

# Anotaciones ilógicas

---

Esteban Martínez Vañó



# Introducción

Este texto surge en gran medida de una casi obsesiva necesidad de entender cada mínimo detalle sobre aquello que estudio y aprendo. Consiste por tanto en una serie de anotaciones sobre el libro *Lógica matemática* de Carlos Ivorra que para mucha gente podrían parecer “ilógicas” (aunque se trate de un libro sobre lógica) debido a su nivel de detalle o especificación de lo evidente. Sin embargo, espero que pueda ser de utilidad como herramienta de consulta para aquella gente que utilice el libro de Carlos. Cabe destacar que cualquier errata, imprecisión o error (garrafal) es únicamente responsabilidad mía (siéntase el lector libre de contactar conmigo para discutir las o corregirlas), mientras que cualquier “genialidad” (si la hay) sea probablemente fruto de conversaciones y/o explicaciones de Carlos.

Respecto a la estructura del texto, se divide en los mismos capítulos que el libro original y cada página del mismo que contiene anotaciones aparece como una sección en este texto. Para facilitar la consulta de estas notas se puede seguir [esta](#) versión subrayada del libro de Carlos, donde el código de colores es el siguiente:

- Lo subrayado en verde significa que en estas notas se hacen aclaraciones, precisiones o un tratamiento más detallado sobre ese punto del libro. Si la palabra “DEMOSTRACIÓN” aparece subrayada significa que en este texto aparecerá la demostración completa con un mayor nivel de detalle.
- Lo subrayado en naranja significa que en estas notas se complementa, profundiza o se hacen anotaciones extra sobre ese punto del libro.
- Lo subrayado en verde-naranja significa que dicha anotación incluirá una mezcla entre aclaraciones y contenido “extra”.

Finalmente, para facilitar el uso del texto, las anotaciones referentes a cada página aparecen numeradas (en el orden de aparición en dicha página) y seguidas, en color negro, del texto subrayado. Además, todo lo referente a anotaciones o complementos tienen un tono gris, mientras que las demostraciones tienen un tono azul, lo que permite omitirlas rápidamente si se desea.



# Índice

|                                                                                                               |          |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>Introducción</b>                                                                                           | <b>1</b> |
| Página xi . . . . .                                                                                           | 1        |
| $x \in C$ si y solo si $x \subset V$ y $x \notin x$ . . . . .                                                 | 1        |
| Página xxiv . . . . .                                                                                         | 1        |
| ... razonar por inducción ... . . . .                                                                         | 1        |
| Página xxxvii . . . . .                                                                                       | 2        |
| ... usando estos argumentos con objetos ficticios ... . . . .                                                 | 2        |
| Página xxxviii . . . . .                                                                                      | 3        |
| ... son los números naturales ... . . . .                                                                     | 3        |
| <b>1. Lenguajes y modelos</b>                                                                                 | <b>5</b> |
| Página 4 . . . . .                                                                                            | 5        |
| <b>Conjuntos</b> ... . . . .                                                                                  | 5        |
| ... conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales ... . . . .                                                | 6        |
| Página 5 . . . . .                                                                                            | 7        |
| ... conjunto arbitrario ... . . . .                                                                           | 7        |
| Página 15 . . . . .                                                                                           | 7        |
| ... <i>modelo natural de la aritmética</i> ... . . . .                                                        | 7        |
| Página 16 . . . . .                                                                                           | 7        |
| ... cadenas anteriores de la sucesión ... . . . .                                                             | 7        |
| Página 17 . . . . .                                                                                           | 8        |
| ... reglas muy concretas. . . . .                                                                             | 8        |
| Página 19 . . . . .                                                                                           | 8        |
| ... justificarlo ... . . . .                                                                                  | 8        |
| Página 20 . . . . .                                                                                           | 8        |
| Es claro que ... . . . .                                                                                      | 8        |
| <b>Definición 1.7</b> ... . . . .                                                                             | 9        |
| 6. $M \models (\alpha \rightarrow \beta)[v]$ syss no $M \models \alpha[v]$ o $M \models \beta[v]$ ... . . . . | 9        |
| Página 22 . . . . .                                                                                           | 9        |

|                                                                         |    |
|-------------------------------------------------------------------------|----|
| ... 3) y 5)...                                                          | 9  |
| Aplicando dos veces 7) ...                                              | 10 |
| <b>Más convenios de notación ...</b>                                    | 10 |
| Página 23                                                               | 10 |
| ... $M \models (\alpha \leftrightarrow \beta)[v]$ ...                   | 10 |
| ... Similarmente se demuestra ...                                       | 11 |
| ... $la$ ...                                                            | 11 |
| Página 24                                                               | 12 |
| ... siempre decide en un número finito de pasos cuál es el caso.        | 12 |
| Página 25                                                               | 12 |
| ... deducen inmediatamente de las definiciones ...                      | 12 |
| ... si y solo si ...                                                    | 12 |
| ... si y solo si ...                                                    | 13 |
| ... Observemos que una variable puede estar a la vez libre y ligada ... | 14 |
| ... si y solo si ...                                                    | 15 |
| Página 26                                                               | 15 |
| ... inducción sobre la longitud de $\theta$ .                           | 15 |
| ... hipótesis de inducción ...                                          | 18 |
| ... hipótesis de inducción...                                           | 18 |
| ... hipótesis de inducción...                                           | 18 |
| ... hipótesis de inducción...                                           | 18 |
| ... En cualquier caso...                                                | 18 |
| ... syss ... además en tal caso son el mismo objeto $a$ .               | 18 |
| ... razonable ...                                                       | 18 |
| ... $\bigvee_{x_1 \dots x_n}^1 \alpha$ ...                              | 20 |
| ... variables de menor índice ...                                       | 21 |
| Página 27                                                               | 21 |
| ... que equivale a ...                                                  | 21 |
| ... irrelevante. En total tenemos ...                                   | 21 |
| Página 29                                                               | 22 |
| ... lógicamente equivalente ...                                         | 22 |
| Página 31                                                               | 23 |
| ... reglas siguientes ...                                               | 23 |
| Página 32                                                               | 23 |
| ... obtiene fácilmente ...                                              | 23 |
| Página 33                                                               | 24 |
| ... syss ...                                                            | 24 |

|                                                                          |           |
|--------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Página 34                                                                | 24        |
| ... hip. de ind. ...                                                     | 24        |
| ... syss ...                                                             | 25        |
| ... syss (hip. de ind.) ...                                              | 26        |
| ... syss (1.9) ...                                                       | 26        |
| ... Esto no es casual ...                                                | 26        |
| Página 35                                                                | 31        |
| <b>Teorema 1.13</b> ... DEMOSTRACIÓN ...                                 | 31        |
| ... $\theta(y_1, \dots, y_n)$ ...                                        | 39        |
| ... $\theta(t_1, \dots, t_n)$ ...                                        | 40        |
| ... o más en general, variables cualesquiera ...                         | 40        |
| Página 36                                                                | 56        |
| <b>Definición 1.14</b> ...                                               | 56        |
| ... enumerarlas explícitamente ...                                       | 57        |
| Página 37                                                                | 58        |
| ... todas las formadas por números que sumen 1 ...                       | 58        |
| ... para todas las interpretaciones posibles de sus variables libres ... | 58        |
| ... cumplen los hechos siguientes ...                                    | 59        |
| <b>2. El cálculo deductivo</b>                                           | <b>65</b> |
| Página 42                                                                | 65        |
| ... En este caso tenemos ...                                             | 65        |
| ... ejercicio al lector ...                                              | 66        |
| ... como se prueba trivialmente ...                                      | 66        |
| Página 43                                                                | 66        |
| ... equivale a ...                                                       | 66        |
| ... entonces ...                                                         | 66        |
| ... Como $x$ no está libre en $t$ ...                                    | 67        |
| Página 44                                                                | 67        |
| ... también que ...                                                      | 67        |
| Página 46                                                                | 67        |
| ... no será lógicamente válida o si lo será ...                          | 67        |
| ... razonamientos sobre modelos son esquemáticos ...                     | 67        |
| Claramente se cumple ...                                                 | 67        |
| ... interpretan de forma obvia.                                          | 68        |
| Página 47                                                                | 68        |
| ... tales que cada ... es una <i>consecuencia</i> ...                    | 68        |
| Página 48                                                                | 70        |

|                                                      |    |
|------------------------------------------------------|----|
| ... fórmulas precedentes lo son ...                  | 70 |
| ... es verdadera en $M$ .                            | 70 |
| Página 49                                            | 70 |
| ... sino infinitos ...                               | 70 |
| ... en la sección precedente ...                     | 70 |
| ... basta calcular sus tablas de verdad ...          | 70 |
| Página 50                                            | 71 |
| ... comprobamos para justificar ...                  | 71 |
| ... Tenemos que ...                                  | 71 |
| ... también ...                                      | 71 |
| ... en la sección anterior.                          | 71 |
| ... Por lo tanto ...                                 | 72 |
| Página 56                                            | 72 |
| ... Si $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ ...             | 72 |
| Página 57                                            | 72 |
| ... es consecuencia de $\Gamma$ .                    | 72 |
| ... es la siguiente ...                              | 72 |
| ... debemos incorporar a la deducción ...            | 72 |
| ... $\delta_j$ y $\delta_j \rightarrow \delta_i$ ... | 72 |
| ... ya habremos incorporado las fórmulas ...         | 72 |
| ... de este modo ...                                 | 73 |
| ... de este modo ...                                 | 73 |
| Esto completa la prueba.                             | 73 |
| ... exactamente respecto de ...                      | 73 |
| Página 58                                            | 73 |
| ... una versión ligeramente más general ...          | 73 |
| ... pero no oculta ningún uso de IG.                 | 74 |
| Página 59                                            | 74 |
| ... más de un objeto ...                             | 74 |
| <b>Ejercicio</b> ...                                 | 75 |
| Página 60                                            | 75 |
| ... teorema de deducción ...                         | 75 |
| Página 61                                            | 76 |
| Teorema lógico                                       | 76 |
| ... teorema de deducción ...                         | 76 |
| <b>Reglas de la negación de la implicación</b>       | 76 |
| Las otras variantes se prueban de forma similar.     | 77 |
| (Por NI y el recíproco del teorema de deducción.)    | 78 |



|                                                                                                             |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Página 62                                                                                                   | 78 |
| La otra es similar.                                                                                         | 78 |
| <b>Regla del tertium non datur</b>                                                                          | 78 |
| <b>Reglas de introducción del disyuntor</b>                                                                 | 78 |
| ... teorema de deducción ...                                                                                | 79 |
| También llamaremos...                                                                                       | 79 |
| Página 63                                                                                                   | 79 |
| ED 8                                                                                                        | 79 |
| Las restantes se siguen fácilmente de estas                                                                 | 79 |
| Página 64                                                                                                   | 80 |
| ... teorema de deducción ...                                                                                | 80 |
| Análogamente se prueba la otra ...                                                                          | 80 |
| IC                                                                                                          | 80 |
| Página 65                                                                                                   | 80 |
| ... Igualmente usando DN ...                                                                                | 80 |
| ... la restricción sobre la generalización ...                                                              | 80 |
| Página 66                                                                                                   | 81 |
| ... <b>Reglas relacionadas con el bicondicionador</b>                                                       | 81 |
| <b>Regla de eliminación del generalizador</b>                                                               | 82 |
| Por el axioma (K4) ...                                                                                      | 82 |
| $\neg \wedge x \alpha \vdash \forall x \neg \alpha \quad \forall x \neg \alpha \vdash \neg \wedge x \alpha$ | 82 |
| IG 6                                                                                                        | 82 |
| IG 4                                                                                                        | 82 |
| Página 67                                                                                                   | 82 |
| $\neg \forall x \neg \alpha \vdash \wedge x \alpha \quad \wedge x \alpha \vdash \neg \forall x \neg \alpha$ | 82 |
| <b>Regla de introducción del particularizador</b>                                                           | 83 |
| ... (IP) ...                                                                                                | 84 |
| <b>Teorema 2.9</b>                                                                                          | 84 |
| ... <i>Se cumplen los siguientes hechos</i> ...                                                             | 84 |
| Página 68                                                                                                   | 87 |
| DEMOSTRACIÓN ...                                                                                            | 87 |
| <b>Regla de eliminación del particularizador</b> ...                                                        | 89 |
| ... (EP) ...                                                                                                | 90 |
| ... variable $y$ no está en $\alpha$ ...                                                                    | 92 |
| ... por el teorema anterior ...                                                                             | 92 |
| IG 4                                                                                                        | 92 |
| Página 70                                                                                                   | 92 |
| ... (K6) y (EB).                                                                                            | 92 |

