- Un espacio métrico (X,d) es totalmente acotado si, y solo si, toda sucesión admite una subsucesión de Cauchy.

($\Rightarrow$)

Puesto que (X,d) es totalmente acotado sabemos que para cada $\varepsilon>0$ existen $y_1^{\varepsilon},\dots,y_{m_\varepsilon}^{\varepsilon}\in X$ tales que

$$X=\bigcup_{i=1}^{m_\varepsilon} B(y_i^{\varepsilon},\varepsilon)$$

Dada pues $\{x_n\}_{n\geq 1}^{\infty}\subset X$ definimos

$$A_1^i=\{n\in\mathbb{N}: x_n\in B(y_i^1,1)\}\quad i=1,\dots,m_1$$

Entonces, $\bigcup_{i=1}^{m_1} A_1^i=\mathbb{N}$, con lo que algún A_1^i es infinito y podemos definir

$$\begin{cases} t_1=\min\{i\in\{1,\dots,m_1\}: A_1^i \text{ es infinito}\}\\ A_1=A_1^{t_1}\\ n_1=\min A_1\end{cases}$$

Definimos entonces de forma recursiva:

$$\begin{cases} A_{k+1}^i=\{n\in A_k : x_n\in B(y_i^{2^{-k}},2^{-k})\},\ i=1,\dots,m_{2^{-k}}\\ t_{k+1}=\min\{i\in\{1,\dots,m_{2^{-k}}\}: A_{k+1}^i \text{ es infinito}\}\\ A_{k+1}=A_{k+1}^{t_{k+1}}\\ n_{k+1}=\min\{n\in A_{k+1}: n>n_k\}\end{cases}$$

Por el teorema de recursión obtenemos entonces una sucesión $\{n_k\}_{k\geq 1}^{\infty}$ que cumple:

$$\left.\begin{array}{l} \text{i) } n_{k+1}>n_k,\ \forall k\geq 1\\ \text{ii) } n_k\in A_k,\ \forall k\geq 1\end{array}\right\}$$

Veamos que $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es de Cauchy.

Dado $\varepsilon>0$, tomemos $K_0 > \frac{\ln(4/\varepsilon)}{\ln(2)}$ (si $\varepsilon \geq 4$ tomamos $\varepsilon'<2$ y cambiamos ε por ε'),

luego

$$\ln(4/\varepsilon) < \ln(2^{k_0}) \to 4/\varepsilon < 2^{k_0} \to \frac{1}{2^{k_0-2}} < \varepsilon \quad (1)$$

Así, si es $l > k \geq k_0$, tenemos que $A_l \subset A_k \subset A_{k_0}$, luego $n_l, n_k \in A_{k_0} = A_{k_0}^{t_{k_0}}$

y llamando $y = y_{t_{k_0}}^{2^{-(k_0-1)}}$ es

$$d(x_{n_l}, x_{n_k}) \leq d(x_{n_l}, y) + d(y, x_{n_k}) \leq 2^{-(k_0-1)} + 2^{-(k_0-1)} = 2^{-k_0+2} \underset{(1)}{<} \varepsilon$$

$(\Leftarrow)$

Por contrarrecíproco, supongamos que (X,d) no es totalmente acotado.

Entonces, existe un $\varepsilon_0>0$ tal que para cualquier $n\in\mathbb{N}$ y $x_1,\dots,x_n\in X$ se cumple que

$$X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon_0) \neq \emptyset$$

Dado pues $x_1 \in X$ tomamos

$$x_2 \in X \setminus B(x_1, \varepsilon_0)$$

y

$$x_3 \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{2} B(x_i, \varepsilon_0)$$

En definitiva (utilizando el axioma de elecciones dependientes) construimos una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$x_{n+1} \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon_0), \ \forall n \geq 1$$

Así pues, dados n, m distintos (sup. $m>n$), se tiene que $x_m \notin B(x_n, \varepsilon_0)$, con lo que

$$d(x_m, x_n) \geq \varepsilon_0$$

y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no puede tener ninguna subsucesión de Cauchy.

- En un espacio métrico completo (X, d), un subconjunto $K \subset X$ es compacto si, y sólo si, es cerrado y totalmente acotado.⊛

$(\Rightarrow)$

Si K es compacto es cerrado, luego falta ver que es totalmente acotado.

Para ello observemos que dado $\varepsilon > 0$, se tiene que $\{B(x, \varepsilon)\}_{x \in K}$ es un cubrimiento abierto de K, luego existen $x_1, \dots, x_n \in K$ tales que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$$

La arbitrariedad de ε prueba que K es totalmente acotado.

$(\Leftarrow)$

Recíprocamente, sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$. Como K es totalmente acotado, tenemos que existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ que es de Cauchy en (K, d_K). Como K es cerrado se tiene que es completo, con lo que $\{x_{n_k}\}$ es convergente en K.

Luego toda sucesión en K tiene una subsucesión convergente y esto prueba la compacidad.

⊛ $K \subset X$ es totalmente acotado si para cada $\varepsilon > 0$ existen $x_1, \dots, x_{n_\varepsilon} \in K$ tales que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n_\varepsilon} B(x_i, \varepsilon)$.

Es fácil probar que K es totalmente acotado si, y sólo si, (K, d_K) lo es.