leq K$, obtenemos que $|m_i|, |m_j^i| \leq K$

donde K es cualquier cota de $|f|$.

Sea ahora P una partición cualquiera de $[a,b]$ que cumpla que $|P| < \delta$.

Entonces, en primer lugar tenemos que

$$S(f, P \cup P_\varepsilon) - s(f, P \cup P_\varepsilon) \leq S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) \underset{(5)}{<} \varepsilon/2 \quad (7)$$

Además, como $P \cup P_\varepsilon$ es un refinamiento de P que se obtiene añadiendo a P n puntos, con $n \leq n_\varepsilon$, por el Lema tenemos que

$$\left.\begin{array}{l} S(f,P) - S(f, P \cup P_\varepsilon) \leq 2nK|P \cup P_\varepsilon| \leq 2n_\varepsilon K|P| < 2n_\varepsilon K \delta \\ s(f, P \cup P_\varepsilon) - s(f,P) \leq 2nK|P \cup P_\varepsilon| \leq 2n_\varepsilon K|P| < 2n_\varepsilon K \delta \end{array}\right\} (8)$$

Por (7) y (8) obtenemos entonces que

$$S(f,P) - s(f,P) = \left[S(f,P) - S(f, P \cup P_\varepsilon)\right] + \left[S(f, P \cup P_\varepsilon) - s(f, P \cup P_\varepsilon)\right] + \left[s(f, P \cup P_\varepsilon) - s(f,P)\right] <$$

$$\underset{(7),(8)}{<} 4n_\varepsilon K \delta + \varepsilon/2 \underset{(6)}{=} 4n_\varepsilon K \frac{\varepsilon}{8n_\varepsilon K} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

iii) $\Rightarrow$ iv)

Sea $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de particiones cumpliendo que $|P_n| \to 0$.

Dado $\varepsilon > 0$, por iii) tenemos que existe un $\delta > 0$ tal que si $|P| < \delta$, entonces

$$S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon \quad (9)$$

Como $|P_n| \to 0$, existe cierto $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|P_n| < \delta, \ \forall n \geq n_0 \quad (10)$$

Así pues, tenemos que si $n \geq n_0$, por (10) es $|P_n| < \delta$, y por (9) es entonces

$$|S(f, P_n) - s(f, P_n)| < \varepsilon$$

Como el $\varepsilon > 0$ era arbitrario, esto prueba que

$$\lim_{n \to +\infty} S(f, P_n) - s(f, P_n) = 0$$

iv) $\Rightarrow$ v)

Tomando la sucesión $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ dada por

$$P_n = \{x_0 = a, \ x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \ x_2 = a + 2\frac{b-a}{n}, \ldots, \ x_n = b\}$$

se tiene que

$$|P_n| = \frac{b-a}{n} \to 0$$

Entonces, por iv) se cumple que

$$\lim_{n \to +\infty} S(f,P_n) - s(f,P_n) = 0$$

y tenemos pues que $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisface lo dicho en v).

v) $\Rightarrow$ ii)

Sea $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de particiones cuya existencia garantiza v).

Entonces, dado $\varepsilon > 0$ sabemos que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$S(f,P_n) - s(f,P_n) < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0$$

Por tanto, basta tomar $P_\varepsilon = P_{n_0}$

ii) $\Rightarrow$ i)

Debemos ver que $\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$.

Es claro que $\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ en general, luego basta ver que la desigualdad no puede ser estricta.

Si lo fuera, entonces tomando $\varepsilon = \frac{1}{2}\left[\overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx\right] > 0$ tenemos que para cualquier partición P es

$$S(f,P) - s(f,P) \geq \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx > \varepsilon$$

lo que contradice ii).

Esto concluye la demostración de las equivalencias y solo resta ver la última parte del teorema.

Sea pues $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de particiones tal que $\|P_n\| \to 0$ y sea f integrable.

Entonces, por iv) sabemos que

$$\lim_{n\to+\infty} S(f,P_n) - s(f,P_n) = 0 \quad (11)$$

Ahora bien, tenemos que al ser f integrable,

$$0 \leq S(f,P_n) - \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = S(f,P_n) - \int_a^b f(x)\,dx = S(f,P_n) - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq S(f,P_n) - s(f,P_n)$$

Luego, por la regla del sandwich obtenemos que

$$\lim_{n\to+\infty} S(f,P_n) - \int_a^b f(x)\,dx = 0$$

o, equivalentemente,

$$\lim_{n\to+\infty} S(f,P_n) = \int_a^b f(x)\,dx \quad (12)$$

Por (11) y (12), concluimos también que

$$\lim_{n\to+\infty} s(f,P_n) = \int_a^b f(x)\,dx.$$