|                                                           |     |
|-----------------------------------------------------------|-----|
| <b>Regla de la identidad ...</b>                          | 93  |
| Teorema lógico                                            | 93  |
| R 3                                                       | 93  |
| <b>Regla de la simetría de la identidad ...</b>           | 93  |
| R 1                                                       | 93  |
| EG 3                                                      | 93  |
| II 1                                                      | 93  |
| EG 2                                                      | 93  |
| Página 71                                                 | 94  |
| <b>Regla de equivalencia entre términos idénticos ...</b> | 94  |
| ... probamos lo siguiente ...                             | 94  |
| Hipótesis                                                 | 94  |
| II 2                                                      | 94  |
| SI 1                                                      | 94  |
| II 8                                                      | 95  |
| IG 14                                                     | 95  |
| EG 15                                                     | 95  |
| EG 16                                                     | 95  |
| ... cualquier variable ...                                | 95  |
| ... A su vez ...                                          | 95  |
| EG 2                                                      | 96  |
| Con esto ya podemos probar ETI ...                        | 96  |
| Teorema                                                   | 96  |
| EG 4                                                      | 96  |
| Teorema                                                   | 96  |
| Teorema                                                   | 96  |
| R 2 ... EG 4                                              | 96  |
| Teorema                                                   | 97  |
| Página 72                                                 | 97  |
| Se siguen de (K7), (K8) ...                               | 97  |
| ... usadas incluso en contextos ...                       | 97  |
| ... no pongamos paréntesis ...                            | 100 |
| Página 73                                                 | 102 |
| ... como ejercicio al lector ...                          | 102 |
| MTP 3, 4 (omitiendo DN)                                   | 104 |
| Hipótesis                                                 | 104 |
| Página 74                                                 | 105 |
| ... en virtud del teorema siguiente ...                   | 105 |

|                                               |     |
|-----------------------------------------------|-----|
| ... Veamos, por ejemplo, 6) ...               | 105 |
| MP 2, 5 (omitiendo EB)                        | 110 |
| IG 5 (generalización legal)                   | 110 |
| Se prueba análogamente                        | 110 |
| ... Hemos definido ...                        | 110 |
| <b>Teorema 2.12</b> ...                       | 111 |
| Página 75                                     | 112 |
| ... última parte del teorema se escribe ...   | 112 |
| DEMOSTRACIÓN                                  | 114 |
| EP 1                                          | 116 |
| ETI 2, 7                                      | 117 |
| IG 10                                         | 117 |
| IP 11                                         | 117 |
| Teorema 2.9                                   | 117 |
| Teorema 2.9                                   | 117 |
| EP 2                                          | 117 |
| IG 11                                         | 118 |
| <b>Ejercicio</b> ...                          | 118 |
| Página 76                                     | 118 |
| ... dejamos como ejercicio ...                | 118 |
| Página 77                                     | 122 |
| ... teorema 2.11 ...                          | 122 |
| ... podemos “meter” el negador ...            | 122 |
| ... teorema 2.9 ...                           | 124 |
| ... teorema 2.11 ...                          | 127 |
| ... teorema anterior ...                      | 127 |
| Por (IG) y 2.11 ...                           | 129 |
| ... y por 2.11 ...                            | 129 |
| Es fácil comprobar ...                        | 129 |
| ... condiciones siguientes ...                | 130 |
| Página 78                                     | 130 |
| ... sustituir cada variable ligada ...        | 130 |
| ... subexpresiones de una expresión ...       | 140 |
| ... <i>cualquier</i> sustitución ...          | 141 |
| ... razonando por inducción ...               | 141 |
| ... inmediato si ... sigue inmediatamente ... | 141 |
| ... necesariamente $x_{i_r} \neq x_i$ ...     | 142 |
| ... $u_{i_r} \neq u_i$ ...                    | 142 |

|                                                                |            |
|----------------------------------------------------------------|------------|
| ... trivialmente cierto ...                                    | 142        |
| ... Razonando del mismo modo ...                               | 142        |
| ... inducción sobre la longitud de $\theta$ ...                | 143        |
| ... ocurrencia ligada ...                                      | 144        |
| ... fácilmente la equivalencia ...                             | 144        |
| ... similar.                                                   | 145        |
| ... también son sencillos.                                     | 148        |
| ... se sigue ... a su vez ...                                  | 148        |
| ... Si suponemos $\theta$ ... igualmente se prueba la opuesta. | 148        |
| Página 79                                                      | 153        |
| ... luego ...                                                  | 153        |
| En efecto ...                                                  | 153        |
| En total tenemos ...                                           | 154        |
| ... se sigue ...                                               | 154        |
| ... luego tenemos ...                                          | 154        |
| ... Así pues ... luego la unicidad implica ...                 | 158        |
| ... tenemos también ...                                        | 159        |
| ... implica entonces ...                                       | 159        |
| ... en ambos casos ...                                         | 160        |
| ... suprimiéramos algún axioma en $K_{\mathcal{L}}$ ...        | 160        |
| <b>3. Teorías axiomáticas</b>                                  | <b>161</b> |
| Página 81                                                      | 161        |
| En efecto ...                                                  | 161        |
| Página 82                                                      | 162        |
| ... modelo $M$ de sus axiomas ...                              | 162        |
| ... son verdaderos en $M$ ... ninguna fórmula falsa ...        | 162        |
| <b>Ejemplo</b>                                                 | 162        |
| ... <i>axiomas de Peano</i> ...                                | 164        |
| ... cumple $\mathbb{N} \models \text{AP}$ ...                  | 164        |
| Página 83                                                      | 166        |
| ...donde hemos usado de nuevo 1.12 ...                         | 166        |
| ... si y sólo si lo son sus axiomas ...                        | 166        |
| Página 84                                                      | 166        |
| DEMOSTRACIÓN ...                                               | 166        |
| ... son necesariamente fórmulas lógicamente válidas ...        | 166        |
| ... no son lógicamente válidas ...                             | 167        |
| DEMOSTRACIÓN ...                                               | 167        |

|                                                        |     |
|--------------------------------------------------------|-----|
| Página 85                                              | 167 |
| DEMOSTRACIÓN ...                                       | 167 |
| <b>Teorema 3.6...</b>                                  | 167 |
| ... basta probar que no ...                            | 167 |
| ... en caso contrario, por el teorema de deducción ... | 167 |
| ... es decir ... Por consiguiente ...                  | 168 |
| ... es equivalente ...                                 | 168 |
| <b>Ejercicio</b> ...                                   | 168 |
| ... cuantificadores universales ...                    | 169 |
| ... repetidamente IG y EG ...                          | 171 |
| Página 86                                              | 171 |
| ... conjunto de las clausuras universales ...          | 171 |
| ... ambas tienen las mismas consecuencias lógicas ...  | 171 |
| ... Más aún ...                                        | 172 |
| <b>Ejercicio</b> ...                                   | 172 |
| ... abreviar ...                                       | 173 |
| ... <i>teoría básica de conjuntos</i> ...              | 179 |
| <b>Extensionalidad</b> ...                             | 179 |
| ... es contradictoria ...                              | 180 |
| Página 88                                              | 180 |
| ... <i>extensión</i> de $x$ ...                        | 180 |
| <b>Definición</b> ...                                  | 180 |
| Página 89                                              | 182 |
| Veamos, por ejemplo, el segundo                        | 182 |
| R 2 ... R 3 ... IG 8                                   | 183 |
| Extensionalidad                                        | 183 |
| Página 90                                              | 184 |
| ... razonando en B ...                                 | 184 |
| Página 91                                              | 184 |
| ... para definir ...                                   | 184 |
| ... nos permite probar ...                             | 190 |
| Página 92                                              | 191 |
| ... del axioma de diferencia ...                       | 191 |
| En particular ... luego ...                            | 192 |
| ... por el axioma de extensionalidad ...               | 192 |
| ... en B podemos demostrar ...                         | 193 |
| ... demostramos que ...                                | 195 |
| ... comprobar que ...                                  | 197 |

|                                                |     |
|------------------------------------------------|-----|
| Página 93                                      | 200 |
| ... no puede demostrarse ...                   | 200 |
| ... la notación ...                            | 200 |
| Página 94                                      | 201 |
| ... “ <i>A es un conjunto</i> ” ...            | 201 |
| ... único por el axioma de extensionalidad ... | 201 |
| Página 95                                      | 201 |
| ... que será relevante si $\phi$ tiene ...     | 201 |
| ... estará perfectamente definida ...          | 201 |
| ... <i>A</i> sea o no un conjunto ...          | 202 |
| ... puntos de vista semántico ...              | 202 |
| ... es un conjunto ...                         | 203 |
| ... si y solo si ...                           | 204 |
| ... demostración en B ...                      | 204 |
| ... En particular $R \notin R$ ...             | 205 |
| Página 96                                      | 205 |
| ... ser formalizados en B ...                  | 205 |
| ... $3 \equiv 2' = \{0, 1, 2\}$ ...            | 205 |
| Página 97                                      | 206 |
| ... forma equivalente ...                      | 206 |
| ... tal que ningún elemento ...                | 207 |
| Página 98                                      | 207 |
| ... es porque ...                              | 207 |
| ... igualmente ...                             | 207 |
| ... definir una clase ...                      | 207 |
| Página 99                                      | 207 |
| ... entonces ...                               | 207 |
| ... tenemos ...                                | 208 |
| Página 100                                     | 208 |
| DEMOSTRACIÓN ...                               | 208 |
| Página 101                                     | 208 |
| ... El error estaba ...                        | 208 |
| ... hemos probado ...                          | 209 |
| ... es claro que ...                           | 209 |
| ... luego ...                                  | 209 |
| ... es inmediato ...                           | 209 |
| ... los ordinales $0 < \alpha \leq n$ ...      | 210 |
| Página 102                                     | 210 |

|                                                                      |     |
|----------------------------------------------------------------------|-----|
| ... se cumple que ...                                                | 210 |
| ... en particular ...                                                | 210 |
| ... luego ...                                                        | 210 |
| ... es trivial ...                                                   | 210 |
| ... $0 \leq n < n'$ ...                                              | 210 |
| ... entonces ...                                                     | 210 |
| ... Entonces ...                                                     | 211 |
| ... es un número natural ...                                         | 211 |
| ... sea un conjunto ...                                              | 211 |
| Página 103                                                           | 212 |
| ... entonces $\omega \in \Omega$ ... que no es un número natural ... | 212 |
| ... Ni siquiera es posible ...                                       | 212 |
| <b>Especificación</b> ...                                            | 212 |
| Página 104                                                           | 213 |
| ... En efecto ...                                                    | 213 |
| ... son también teoremas ...                                         | 213 |
| ... seguimos sin poder ...                                           | 213 |
| ... En efecto ...                                                    | 213 |
| ... que $A$ sea un conjunto                                          | 215 |
| ... es un número natural ...                                         | 216 |
| ... Por hipótesis ...                                                | 216 |
| ... luego ...                                                        | 216 |
| ... explícitamente en el esquema ...                                 | 216 |
| Página 105                                                           | 217 |
| ... justificar que ...                                               | 217 |
| ... cumple lo requerido ...                                          | 217 |
| ... por inducción ...                                                | 218 |
| ... claro que ... es decir ...                                       | 218 |
| ... Es claro que ... luego...                                        | 218 |
| ... concluimos que ...                                               | 219 |
| ... enunciado sin clases ...                                         | 219 |
| Página 106                                                           | 219 |
| ... En estos términos ...                                            | 219 |
| ... definida mediante ... nos da una función ... tenemos que ...     | 221 |
| ... <i>se demuestran</i> ...                                         | 223 |
| <b>Teorías aritméticas</b>                                           | 223 |
| Páginas 106 - 113                                                    | 223 |
| Página 115                                                           | 223 |

|                                                            |            |
|------------------------------------------------------------|------------|
| DEMOSTRACIÓN ...                                           | 223        |
| Página 116                                                 | 224        |
| En efecto ... se puede acumular ...                        | 224        |
| ... en una segunda fase ...                                | 225        |
| ... fórmula equivalente ...                                | 225        |
| ... nos queda ...                                          | 227        |
| ... es equivalente a ...                                   | 228        |
| Página 117                                                 | 228        |
| <b>Teorema 3.32</b> ...                                    | 228        |
| ... <i>más el axioma</i> ...                               | 229        |
| ... siempre podemos tomar ...                              | 229        |
| ... equivalente a AP ...                                   | 229        |
| ... es claro que ...                                       | 230        |
| ... luego todos los teoremas ...                           | 230        |
| ... puede probarse en $T$ .                                | 230        |
| ... considerando el axioma ...                             | 231        |
| La situación es la misma ...                               | 231        |
| Página 118                                                 | 232        |
| ... mismos teoremas que ... son equivalentes ...           | 232        |
| ... puede demostrarse ...                                  | 232        |
| Para demostrar 3.32 ...                                    | 232        |
| ... Esbozamos la prueba ...                                | 232        |
| Página 124                                                 | 234        |
| ... sigue siéndolo ...                                     | 234        |
| <b>4. La completitud semántica</b>                         | <b>235</b> |
| <b>5. La aritmética de Peano</b>                           | <b>237</b> |
| <b>6. La teoría de Kripke-Platek</b>                       | <b>239</b> |
| <b>7. La teoría de la recursión</b>                        | <b>241</b> |
| <b>8. La formalización de la lógica</b>                    | <b>243</b> |
| <b>9. Incompletitud</b>                                    | <b>245</b> |
| <b>10. Clases y conjuntos</b>                              | <b>247</b> |
| <b>11. Los axiomas restantes de la teoría de conjuntos</b> | <b>249</b> |



---

|                                                                                    |            |
|------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>12. Las teorías de conjuntos ZFC y NBG</b>                                      | <b>251</b> |
| <b>Anexos</b>                                                                      | <b>253</b> |
| Definibilidad de la suma y el producto . . . . .                                   | 253        |
| Formalización de los resultados conjuntistas básicos en B . . . . .                | 254        |
| $\omega = \Omega$ no es demostrable en B + “ $\omega$ no es un conjunto” . . . . . | 255        |
| Interpretaciones de teorías . . . . .                                              | 256        |
| Demostración del Teorema 3.32 . . . . .                                            | 306        |
| <b>Bibliografía</b>                                                                | <b>351</b> |



# Introducción

## Página xi

**Nota 1:**  $x \in C$  si y solo si  $x \subset V$  y  $x \notin x$

Por definición,  $x \in C$  si, y solo si,  $x \in V$  y  $x \notin f(x)$ .

Así, si  $x \in C$  y  $x$  no estuviera contenido en  $V$ , es decir, si alguno de sus elementos no fuera un conjunto, tendríamos que  $f(x) = V$ , luego que  $x \in V = f(x)$  y esto supone una contradicción. Por tanto, debe cumplirse que  $x \subset V$ . En dicho caso tenemos pues que  $f(x) = x$  y, como  $x \notin f(x)$ , que  $x \notin x$  como queríamos ver.

Recíprocamente, si  $x \subset V$  y  $x \notin x$ , entonces tenemos que  $x$  es un conjunto, luego  $x \in V$ , y por definición (al ser  $x \subset V$ ) es  $f(x) = x$ . Como  $x \notin x$ , tenemos entonces que  $x \notin f(x)$  lo que, junto al hecho de que  $x \in V$ , prueba que  $x \in C$ . 

## Página xxiv

**Nota 1:** ... razonar por inducción ...

Los razonamientos inductivos son perfectamente válidos en el ámbito informal. Más concretamente, tenemos los siguientes resultados:

### Metateorema 0.1: Principio de inducción débil (informal)

Sea  $P$  una propiedad bien definida sobre los números naturales y de modo que podemos demostrar:

- (i)  $P$  es cierta para 0.
- (ii) Para cada natural  $n$  se cumple la implicación:

$$\text{Si } P \text{ es cierta para } n, \text{ entonces es cierta para el sucesor de } n. \quad (1)$$

Entonces, podemos asegurar que todo natural debe satisfacer la propiedad  $P$ .

Efectivamente, supongamos que existe una propiedad bien definida  $P$  sobre los números naturales tal que para cada natural se cumplen (i) y (ii), pero de modo que  $P$  no es cierta para todo natural. Entonces existe al menos un natural que no satisface  $P$ , con

lo que avanzando por la sucesión de los naturales y comprobando si cada uno satisface o no  $P$  eventualmente encontraremos el primer natural  $m$  que no satisface la propiedad. Dicho natural  $m$  no puede ser 0, pues se cumple (i) y, como  $m$  es el menor natural que no satisface  $P$ , tenemos que todo natural menor que  $m$  debe satisfacer la propiedad. En particular, como  $m$  no es 0 tiene un predecesor  $k$  en la sucesión de los números naturales que debe satisfacer  $P$  y por (1) obtenemos que el sucesor de  $k$ , es decir  $m$ , satisface la propiedad  $P$  lo cual supone una contradicción. 

### Metateorema 0.2: Principio de inducción fuerte (informal)

Sea  $P$  una propiedad bien definida sobre los números naturales y de modo que podemos demostrar para cada natural  $n$  la implicación:

Si  $P$  es cierta para todo natural menor que  $n$ , entonces es cierta para  $n$ . (2)

Entonces, podemos asegurar que todo natural debe satisfacer la propiedad  $P$ .

Efectivamente, supongamos que existe una propiedad bien definida  $P$  sobre los números naturales tal que para cada natural se cumple (2), pero de modo que  $P$  no es cierta para todo natural. Entonces existe al menos un natural que no satisface  $P$ , con lo que avanzando por la sucesión de los naturales y comprobando si cada uno satisface o no  $P$  eventualmente encontraremos el primer natural  $m$  que no satisface la propiedad<sup>1</sup>. Ahora, como  $m$  es el menor natural que no satisface  $P$ , tenemos entonces que todo natural menor que  $m$  debe satisfacer la propiedad y, por (2), obtenemos entonces que  $m$  satisface la propiedad  $P$ , lo cual supone una contradicción. 

Obsérvese entonces que no sólo los razonamientos inductivos tienen plena validez en el ámbito informal, sino que, más aún, son la “inspiración” para los razonamientos inductivos formales, pues éstos son completamente análogos a los informales.

## Página xxxvii

**Nota 1:** ... usando estos argumentos con objetos ficticios ...

Por ejemplo, para el caso del *Último Teorema de Fermat* resulta que su enunciado es lo que se conoce como una sentencia (una fórmula sin variables libres) de tipo  $\Pi_1$  en el lenguaje de la aritmética (ver Definiciones 5.5 y 5.17) y para dichas fórmulas se cumple que si son falsas, entonces su negación podría probarse en una teoría incluso más débil que la famosa aritmética de Peano (ver Teorema 5.29). Por tanto, como el teorema está demostrado en ZFC, sabemos que el UTF debe ser verdadero<sup>2</sup>, pues, de no serlo, podríamos demostrar su negación en una teoría mucho más débil que ZFC, luego en ZFC, y tendríamos una contradicción.

<sup>1</sup> Observemos que dicho natural  $m$  no puede ser el cero, pues, de serlo, tenemos entonces que (2) es falsa para  $n = 0$  ya que la propiedad es cierta para cada natural menor que 0 (pues no hay ninguno), pero no es cierta para 0.

<sup>2</sup> Suponiendo que ZFC es consistente.

## Página xxxviii

**Nota 1:** ... son los números naturales ...

Definiremos también (informalmente) la suma y el producto de números naturales. Podríamos hacerlo de forma recursiva análogo a lo que se hace formalmente, pero trataremos de dar una definición no recursiva que esperemos convenza al lector.

Comencemos con la suma:

### Definición 0.3: Suma de números naturales

Definimos la **suma** de dos naturales  $n$  y  $m$ , que denotaremos por  $n + m$ , como el natural que se obtiene de la siguiente forma:

Llamemos  $p_1$  a la posición de  $n$  en la sucesión de los naturales y  $p_2$  a la posición del 0. Avanzamos entonces de manera sucesiva y al mismo tiempo las posiciones  $p_1$  y  $p_2$  hasta que obtengamos que  $p_2$  está en la posición de  $m$  y definimos  $n + m$  como el natural que en dicho momento ocupa la posición de  $p_1$ .

Observemos entonces que se cumple el siguiente resultado (donde dado un natural  $n$  denotaremos por  $n'$  a su siguiente):

### Metateorema 0.4

Para cualesquiera números naturales  $n$  y  $m$  se cumplen:

- (i)  $n + 0 \equiv n$ .
- (ii)  $n + m' \equiv (n + m)'$ .

Veamos **en primer lugar que se cumple (i)**.

Con la notación dada en la definición de suma, tenemos que  $p_2$  es la posición de 0 sin avanzar en ningún momento. Por tanto, como la posición  $p_1$  comienza en la posición de  $n$  y no hemos avanzado, tenemos que  $n + 0$  será el natural que ocupa la posición de  $n$ , es decir, que  $n + 0 \equiv n$ .

Veamos **para terminar que se cumple (ii)**.

Para calcular  $n + m'$ , nos situamos en la posición de  $n$ , a la cual denominamos  $p_1$ , y en la posición del 0, a la cual denominamos  $p_2$ , y vamos avanzando por la sucesión de naturales hasta que la posición de  $p_2$  sea la de  $m'$ . Observemos pues que justo antes del último paso la posición  $p_2$  será la de  $m$ , luego por definición  $p_1$  estará en la posición de  $n + m$ . Entonces, al dar el último paso tenemos que, por definición,  $p_1$  estará en la posición de  $n + m'$ , pero por otra parte, estará en la posición del siguiente de  $n + m$ , con lo que concluimos que  $n + m'$  es el siguiente de  $n + m$ . 

Pasemos ahora a definir el producto de números naturales:

### Definición 0.5: Producto de números naturales

Definimos el **producto** de dos naturales  $n$  y  $m$ , que denotaremos por  $n \cdot m$  o  $nm$ , como el natural que se obtiene de la siguiente forma:

- Si  $m \equiv 0$  definimos  $n \cdot m \equiv 0$ .
- Si  $m \neq 0$ , llamemos  $p_1$  a la posición de  $n$  en la sucesión de los naturales y  $p_2$  a la posición del 1. Si  $k$  es el natural en la posición  $p_1$  avanzamos  $p_1$  hasta la posición del natural  $k + n$  y, cada vez que avancemos de este modo, también avanzaremos  $p_2$  una posición. Continuaremos avanzando por la sucesión de esta manera hasta que obtengamos que  $p_2$  está en la posición de  $m$  y definimos entonces  $n \cdot m$  como el natural que ocupa la posición de  $p_1$ .

Observemos entonces que se cumple el siguiente resultado:

### Metateorema 0.6

Para cualesquiera números naturales  $n$  y  $m$  se cumple que

$$n \cdot m' \equiv (n \cdot m) + n.$$

Como  $m'$  nunca puede ser  $0^3$ , para calcular  $n \cdot m'$ , nos situamos en la posición de  $n$ , a la cual denominamos  $p_1$ , y en la posición del 1, a la cual denominamos  $p_2$ , y vamos avanzando por la sucesión de naturales hasta que la posición de  $p_2$  sea la de  $m'$ , de modo que en cada paso  $p_2$  avanza una posición y  $p_1$  avanza hasta la posición de  $k + n$  donde  $k$  es el natural en la posición de  $p_1$ . Observemos pues que justo antes del último paso la posición  $p_2$  será la de  $m$ , luego por definición  $p_1$  estará en la posición de  $n \cdot m$ . Entonces, al dar el último paso tenemos que, por definición,  $p_1$  estará en la posición de  $n \cdot m'$ , pero por otra parte, estará en la posición de  $(n \cdot m) + n$ , con lo que obtenemos lo deseado. 

<sup>3</sup> Pues entonces  $m'$  ocuparía la primera posición en la sucesión y  $m$  debería ocupar una posición anterior, lo cual no es posible.

# Capítulo 1

## Lenguajes y modelos

### Página 4

#### Nota 1: Conjuntos ...

Observemos que si  $P$  es una propiedad bien definida sobre un conjunto bien definido  $M$ , entonces la colección de objetos de  $M$  que cumplen la propiedad  $P$ , que denotaremos por  $N$ , es también un conjunto bien definido:

- Tenemos que un objeto será uno de los elementos de  $N$  si, y solo si, es un objeto de  $M$ , lo cual está perfectamente especificado al estar  $M$  bien definido, y cumple la propiedad  $P$ , lo cual también está claro lo que significa al estar  $P$  bien definida. Por tanto, está perfectamente especificado que significa ser o no un objeto de  $N$ .
- Tenemos que si  $Q$  es una propiedad bien definida sobre los objetos de  $N$ , podemos definir la propiedad  $R$  sobre los objetos de  $M$  como aquella que la cumple un objeto  $a$  de  $M$  si, y solo si,  $a$  no cumple  $P$  o  $a$  cumple  $P$  y  $Q$ . Observemos entonces que dado un objeto  $a$  de  $M$  sabemos que, por estar  $P$  bien definida, o bien  $a$  satisface  $P$  o bien no lo hace, y no hay más opciones. Por tanto, si  $a$  no satisface  $P$ , tenemos que  $a$  satisface  $R$  y si  $a$  satisface  $P$ , entonces es un objeto de  $N$  y se satisfará o no  $R$  en función de si  $a$  cumple o no  $Q$ , lo cual también está perfectamente especificado que significa al estar  $Q$  bien definida. Como no puede darse otro caso distinto de estos dos y en ambos está perfectamente especificado que significa que un objeto  $a$  cumpla  $R$ , podemos concluir que  $R$  es una propiedad bien definida sobre los objetos de  $M$ . Además, como  $M$  está bien definido sabemos que está perfectamente especificado lo que significa que cada objeto de  $M$  cumpla  $R$  y, como todo objeto de  $N$  cumple  $Q$  si, y solo si, todo objeto de  $M$  cumple  $R$ , concluimos que está perfectamente especificado que significa que todo objeto de  $N$  cumpla  $Q$ .
- Tenemos que si  $Q$  es una propiedad bien definida sobre los objetos de  $N$ , podemos definir la propiedad  $R$  sobre los objetos de  $M$  como aquella que la cumple un objeto  $a$  de  $M$  si, y solo si,  $a$  cumple  $P$  y  $Q$ . Observemos entonces que dado un objeto  $a$  de  $M$  sabemos que, por estar  $P$  bien definida, o bien  $a$  satisface  $P$  o bien no lo hace, y no hay más opciones. Por tanto, si  $a$  no satisface  $P$ , tenemos que  $a$  no satisface  $R$  y si  $a$  satisface  $P$ , entonces es un objeto de  $N$  y se satisfará o no  $R$  es función de

si  $a$  cumple o no  $Q$ , lo cual también está perfectamente especificado que significa al estar  $Q$  bien definida. Como no puede darse otro caso distinto de estos dos y en ambos está perfectamente especificado que significa que un objeto  $a$  cumpla  $R$ , podemos concluir que  $R$  es una propiedad bien definida sobre los objetos de  $M$ . Además, como  $M$  está bien definido sabemos que está perfectamente especificado lo que significa que exista un objeto de  $M$  que cumpla  $R$  y, como existe un objeto de  $N$  que cumple  $Q$  si, y solo si, existe un objeto de  $M$  que cumple  $R$ , concluimos que está perfectamente especificado que significa que exista un objeto de  $N$  que cumpla  $Q$ .

**Nota 2:** ... conjunto  $\mathbb{N}$  de los números naturales ...

Más en general, cualquier conjunto  $M$  cuyos elementos podamos enumerar estará bien definido:

- En efecto, que un objeto  $a$  sea un elemento de  $M$  significa que será el primer objeto en la enumeración de  $M$ , o el segundo, o el tercero, de manera que si continuamos avanzando por la sucesión de elementos de  $M$  tarde o temprano nos toparemos con el objeto  $a$ , mientras que un objeto  $a$  no será un elemento de  $M$  si no es el primero de la enumeración, ni el segundo, ni por mucho que avancemos en la sucesión de elementos de  $M$  encontraremos el objeto  $a$ .
- Decir que todo elemento de  $M$  cumple una propiedad bien definida  $P$  significa que el primer elemento de la enumeración tiene la propiedad  $P$ , y que el segundo la tiene, y que el tercero la tiene y que por mucho que avancemos en la sucesión de elementos de  $M$  nunca encontraremos un elemento de  $M$  que no la tenga.
- Decir que existe un elemento de  $M$  que cumple una propiedad bien definida  $P$  significa que el primer elemento de la enumeración tiene la propiedad  $P$ , o que el segundo la tiene, o que el tercero la tiene, de manera que si continuamos avanzando por la sucesión de elementos de  $M$  tarde o temprano encontraremos algún elemento que la tenga.

En esta situación en la que tengamos un conjunto  $M$  que podamos enumerar, observemos que si  $P$  es una propiedad bien definida sobre  $M$ , entonces también podemos enumerar la colección de todos los objetos de  $M$  que satisfacen  $P$ .

En efecto, fijada  $m_0, m_1, m_2, \dots$  una enumeración de  $M$ , como  $P$  está bien definida sabemos que para cada natural  $i$  existe un argumento que nos asegura que o bien  $m_i$  cumple  $P$ , o bien  $m_i$  no cumple  $P$ . Aunque no sepamos cual es el caso, podemos asegurar que únicamente existen estas dos opciones y esto nos permite definir  $n_i$  como

$$n_i \equiv \begin{cases} m_i & \text{si } m_i \text{ cumple } P \\ \perp & \text{si } m_i \text{ no cumple } P \end{cases}$$

donde  $\perp$  es cualquier objeto que no esté en el conjunto  $M$ . Tenemos así una sucesión  $n_0, n_1, n_2, \dots$  cuyos elementos son objetos de  $M$  o el objeto  $\perp$  de modo que, aunque puede que no sepamos para un  $n_i$  concreto que objeto denota, la sucesión en sí estará



completa y unívocamente determinada por la propiedad  $P$  y la enumeración elegida de  $M$ . Podemos entonces formar una enumeración de los objetos de  $M$  que cumplen  $P$  sin más que avanzar por la sucesión de los  $n_i$  e ir añadiendo a una nueva sucesión cada  $n_i$  que encontremos que no sea el objeto  $\perp$  (obviamente, los añadimos a la nueva sucesión en el mismo orden relativo en el que vayamos obteniéndolos). De nuevo cabe remarcar que, aunque puede que no sepamos decir exactamente cual es el elemento  $j$ -ésimo de esta nueva sucesión, como la sucesión  $n_i$  queda completamente determinada por  $P$  y la enumeración de  $M$ , esta nueva sucesión que formamos también está unívocamente determinada por ellas y nos proporciona la enumeración buscada.

Finalmente observemos que también podremos enumerar cualquier subconjunto bien definido  $N$  de  $M$ . En efecto, podemos definir la propiedad  $P$  sobre los objetos de  $M$  que se cumple para un objeto  $a$  de  $M$  si, y solo si,  $a$  es un objeto de  $N$  y, como  $M$  y  $N$  están bien definidas, obtenemos que  $P$  también lo está. Basta entonces con aplicar lo visto anteriormente teniendo en cuenta que  $N$  es la colección de objetos de  $M$  que cumplen esta propiedad  $P$ .

## Página 5

**Nota 1:** ... conjunto arbitrario ...

Recalquemos de nuevo que siempre que aparezca la frase “conjunto arbitrario” debe entenderse en términos de lo expuesto en el tercer párrafo de la página 5, y lo mismo ocurrirá con los conceptos “relación arbitraria” o “función arbitraria” introducidos más adelante.

Lo mismo vale también para “modelo arbitrario” o “valoración arbitraria” que también aparecerán más adelante.

## Página 15

**Nota 1:** ... *modelo natural de la aritmética* ...

Claramente en el modelo natural de la aritmética se asocia a la constante 0 el número natural cero. Observemos que nada impide en la definición de modelo que dos símbolos distintos tengan asociado el mismo objeto en un modelo concreto.

## Página 16

**Nota 1:** ... cadenas anteriores de la sucesión ...

Es decir, cada  $t_i \equiv \theta_j$  para algún  $j$  entre 0 y  $k-1$ , y análogamente para el resto de puntos en la definición.

## Página 17

**Nota 1:** ... reglas muy concretas.

Es decir, de acuerdo a la definición de expresión, toda expresión debe ser de exactamente uno de los ocho tipos descritos y se identifican inmediatamente por el signo por el que empiezan. Además, si es  $\theta_0, \dots, \theta_m$  una sucesión de cadenas de símbolos en  $\mathcal{L}$  que muestra que  $\theta \equiv \theta_m$  es una expresión, entonces  $\theta_0$  es una variable o una constante, pues no hay cadenas de símbolos anteriores en la sucesión que permitan que  $\theta_0$  satisfaga alguna de las condiciones de 3) a 8).

## Página 19

**Nota 1:** ... justificarlo ...

1.  $x \equiv \theta_0$  (1)
2.  $y \equiv \theta_1$  (1)
3.  $y' \equiv Sy \equiv S\theta_1 \equiv \theta_2$  (4)
4.  $x + y' \equiv +xy' \equiv +xSy \equiv +\theta_0\theta_2 \equiv \theta_3$  (4)
5.  $x + y \equiv +xy \equiv +\theta_0\theta_1 \equiv \theta_4$  (4)
6.  $(x + y)' \equiv S(x + y) \equiv S + xy \equiv S\theta_4 \equiv \theta_5$  (4)
7.  $x + y' = (x + y)' \equiv (x + y')(x + y)' \equiv \theta_3\theta_5 \equiv \theta_6$  (3)
8.  $\wedge y(x + y' = (x + y)') \equiv \wedge y \theta_6 \equiv \theta_7$  (7)
9.  $\wedge xy(x + y' = (x + y)') \equiv \wedge x \wedge y \theta_6 \equiv \wedge x \theta_7 \equiv \theta_8 \equiv \alpha$  (7)

## Página 20

**Nota 1:** Es claro que ...

Demostremos en primer lugar que si  $x \equiv y$ , entonces  $v_{xy}^{ab}$  coincide con  $v_y^b$ .

En efecto, dada una variable  $z$  cualquiera de  $\mathcal{L}$  se tiene que

$$v_{xy}^{ab}(z) \equiv v_{yy}^{ab}(z) \equiv \begin{cases} b & \text{si } z \equiv y \\ v_y^a(z) & \text{si } z \not\equiv y \end{cases} \equiv \begin{cases} b & \text{si } z \equiv y \\ v(z) & \text{si } z \not\equiv y \end{cases} \equiv v_y^b(z),$$

tal como queríamos ver. 

Por otra parte, si  $x \not\equiv y$ , entonces  $v_{xy}^{ab}$  coincide con  $v_{yx}^{ba}$ .

En efecto, dada una variable  $z$  cualquiera de  $\mathcal{L}$  se tiene que

$$v_{xy}^{ab}(z) \equiv \begin{cases} b & \text{si } z \equiv y \\ v_x^a(z) & \text{si } z \not\equiv y \end{cases} \equiv \begin{cases} b & \text{si } z \equiv y \\ a & \text{si } z \equiv x \\ v(z) & \text{si } z \not\equiv x, y \end{cases} \equiv \begin{cases} a & \text{si } z \equiv x \\ v_y^b(z) & \text{si } z \not\equiv x \end{cases} \equiv v_{yx}^{ba}(z),$$

tal como queríamos ver. 



$$\text{syss no } v(x) \cdot v(x) \equiv (2 \cdot (v(y) \cdot v(y))) + 3 \text{ syss no } v(x)^2 \equiv 2v(y)^2 + 3, \\ 2), 4)$$

luego, en efecto,

$$M \models (x \cdot x \neq 0'' \cdot (y \cdot y) + 0''')[v] \text{syss } v(x)^2 - 2v(y)^2 \neq 3$$

tal como se buscaba ver. 

**Nota 2:** Aplicando dos veces 7) ...

Si denotamos por  $\alpha \equiv x \cdot x \neq 0'' \cdot (y \cdot y) + 0'''$ , se tiene que

$$M \models \bigwedge_{7)} y \alpha[v] \text{ syss para todo natural } n \text{ se cumple que } M \models \alpha[v_y^n],$$

y, por lo visto en la nota anterior, esto último ocurre si, y solo si,

$$\text{para todo natural } n \text{ se cumple que } v(x)^2 - 2n^2 \neq 3.$$

Con esto, tenemos que

$$M \models \bigwedge_{7)} xy \alpha[v] \text{ syss para todo natural } m \text{ se cumple que } M \models \bigwedge y \alpha[v_x^m],$$

y, por lo anterior, lo último se cumple si, y solo si,

$$\text{para todo natural } m \text{ y para todo natural } n \text{ se cumple que } m^2 - 2n^2 \neq 3,$$

tal como queríamos ver. 

**Nota 3:** Más convenios de notación ...

1.  $(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg\alpha \rightarrow \beta)$  (Disyunción)
2.  $(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \equiv \neg(\neg\neg\alpha \rightarrow \neg\beta)$  (Conjunción)
3.  $(\alpha \leftrightarrow \beta) \equiv ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)) \equiv \neg(\neg\neg(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg(\beta \rightarrow \alpha))$  (Bicondicional)
4.  $\forall x_i \alpha \equiv \neg \bigwedge x_i \neg\alpha$  (Cuantificador existencial)

## Página 23

**Nota 1:** ...  $M \models (\alpha \leftrightarrow \beta)[v]$  ...

También se cumple que

$$M \models (\alpha \leftrightarrow \beta)[v] \text{ syss } (M \models \alpha[v] \text{ syss } M \models \beta[v]). \quad (1.2)$$

En efecto, como se tiene que

$$M \models (\alpha \leftrightarrow \beta)[v] \text{ syss } M \models \alpha[v] \text{ y } M \models \beta[v] \text{ o bien } M \models \alpha[v] \text{ y no } M \models \beta[v],$$

si se cumple que  $M \models (\alpha \leftrightarrow \beta)[v]$ , entonces si  $M \models \alpha[v]$  tiene que cumplirse que  $M \models \beta[v]$  y, recíprocamente, si  $M \models \beta[v]$ , entonces debe cumplirse que  $M \models \alpha[v]$ .

Por otra parte, si se tiene que  $M \models \alpha[v]$  syss  $M \models \beta[v]$  entonces podemos distinguir dos casos:

- Si  $M \models \alpha[v]$ , entonces se cumple que  $M \models \alpha[v]$  y  $M \models \beta[v]$ .
- Si no  $M \models \alpha[v]$ , entonces no  $M \models \alpha[v]$  y no  $M \models \beta[v]$ .

Por tanto, se obtiene que  $M \models (\alpha \leftrightarrow \beta)[v]$ . 

Es importante no confundir esta caracterización de la satisfacción del bicondicional con que

$$M \models (\alpha \leftrightarrow \beta) \text{ syss } (M \models \alpha \text{ syss } M \models \beta),$$

lo cual no es cierto (ver **Nota 1** pág. 36).

**Nota 2:** ... Similarmente se demuestra ...

Para la conjunción tenemos que

$$M \models (\alpha \wedge \beta)[v] \text{ syss } M \models \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)[v] \text{ syss no } M \models (\neg\alpha \vee \neg\beta)[v] \text{ syss no } M \models \neg\alpha[v] \text{ y no } M \models \neg\beta[v] \text{ syss } M \models \alpha[v] \text{ y } M \models \beta[v].$$

Y para el bicondicional tenemos que

$$\begin{aligned} M \models (\alpha \leftrightarrow \beta)[v] \text{ syss } M \models ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha))[v] \text{ syss } M \models (\alpha \rightarrow \beta)[v] \text{ y } \\ M \models (\beta \rightarrow \alpha)[v] \text{ syss } (\text{no } M \models \alpha[v] \text{ o } M \models \beta[v]) \text{ y } (\text{no } M \models \beta[v] \text{ o } M \models \alpha[v]) \text{ syss } \\ (\text{no } M \models \alpha[v] \text{ y no } M \models \beta[v]) \text{ o } (M \models \alpha[v] \text{ y } M \models \beta[v]). \end{aligned}$$

Con lo que, en efecto, las fórmulas definidas para la conjunción y el bicondicional tienen el significado deseado. 

**Nota 3:** ... la ...

Observemos que aunque en el contexto de las teorías axiomáticas (ver Capítulo 3) puede ocurrir que muchos términos de la forma  $x_i|\alpha$  denoten a la descripción impropia en un modelo prefijado (por ejemplo, porque pueda demostrarse en la teoría  $\neg\bigvee_{i=1}^n x_i\alpha$ ), semánticamente está claro que la descripción impropia es única (fijado un modelo). Como por lo visto  $x|x = x$  es uno de estos términos que denotan a la descripción impropia y, además, será así para cualquier lenguaje formal (cualquier variable  $x$ ) y cualquier modelo y valoración considerados, podemos decir que es LA descripción impropia en el sentido de que es la forma “estándar” de denotar la descripción impropia de cualquier modelo.

## Página 24

**Nota 1:** ... siempre decide en un número finito de pasos cuál es el caso.

Recordemos que  $\theta_0$  es siempre una variable o una constante (ver **Nota** pág. 17), luego podemos decidir si una variable  $x$  está libre o ligada para  $\theta_0$  y, a partir de las reglas anteriores (las cuales abarcan los 8 posibles tipos de expresión), podemos decidirlo sucesivamente para  $\theta_1, \theta_2$ , etc. hasta llegar a  $\theta_m \equiv \theta$ .

## Página 25

**Nota 1:** ... deducen inmediatamente de las definiciones ...

En efecto:

- $x$  está libre (ligada) en  $\alpha \vee \beta$  syss lo está en  $\neg\alpha \rightarrow \beta$ , lo cual, por 6), ocurre syss lo está en  $\neg\alpha$  o en  $\beta$ , y a su vez por 5) ocurre syss lo está en  $\alpha$  o en  $\beta$ .
- $x$  está libre (ligada) en  $\alpha \wedge \beta$  syss lo está en  $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$ , lo cual por 5) y por lo visto en el punto anterior ocurre syss lo está en  $\neg\alpha$  o en  $\neg\beta$ , que a su vez por 5) ocurre syss lo está en  $\alpha$  o en  $\beta$ .
- $x$  está libre (ligada) en  $\alpha \leftrightarrow \beta$  syss lo está en  $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$ , lo cual por lo visto en el punto anterior ocurre syss lo está en  $\alpha \rightarrow \beta$  o en  $\beta \rightarrow \alpha$  y, en cualquier caso, por 6) esto ocurre syss lo está en  $\alpha$  o en  $\beta$ .
- $x$  está libre en  $\forall x_i \alpha$  syss lo está en  $\neg \wedge x_i \neg\alpha$ , lo cual equivale por 5) a que lo esté en  $\wedge x_i \neg\alpha$  que, por 7), ocurre syss lo está en  $\neg\alpha$  y  $x \neq x_i$  y finalmente, por 5), ocurre syss  $x$  está libre en  $\alpha$  y  $x \neq x_i$ .
- $x$  está ligada en  $\forall x_i \alpha$  syss lo está en  $\neg \wedge x_i \neg\alpha$ , lo cual equivale por 5) a que lo esté en  $\wedge x_i \neg\alpha$  que, por 7), ocurre syss lo está en  $\neg\alpha$  o  $x \equiv x_i$  y finalmente, por 5), ocurre syss  $x$  está ligada en  $\alpha$  o  $x \equiv x_i$ .

Esto prueba lo deseado para cada uno de los cuatro casos buscados.



**Nota 2:** ... si y solo si ...

### Metateorema 1.1

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal y  $\theta$  una expresión en  $\mathcal{L}$ . Entonces, una variable  $x$  de  $\mathcal{L}$  está en  $\theta$  (es decir, es uno de los símbolos de  $\theta$ ) si, y solo si, está libre o ligada en  $\theta$ .

Probémoslo por inducción en la longitud de  $\theta$  (ver la aclaración de la **Nota 1** pág. 26):

- Si  $\theta \equiv x_i$ , tenemos que  $x$  está en  $\theta$  si, y solo si,  $x \equiv x_i$ , y esto último es equivalente a que  $x$  esté libre en  $\theta$ .

- Si  $\theta \equiv c_i$ , entonces  $x$  no está en  $\theta$ , pero tampoco está nunca libre ni ligada en  $\theta$ , por lo que se cumple lo deseado trivialmente.
- Si  $\theta \equiv R_i^n t_1 \cdots t_n$  y  $x$  está en  $\theta$ , entonces está en alguno de los  $t_j$  (pues  $x$  es distinto de  $R_i^n$ ). Como la longitud de estos es menor que la de  $\theta$ , por hipótesis de inducción tenemos que  $x$  está libre o ligada en algún  $t_j$ , luego lo está en  $\theta$ .

Recíprocamente, si  $x$  está libre o ligada en  $\theta$ , entonces debe estarlo en algún  $t_j$  y, por hipótesis de inducción,  $x$  estará en algún  $t_j$  luego en  $\theta$ .

- Si  $\theta \equiv f_i^n t_1 \cdots t_n$  se prueba de manera completamente análoga al caso anterior.
- Si  $\theta \equiv \neg \alpha$ ,  $x$  está en  $\theta$  si, y solo si,  $x$  está en  $\alpha$  (pues  $x$  es distinto de  $\neg$ ). Como la longitud de  $\alpha$  es menor que la de  $\theta$ , por hipótesis de inducción tenemos que esto último ocurre si, y solo si,  $x$  está libre o ligada en  $\alpha$ , luego si, y solo si, está libre o ligada en  $\theta$ .
- Si  $\theta \equiv \alpha \rightarrow \beta$ ,  $x$  está en  $\theta$  si, y solo si,  $x$  está en  $\alpha$  o en  $\beta$  (pues  $x$  es distinto de  $\rightarrow$ ). Por hipótesis de inducción esto ocurre si, y solo si,  $x$  está libre o ligada en  $\alpha$  o bien  $x$  está libre o ligada en  $\beta$  y, en cualquier caso, esto último se da si, y solo si,  $x$  está libre o ligada en  $\theta$ .
- Si  $\theta \equiv \bigwedge x_i \alpha$  y  $x$  está en  $\theta$  tenemos dos casos:
  1. Si  $x \equiv x_i$ , entonces  $x$  está ligada en  $\theta$ .
  2. Si  $x \not\equiv x_i$ , entonces  $x$  debe ser un símbolo de  $\alpha$  (pues claramente  $x$  es distinto de  $\bigwedge$ ), luego por hipótesis de inducción estará libre o ligada en  $\alpha$  y en cualquier caso, como  $x \not\equiv x_i$ , se tiene que  $x$  está libre o ligada en  $\theta$ .

Recíprocamente, si  $x$  está libre o ligada en  $\theta$  distinguimos también dos casos:

1. Si  $x$  está libre en  $\theta$ , entonces  $x \not\equiv x_i$  y  $x$  estará libre en  $\alpha$ , luego por hipótesis de inducción  $x$  está en  $\alpha$  y con ello en  $\theta$ .
  2. Si  $x$  está ligada en  $\theta$ , entonces o bien  $x \equiv x_i$  y claramente es un símbolo de  $\theta$ , o bien  $x$  está ligada en  $\alpha$ , luego por hipótesis de inducción está en  $\alpha$  y por tanto en  $\theta$ . En cualquier caso,  $x$  está en  $\theta$ .
- Si  $\theta \equiv x_i | \alpha$  se prueba de manera completamente análoga al caso anterior.

Esto finaliza la inducción y con ello la demostración. 

**Nota 3:** ... si y solo si ...

### Metateorema 1.2

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal y  $\theta$  una expresión en  $\mathcal{L}$  sin descriptores (es decir, tal que el descriptor no es ninguno de sus símbolos). Entonces, una variable  $x$  de  $\mathcal{L}$  está libre (ligada) en  $\theta$  considerada como expresión de  $\mathcal{L}$  si, y solo si, lo está considerada como expresión de  $\underline{\mathcal{L}}$ .

Probémoslo por inducción en la longitud de  $\theta$  (donde debemos tener en cuenta que el caso de la inducción correspondiente al descriptor no puede darse). Por comodidad en la notación, cuando nos refiramos a  $\theta$  como una expresión de  $\mathcal{L}$  la denotaremos por “ $\theta$ ” y al referirnos a ella como una expresión de  $\underline{\mathcal{L}}$  la denotaremos por “ $\underline{\theta}$ ” (aunque se debe tener en cuenta que, realmente, son exactamente la misma cadena de símbolos).

- Sea  $\theta \equiv x_i$ .

Tenemos entonces que  $x$  está libre en  $\theta$  si, y solo si,  $x \equiv x_i$ , lo cual es también equivalente a que  $x$  esté libre en  $\underline{\theta}$ .

Por otra parte,  $x$  nunca está ligada en  $\theta$  ni en  $\theta'$ , con lo que la equivalencia se da trivialmente en este caso.

- Si  $\theta \equiv c_i$ , entonces  $x$  nunca está ni libre ni ligada ni en  $\theta$  ni en  $\underline{\theta}$ , con lo que la equivalencia se da trivialmente.
- Si  $\theta \equiv R_i^n t_1 \cdots t_n$ , entonces  $x$  está libre (ligada) en  $\theta$  si, y solo si, lo está en algún  $t_j$  y, por hipótesis de inducción (que es aplicable, pues si  $\theta$  no tiene descriptor entonces no lo tiene ningún  $t_j$ ), esto ocurre si, y solo si, lo está en algún  $t_j$  al considerarlo una expresión de  $\underline{\mathcal{L}}$ , luego si, y solo si, lo está en  $\underline{\theta}$ .
- Si  $\theta \equiv f_i^n t_1 \cdots t_n$  se prueba de manera completamente análoga al caso anterior.
- Si  $\theta \equiv \neg\alpha$ , entonces  $x$  está libre (ligada) en  $\theta$  si, y solo si, lo está en  $\alpha$  y, por hipótesis de inducción (que es aplicable, pues si  $\theta$  no tiene descriptor entonces no lo tiene  $\alpha$ ), esto ocurre si, y solo si, lo está en  $\alpha$  al considerarla una expresión de  $\underline{\mathcal{L}}$ , luego si, y solo si, lo está en  $\underline{\theta}$ .
- Si  $\theta \equiv \alpha \rightarrow \beta$ , entonces  $x$  está libre (ligada) en  $\theta$  si, y solo si, lo está en  $\alpha$  o en  $\beta$  y, por hipótesis de inducción (que es aplicable, pues si  $\theta$  no tiene descriptor entonces no lo tiene ni  $\alpha$  ni  $\beta$ ), esto ocurre si, y solo si, lo está en  $\alpha$  o en  $\beta$  al considerarlos como expresiones de  $\underline{\mathcal{L}}$ , luego si, y solo si, lo está en  $\underline{\theta}$ .
- Sea  $\theta \equiv \bigwedge x_i \alpha$ .

Tenemos entonces que  $x$  está libre en  $\theta$  si, y solo si,  $x \not\equiv x_i$  y  $x$  está libre en  $\alpha$ , lo cual por hipótesis de inducción (que es aplicable, pues si  $\theta$  no tiene descriptor entonces no lo tiene  $\alpha$ ) ocurre si, y solo si,  $x \not\equiv x_i$  y  $x$  está libre en  $\alpha$  al considerarla una expresión de  $\underline{\mathcal{L}}$ , luego si, y solo si,  $x$  está libre en  $\underline{\theta}$ .

Por otra parte,  $x$  está ligada en  $\theta$  si, y solo si,  $x \equiv x_i$  o  $x$  está ligada en  $\alpha$ , lo cual por hipótesis de inducción (que es aplicable, pues si  $\theta$  no tiene descriptor entonces no lo tiene  $\alpha$ ) ocurre si, y solo si,  $x \equiv x_i$  o  $x$  está ligada en  $\alpha$  al considerarla una expresión de  $\underline{\mathcal{L}}$ , luego si, y solo si,  $x$  está ligada en  $\underline{\theta}$ .

Esto finaliza la inducción y con ello la demostración. 

**Nota 4:** ... Observemos que una variable puede estar a la vez libre y ligada ...

Detallemos cada caso:



- $x$  no es un símbolo de  $u = v$ , luego por el Metateorema 1.1 se cumple que  $x$  no está libre ni ligada en dicha fórmula.
- $x$  está libre en  $u = x$ , pues lo está en  $x$  (apartados 3) y 1)) y no está ligada, pues no lo está ni en  $u$  ni en  $x$  (apartados 3) y 1)).
- $x$  está ligada en  $\forall x u = x$  por ser la misma  $x$  la variable cuantificada y no está libre por la misma razón (ver Nota 1 pág. 25).
- $x$  está libre en  $x = 0 \wedge \forall x x = 0'$ , pues lo está en  $x = 0$  (ver Nota 1 pág. 25) ya que lo está en  $x$  (apartados 3) y 1)). También está ligada porque lo está en  $\forall x x = 0'$  por ser la variable cuantificada (ver Nota 1 pág. 25).

**Nota 5:** ... si y solo si ...

En efecto, se tiene que  $M \models (\forall y 0''' \cdot y = x)[v]$  si, y solo si, existe un natural  $m$  tal que  $M \models (0''' \cdot y = x)[v_y^m]$ , lo cual ocurre si, y solo si, existe un natural  $m$  tal que

$$M(0''' \cdot y)[v_y^m] \equiv v(x),$$

y, finalmente, esto es equivalente a la existencia de un natural  $m$  tal que  $3m \equiv v(x)$ . 

## Página 26

**Nota 1:** ... inducción sobre la longitud de  $\theta$ .

Supongamos que queremos probar que cierta propiedad  $Q$  bien definida sobre las expresiones de un lenguaje formal<sup>1</sup> es cierta. Para demostrarlo podemos plantear la siguiente propiedad sobre los números naturales

$$P(n) \equiv Q \text{ se satisface para todas las expresiones de longitud } n,$$

pues demostrar que dicha propiedad se satisface para todo natural  $n$  es equivalente a que la propiedad  $Q$  la satisfacen todas las expresiones del lenguaje formal.

En efecto, dada una expresión  $\theta$  ésta tiene una longitud perfectamente determinada  $n > 0$  y, si suponemos que se satisface  $P(n)$ , se tiene que  $Q$  se satisface para todas las expresiones de longitud  $n$ , luego en particular  $\theta$  satisface  $Q$ . Recíprocamente, si la propiedad  $Q$  la satisfacen todas las expresiones del lenguaje formal, entonces dado un natural  $n$  tenemos dos casos: o bien no hay ninguna expresión de longitud  $n$ , con lo cual se satisface  $P(n)$  trivialmente; o bien sí hay expresiones de longitud  $n$  y, como estamos suponiendo que toda expresión satisface  $Q$ , en particular se satisface  $P(n)$ .

---

<sup>1</sup> Observemos que el conjunto de las expresiones de un lenguaje formal está bien definido, pues por la Definición 1.5 está perfectamente determinado lo que es una expresión de un lenguaje formal y, como podemos enumerar sus elementos (tal como se muestra en la Nota 2 pág. 36), también está claro lo que significa que una propiedad se satisfaga para cada expresión o que exista una expresión que satisfaga cierta propiedad.

La ventaja que tiene definir esta propiedad auxiliar es que ahora tenemos una propiedad definida sobre los números naturales a la que podemos aplicar el principio de inducción (Metateorema 0.2) para demostrar que se satisface para todo natural  $n$  y, por lo dicho, demostrar así que toda expresión del lenguaje formal satisface la propiedad  $Q$ . Ahora bien, antes de intentar probar cualquier propiedad debemos asegurarnos de que esté bien definida, es decir, debemos asegurarnos de que no cabe ninguna duda de que significa que  $P$  sea o no satisfecha por un natural  $n$ .

En primer lugar, observemos que si para cierto natural  $n$  no existen expresiones de dicha longitud sobre el lenguaje formal considerado, entonces trivialmente  $Q$  se satisface para todas las expresiones de longitud  $n$  (pues no hay ninguna), luego siempre se satisface  $P(n)$ . Por otro lado, si tomamos un natural  $n$  para el cual sí existen expresiones de dicha longitud en el lenguaje formal considerado, basta observar que podemos enumerar<sup>2</sup> las expresiones de longitud  $n$  y tenemos entonces que  $P(n)$  se satisface si, y solo si, la primera expresión de longitud  $n$  de nuestra enumeración satisface  $Q$  (lo que por estar  $Q$  bien definida está claro que significa), y también lo hace la segunda expresión de la enumeración, y la tercera, y la cuarta, y por mucho que continuemos siguiendo la lista<sup>3</sup> nunca encontraremos una expresión que no satisfaga  $Q$ .

Con todo, aunque a priori no sepamos si existen o no expresiones de longitud  $n$  para un lenguaje formal, o bien es así o bien no lo es, no hay más opciones, y en cualquiera de los dos casos hemos visto que está perfectamente establecido lo que significa que se satisfaga  $P(n)$ , luego  $P$  es una propiedad bien definida.

Así pues, como  $P$  es una propiedad bien definida sobre los naturales, podemos demostrarla por inducción (ver Metateorema 0.2), con lo que bastará demostrar que para cada natural  $n$  se satisface la implicación:

$$\text{Si } P \text{ es cierta para todo natural menor que } n, \text{ entonces es cierta para } n. \quad (1.3)$$

Más aún, lo anterior es equivalente a demostrar que para cada natural  $n \geq 1$  es cierta la implicación:

$$\begin{aligned} &\text{Si } Q \text{ es cierta para cada expresión de longitud menor a } n, \\ &\text{entonces es cierta para cada expresión de longitud } n. \end{aligned} \quad (1.4)$$

En efecto, si suponemos que para cada natural se satisface (1.3) y que  $Q$  es cierta para cada expresión de longitud menor a cierto  $n \geq 1$  dado, entonces tenemos que se satisface

<sup>2</sup> De forma análoga a lo que se ve en la Nota 2 pág. 36 es claro que podemos enumerar todas las expresiones de un lenguaje formal y, de entre ellas, simplemente nos quedamos con las de longitud  $n$ , es decir, seguimos la lista hasta encontrar la primera expresión de longitud  $n$  y esta será la primera de nuestra lista, después continuamos la lista hasta encontrar la segunda expresión de longitud  $n$  y esta será la segunda de nuestra lista, etc.

Aunque la enumeración anterior puede no ser práctica, sí que nos garantiza que es posible enumerar las expresiones de longitud  $n$  de un lenguaje formal y, por tanto, que tiene sentido considerar una enumeración de éstas sea o no calculable en la práctica.

<sup>3</sup> Observemos que, aunque no sepamos si se dará esta situación o en algún momento existirá una expresión en la lista que no satisfaga  $Q$ , lo cierto es que únicamente puede darse una de estas dos opciones y esto justifica que está perfectamente definido lo que significa que se satisfaga  $P(n)$  en este caso.

$P$  para todo natural menor a  $n$ , luego por (1.3) se satisface  $P(n)$  y, con ello, se satisface  $Q$  para toda expresión de longitud  $n$  tal como queríamos ver.

Recíprocamente, supongamos ahora que para cada natural mayor o igual que 1 se satisface (1.4). Entonces, para  $n = 0$  es claro que se satisface (1.3), pues  $P(0)$  se satisface siempre y si es  $n > 0$  y suponemos que se satisface  $P$  para cada natural menor que  $n$ , tenemos entonces que se satisface  $Q$  para cada expresión de longitud menor que  $n$ , luego por (1.4) se satisface  $Q$  para cada expresión de longitud  $n$  y esto prueba que se satisface  $P(n)$ .

Por tanto, para demostrar que toda expresión de un lenguaje formal satisface la propiedad  $Q$  basta demostrar (1.4) para cada natural  $n \geq 1$ , pero veamos finalmente que esto es equivalente a demostrar que dada una expresión arbitraria<sup>4</sup>  $\theta$ , si  $Q$  es cierta para las expresiones de longitud menor a la de  $\theta$ , entonces  $\theta$  también satisface  $Q$ .

Supongamos, en primer lugar, que se satisface (1.4) para cada natural  $n \geq 1$ . Dada entonces  $\theta$  una expresión cualquiera, si suponemos que  $Q$  es cierta para las expresiones de longitud menor a la de  $\theta$ , tenemos entonces que, como  $\theta$  tiene una longitud perfectamente determinada  $n$ , estamos afirmando que se cumple  $Q$  para toda expresión de longitud menor a  $n$ . Ahora bien, esta es precisamente la premisa en (1.4) para  $n$ , luego se debe cumplir la tesis que afirma que toda expresión de longitud  $n$  también satisface  $Q$ , luego en particular  $\theta$  satisface  $Q$  como queríamos ver.

Recíprocamente, supongamos que dada una expresión cualquiera  $\theta$ , si se satisface  $Q$  para todas las expresiones de longitud menor a la de  $\theta$ , entonces  $\theta$  satisface  $Q$ . Veamos que se cumple (1.4) para cada natural  $n \geq 1$ . Sea pues  $n \geq 1$  y supongamos que se satisface  $Q$  para cada expresión de longitud menor a  $n$ . Si no existen expresiones de longitud  $n$  es claro entonces que se satisface la tesis de (1.4). Por el contrario, si existen expresiones de longitud  $n$ , observemos entonces que dada  $\theta$  una cualquiera de ellas se tiene por hipótesis que se satisface  $Q$  para cada expresión de longitud menor a la de  $\theta$ , luego obtenemos que  $\theta$  satisface  $Q$ . Como el argumento es válido para cada expresión  $\theta$  de longitud  $n$  obtenemos que, en efecto,  $Q$  es cierta para cada expresión de longitud  $n$  tal y como queríamos ver.

Con todo, hemos visto que demostrar que  $Q$  es cierta para cada expresión de un lenguaje formal es equivalente a demostrar que dada una expresión arbitraria  $\theta$  del lenguaje formal, si  $Q$  es cierta para las expresiones de longitud menor a la de  $\theta$ , entonces  $\theta$  también satisface la propiedad  $Q$ . Así pues, como cualquier expresión puede ser únicamente de ocho tipos distintos, lo que haremos en la práctica será demostrar lo anterior para cada uno de estos ocho tipos, es decir, supondremos que  $Q$  se satisface para toda expresión de longitud menor a una expresión arbitraria  $\theta$  y, bajo esta hipótesis, demostraremos que  $\theta$  también satisface  $Q$  distinguiendo para ello ocho casos en función de los ocho posibles tipos que puede tomar  $\theta$ .

Una última consideración a tener en cuenta es que como para las variables y las constantes la hipótesis de esta última implicación es trivialmente cierta (pues no hay expresiones de longitud menor a la de una constante o una variable), en estos casos la implicación será cierta si, y solo si,  $Q$  es directamente cierta para variables y constantes, luego para estos dos casos deberemos demostrarlo directamente sin apoyarnos en ninguna hipótesis adicional.

---

<sup>4</sup> En este contexto tiene sentido hablar de una “expresión arbitraria”, pues podemos enumerarlas (ver Nota 2 pág. 36) y, por arbitraria, simplemente nos referimos a tomar alguna de dicha lista.

**Nota 2:** ... hipótesis de inducción ...

Si  $v$  y  $w$  coinciden sobre las variables libres de  $\theta$ , entonces coinciden sobre las variables libres de cada  $t_j$  (pues  $x$  está libre en  $\theta$  si, y solo si, está libre en algún  $t_j$ ). Por tanto, podemos aplicar la hipótesis de inducción al ser la longitud de cada término  $t_j$  menor que la de  $\theta$ .

**Nota 3:** ... hipótesis de inducción...

Al igual que en el caso anterior, si  $v$  y  $w$  coinciden sobre las variables libres de  $\theta$ , entonces coinciden sobre las variables libres de cada término  $t_j$  y se puede aplicar la hipótesis de inducción.

**Nota 4:** ... hipótesis de inducción...

Igual que en los casos anteriores, pues si  $v$  y  $w$  coinciden sobre las variables libres de  $\theta \equiv \neg\alpha$ , entonces coinciden sobre las variables libres de  $\alpha$ , ya que una variable está libre en  $\theta$  si, y solo si, lo está en  $\alpha$ .

**Nota 5:** ... hipótesis de inducción...

De nuevo, por la Definición 1.8, si  $v$  y  $w$  coinciden sobre las variables libres de  $\theta$ , entonces coinciden sobre las variables libres de  $\alpha$  y  $\beta$  (pues las variables libres de  $\theta$  son precisamente las de  $\alpha$  y  $\beta$ ).

**Nota 6:** ... En cualquier caso...

En el primer caso por considerar que  $v$  y  $w$  coinciden sobre las variables libres de  $\theta$  (pues si  $y$  está libre en  $\alpha$  e  $y \neq x$ , entonces está libre en  $\theta$ ) y en el segundo porque  $v_x^a(x) \equiv a \equiv w_x^a(x)$ .

**Nota 7:** ... syss ... además en tal caso son el mismo objeto  $a$ .

Si hay un único  $a$  en  $M$  tal que  $M \models \alpha[v_x^a]$ , entonces para ese mismo  $a$  se satisface que  $M \models \alpha[w_x^a]$ . Además, si existiera un  $b \neq a$  en  $M$  tal que  $M \models \alpha[v_x^b]$ , como  $M \models \alpha[v_x^b]$  syss  $M \models \alpha[v_x^b]$ , tendríamos que  $M \models \alpha[v_x^b]$  contradiciendo la unicidad de  $a$ .

Por tanto, existe un único  $a$  en  $M$  (y, por lo visto, el mismo que para  $v$ ) tal que  $M \models \alpha[w_x^a]$ . El recíproco es completamente análogo.

**Nota 8:** ... razonable ...

En efecto, la definición es razonable, pues, por el teorema anterior, la interpretación en cualquier modelo de la fórmula no depende de las variables “auxiliares”  $y_1, \dots, y_n$ , ya que no están libres en la fórmula definida.

Más aún, esto nos permite asegurar que aunque en la elección de las variables auxiliares se elijen las de menor índice que no están en  $\bigwedge x_1 \cdots x_n \alpha$ , realmente podríamos haber tomado cualquier otra elección para estas tal y como muestra el siguiente resultado (ver la Definición 1.14):

### Metateorema 1.3

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal,  $\alpha$  una fórmula cualquiera del lenguaje y  $x_1, \dots, x_n$  variables de  $\mathcal{L}$ . Si  $y_1, \dots, y_n$  y  $z_1, \dots, z_n$  son variables que no están en  $\bigwedge x_1 \cdots x_n \alpha$  y tales que  $y_i \neq y_j$  y  $z_i \neq z_j$  para  $i \neq j$ , entonces se tiene que para cualquier modelo  $M$  de  $\mathcal{L}$  se cumple que

$$M \models \left[ \bigvee y_1 \cdots y_n \bigwedge x_1 \cdots x_n (\alpha \leftrightarrow y_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge y_n = x_n) \leftrightarrow \bigvee z_1 \cdots z_n \bigwedge x_1 \cdots x_n (\alpha \leftrightarrow z_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge z_n = x_n) \right].$$

Si es  $v$  una valoración cualquiera se tiene por la [Nota 1](#) [pág. 23](#) que

$$M \models \left[ \bigvee y_1 \cdots y_n \bigwedge x_1 \cdots x_n (\alpha \leftrightarrow y_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge y_n = x_n) \leftrightarrow \bigvee z_1 \cdots z_n \bigwedge x_1 \cdots x_n (\alpha \leftrightarrow z_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge z_n = x_n) \right][v] \quad (1.5)$$

si, y solo si,

$$\begin{aligned} M \models \bigvee y_1 \cdots y_n \bigwedge x_1 \cdots x_n (\alpha \leftrightarrow y_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge y_n = x_n)[v] \text{ syys} \\ M \models \bigvee z_1 \cdots z_n \bigwedge x_1 \cdots x_n (\alpha \leftrightarrow z_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge z_n = x_n)[v]. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Siguiendo entonces punto por punto la demostración del Teorema 1.10 (donde únicamente se utiliza que  $y_1, \dots, y_n$  no están en  $\bigwedge x_1 \cdots x_n \alpha$  y no que sean las variables de menor índice cumpliendo esto), obtenemos que

$$M \models \bigvee y_1 \cdots y_n \bigwedge x_1 \cdots x_n (\alpha \leftrightarrow y_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge y_n = x_n)[v] \text{ syys}$$

existen unos únicos  $a_1, \dots, a_n$  en  $M$  tales que  $M \models \alpha [v_{x_1 \cdots x_n}^{a_1 \cdots a_n}]$

y

$$M \models \bigvee z_1 \cdots z_n \bigwedge x_1 \cdots x_n (\alpha \leftrightarrow z_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge z_n = x_n)[v] \text{ syys}$$

existen unos únicos  $a_1, \dots, a_n$  en  $M$  tales que  $M \models \alpha [v_{x_1 \cdots x_n}^{a_1 \cdots a_n}]$ .

Esto prueba que se cumple (1.6) y, por lo dicho, que también se cumple (1.5) como queríamos ver. 

Demostremos también la contrapartida sintáctica del resultado anterior (ver Capítulo 2).

### Metateorema 1.4

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal,  $\alpha$  una fórmula cualquiera del lenguaje y  $x_1, \dots, x_n$  variables de  $\mathcal{L}$ . Si  $y_1, \dots, y_n$  y  $z_1, \dots, z_n$  son variables que no están en  $\bigwedge x_1 \cdots x_n \alpha$  y

tales que  $y_i \neq y_j$  y  $z_i \neq z_j$  para  $i \neq j$ , entonces se tiene que

$$\vdash \left[ \bigvee y_1 \cdots y_n \bigwedge x_1 \cdots x_n (\alpha \leftrightarrow y_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge y_n = x_n) \leftrightarrow \right. \\ \left. \bigvee z_1 \cdots z_n \bigwedge x_1 \cdots x_n (\alpha \leftrightarrow z_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge z_n = x_n) \right].$$

Basta demostrar que si  $w_1, \dots, w_n$  son variables distintas dos a dos que no están en  $\bigwedge x_1 \cdots x_n \alpha$ , entonces se cumple que

$$\vdash \bigvee^1 x_1 \cdots x_n \alpha \leftrightarrow \bigvee w_1 \cdots w_n \bigwedge x_1 \cdots x_n (\alpha \leftrightarrow w_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge w_n = x_n),$$

pues es claro que esto implicará el resultado deseado.

Esto último se demuestra en el Teorema 2.9 3), luego podemos dar por concluida la demostración. 

Un último detalle a tener en cuenta es que al escribir  $y_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge y_n = x_n$  tenemos que considerar, de momento, que es una forma de abreviar la fórmula

$$y_1 = x_1 \wedge (y_2 = x_2 \wedge (\cdots (y_{n-2} = x_{n-2} \wedge (y_{n-1} = x_{n-1} \wedge y_n = x_n)) \cdots)).$$

Serán los Teorema 2.10 y 2.11 los que nos justifiquen que podemos obviar los paréntesis en este tipo de fórmulas (ver también la [Nota 3 pág. 72](#) y la [Nota 1 pág. 74](#)).

**Nota 9:**  $\dots \bigvee^1 x_1 \cdots x_n \alpha \dots$

Demostremos el siguiente resultado que nos dice cuando una variable está libre para el cuantificador existencial con unicidad:

### Metateorema 1.5

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal e  $y$  una variable de este. Se tiene que  $y$  está libre en  $\bigvee^1 x_1 \cdots x_n \alpha$  si, y solo si,  $y$  es distinto de cada  $x_1, \dots, x_n$  e  $y$  está libre en  $\alpha$ .

En efecto, si  $y$  está libre en

$$\bigvee^1 x_1 \cdots x_n \alpha \equiv \bigvee y_1 \cdots y_n \bigwedge x_1 \cdots x_n (\alpha \leftrightarrow y_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge y_n = x_n),$$

donde  $y_1, \dots, y_n$  son las variables de menor índice que no están en  $\bigvee x_1 \cdots x_n \alpha$ , entonces por todo lo visto es claro que  $y$  es distinto de cada  $x_1, \dots, x_n$  y que está libre en

$$\alpha \leftrightarrow y_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge y_n = x_n.$$

Como  $y$  es también distinto de cada  $y_1, \dots, y_n$ , se obtiene que  $y$  debe estar libre en  $\alpha$ .

Recíprocamente, si  $y$  está libre en  $\alpha$  y es distinto de cada  $x_1, \dots, x_n$ , entonces está libre en

$$\alpha \leftrightarrow y_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge y_n = x_n,$$

y como además  $y$  será también distinto de cada  $y_i$  (pues estos no están en  $\alpha$  mientras que  $y$  si lo está) concluimos que está libre en  $\bigvee^1 x_1 \cdots x_n \alpha$ . 

**Nota 10:** ... variables de menor índice ...

Siempre que se diga que ciertas variables  $y_1, \dots, y_n$  son “las variables de menor índice” que no están en cierta expresión  $\theta$ , se debe entender que se toman las  $n$  variables distintas de menor índice que no están en  $\theta$  (lo cual es posible, pues en  $\theta$  hay un número finito de variables y algorítmicamente es sencillo discernir cuales son) y se denotan por  $y_1, \dots, y_n$  ordenadas respecto a sus índices de menor a mayor, es decir,  $y_1$  es la de menor índice,  $y_2$  la segunda variable de menor índice, etc.

## Página 27

**Nota 1:** ... que equivale a ...

Esta equivalencia se da por lo demostrado en la [Nota 1](#) [pág. 23](#).

**Nota 2:** ... irrelevante. En total tenemos ...

Como  $v_{y_1 \dots y_n x_1 \dots x_n}^{a_1 \dots a_n b_1 \dots b_n}$  coincide con  $v_{x_1 \dots x_n}^{b_1 \dots b_n}$  en las variables libres de  $\alpha$  (pues  $y_1, \dots, y_n$  no están en  $\alpha$ ), por el Teorema 1.9 se tiene que

$$M \models \alpha \left[ v_{y_1 \dots y_n x_1 \dots x_n}^{a_1 \dots a_n b_1 \dots b_n} \right] \text{ syss } M \models \alpha \left[ v_{x_1 \dots x_n}^{b_1 \dots b_n} \right]. \quad (1.7)$$

Así, por (1.7) y lo visto en la demostración, se obtiene que  $M \models \bigvee_{x_1 \dots x_n}^1 \alpha[v]$  si, y solo si,

existen  $a_1, \dots, a_n$  en  $M$  tales que para cualesquiera  $b_1, \dots, b_n$  de  $M$  se cumple que

$$M \models \alpha \left[ v_{x_1 \dots x_n}^{b_1 \dots b_n} \right] \text{ syss } a_1 \equiv b_1, \dots, a_n \equiv b_n. \quad (1.8)$$

Por tanto, basta ver que esto último es equivalente a que

$$\text{existen unos únicos } a_1, \dots, a_n \text{ en } M \text{ tales que } M \models \alpha \left[ v_{x_1 \dots x_n}^{a_1 \dots a_n} \right], \quad (1.9)$$

para obtener la equivalencia buscada.

En primer lugar, si se satisface (1.8) tenemos que tomando  $b_1 \equiv a_1, \dots, b_n \equiv a_n$  (que están claramente en  $M$ ) se cumple la parte derecha de la equivalencia, luego debe cumplirse la parte izquierda y obtenemos que existen  $a_1, \dots, a_n$  en  $M$  tales que

$$M \models \alpha \left[ v_{x_1 \dots x_n}^{a_1 \dots a_n} \right].$$

Además, si existieran otros  $c_1, \dots, c_n$  en  $M$  tales que

$$M \models \alpha \left[ v_{x_1 \dots x_n}^{c_1 \dots c_n} \right],$$

entonces como por (1.8) se cumple (tomando  $b_1 \equiv c_1, \dots, b_n \equiv c_n$ ) que

$$M \models \alpha \left[ v_{x_1 \dots x_n}^{c_1 \dots c_n} \right] \text{ syss } a_1 \equiv c_1, \dots, a_n \equiv c_n,$$

obtenemos que, en efecto,  $c_i \equiv a_i$  para cada  $i = 1, \dots, n$  lo que nos da la unicidad.

Recíprocamente, si se satisface (1.9), dados  $b_1, \dots, b_n$  objetos cualesquiera de  $M$  tenemos:

- Si  $M \models \alpha [v_{x_1 \dots x_n}^{b_1 \dots b_n}]$ , por la unicidad se obtiene que  $a_1 \equiv b_1, \dots, a_n \equiv b_n$ .
- Si  $a_1 \equiv b_1, \dots, a_n \equiv b_n$ , entonces claramente  $M \models \alpha [v_{x_1 \dots x_n}^{b_1 \dots b_n}]$ .

Así pues, se cumple que para cualesquiera  $b_1, \dots, b_n$  en  $M$

$$M \models \alpha [v_{x_1 \dots x_n}^{b_1 \dots b_n}] \text{ syss } a_1 \equiv b_1, \dots, a_n \equiv b_n,$$

y con ello queda probado (1.8).

## Página 29

**Nota 1:** ... lógicamente equivalente ...

Sea  $M$  un modelo cualquiera de  $\mathcal{L}_a$  y  $v$  una valoración de dicho modelo.

Por una parte, tenemos que  $M \models \alpha[v]$  syss para cada objeto  $a$  en  $M$  se cumple que

$$M \models \underbrace{(\bigvee z x = y \cdot z \wedge y \neq 0' \rightarrow \bigvee w y = w \cdot 0'')}_{\beta} [v_y^a]. \quad (1.10)$$

Ahora, tenemos que  $M \models \beta[v_y^a]$  syss

$$\text{no } M \models \underbrace{\bigvee z x = y \cdot z \wedge y \neq 0'}_{\beta_1} [v_y^a] \text{ o } M \models \underbrace{\bigvee w y = w \cdot 0''}_{\beta_2} [v_y^a] \quad (1.11)$$

y para  $\beta_1$  y  $\beta_2$  se tiene que:

- $M \models \beta_1[v_y^a]$  syss  $M \models \bigvee z x = y \cdot z [v_y^a]$  y  $M \models y \neq 0' [v_y^a]$  syss existe un objeto  $b$  de  $M$  tal que  $M \models x = y \cdot z [v_{yz}^{ab}]$  y  $a \not\equiv 1$  syss existe un objeto  $b$  de  $M$  tal que  $v(x) \equiv a \cdot b$  y  $a \not\equiv 1$ .
- $M \models \beta_2[v_y^a]$  syss existe un objeto  $c$  de  $M$  tal que  $M \models y = w \cdot 0'' [v_{yw}^{ac}]$  syss existe un objeto  $c$  de  $M$  tal que  $a \equiv c \cdot 2$ .

Juntando (1.10), (1.11) y lo visto para  $\beta_1$  y  $\beta_2$  obtenemos finalmente que  $M \models \alpha[v]$  si, y solo si, para cada objeto  $a$  de  $M$  se cumple que o no existe ningún objeto  $b$  de  $M$  tal que  $v(x) \equiv a \cdot b$  o  $a \equiv 1$  o existe un objeto  $c$  de  $M$  tal que  $a \equiv c \cdot 2$ .

Por otro lado, para  $\alpha^*$  se tiene que  $M \models \alpha^*[v]$  syss para cada objeto  $a$  en  $M$  se cumple que

$$M \models \underbrace{(\bigvee z x = y \cdot z \wedge y \neq 0' \rightarrow \bigvee x y = x \cdot 0'')}_{\beta^*} [v_y^a],$$

luego syss para cada objeto  $a$  en  $M$  se cumple que

$$\text{no } M \models \bigvee z x = y \cdot z \wedge y \neq 0' [v_y^a] \text{ o } M \models \underbrace{\bigvee x y = x \cdot 0''}_{\beta_2^*} [v_y^a]. \quad (1.12)$$

La primera fórmula es exactamente  $\beta_1$  y para la segunda se tiene que:



- $M \models \beta_2^*[v_y^a]$  syss existe un objeto  $c$  de  $M$  tal que  $M \models y = x \cdot 0''[v_{yx}^{ac}]$  syss existe un objeto  $c$  de  $M$  tal que  $a \equiv c \cdot 2$ .

Juntando (1.12) con esto último y con lo visto para  $\alpha$  queda entonces claro que

$$M \models \alpha[v] \text{ syss } M \models \alpha^*[v]$$

tal y como queríamos ver. 

## Página 31

**Nota 1:** ... reglas siguientes ...

Como en el comentario tras la Definición 1.8 y lo dicho en la **Nota pág. 24**, la definición de sustitución queda completamente determinada para cada expresión por las reglas dadas.

Si  $\theta$  es una expresión sabemos que existe una sucesión  $\theta_0, \dots, \theta_m$  tal que  $\theta_m \equiv \theta$  y cada  $\theta_i$  depende únicamente de los  $\theta_j$  anteriores en el sentido de la Definición 1.5. Por tanto, si conocemos las sustituciones de  $\theta_0, \dots, \theta_{i-1}$ , usando las reglas de la Definición 1.11 (teniendo en cuenta que  $\theta_i$  será uno de los posibles ocho tipos de expresiones y que los términos o fórmulas que aparezcan en ella estarán entre  $\theta_0, \dots, \theta_{i-1}$ ) podemos determinar la sustitución de  $\theta_i$ . Como  $\theta_0$  es una variable o una constante (ver **Nota pág. 17**) siempre podemos empezar el proceso y determinar sucesivamente las sustituciones de  $\theta_0, \theta_1$ , etc. hasta llegar a  $\theta_m \equiv \theta$ .

## Página 32

**Nota 1:** ... obtiene fácilmente ...

En efecto:

- (i)  $S_x^t(\alpha \vee \beta) \equiv S_x^t(\neg\alpha \rightarrow \beta) \equiv S_x^t(\neg\alpha) \rightarrow S_x^t\beta \equiv \neg S_x^t\alpha \rightarrow S_x^t\beta \equiv S_x^t\alpha \vee S_x^t\beta$ .
- (ii)  $S_x^t(\alpha \wedge \beta) \equiv S_x^t\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \equiv \neg S_x^t(\neg\alpha \vee \neg\beta) \stackrel{(i)}{\equiv} \neg(S_x^t(\neg\alpha) \vee S_x^t(\neg\beta)) \equiv$   
 $\equiv \neg(\neg S_x^t\alpha \vee \neg S_x^t\beta) \equiv S_x^t\alpha \wedge S_x^t\beta$ .
- (iii)  $S_x^t(\alpha \leftrightarrow \beta) \equiv S_x^t((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)) \stackrel{(ii)}{\equiv} S_x^t(\alpha \rightarrow \beta) \wedge S_x^t(\beta \rightarrow \alpha) \equiv$   
 $\equiv (S_x^t\alpha \rightarrow S_x^t\beta) \wedge (S_x^t\beta \rightarrow S_x^t\alpha) \equiv S_x^t\alpha \leftrightarrow S_x^t\beta$ .
- (iv)  $S_x^t\forall x_i\alpha \equiv S_x^t\neg\bigwedge x_i\neg\alpha \equiv \neg S_x^t\bigwedge x_i\neg\alpha$ , luego distinguimos los distintos casos:

- Si  $x$  no está libre en  $\forall x_i\alpha$  entonces no está libre en  $\bigwedge x_i\neg\alpha$  y, por lo anterior, se obtiene que

$$S_x^t\forall x_i\alpha \equiv \neg\bigwedge x_i\neg\alpha \equiv \forall x_i\alpha$$

- Si  $x$  está libre en  $\forall x_i\alpha$  entonces  $x \neq x_i$  y  $x$  está libre en  $\alpha$ , luego en  $\neg\alpha$ , y así obtenemos que  $x$  está libre en  $\bigwedge x_i\neg\alpha$ . Con esto, si:

- $x_i$  no está libre en  $t$  obtenemos que

$$S_x^t \bigvee x_i \alpha \equiv \neg \bigwedge x_i S_x^t \neg \alpha \equiv \neg \bigwedge x_i \neg S_x^t \alpha \equiv \bigvee x_i S_x^t \alpha.$$

- $x_i$  está libre en  $t$  obtenemos que

$$S_x^t \bigvee x_i \alpha \equiv \neg \bigwedge x_j S_x^t S_{x_i}^{x_j} \neg \alpha \equiv \neg \bigwedge x_j \neg S_x^t S_{x_i}^{x_j} \alpha \equiv \bigvee x_j S_x^t S_{x_i}^{x_j} \alpha.$$

donde  $x_j$  es la variable de menor índice que no está en  $\bigwedge x_i \neg \alpha$  ni en  $t$ , luego que no está en  $\bigvee x_i \alpha$  ni en  $t$ .

Con esto concluimos la demostración de los cuatro casos.



## Página 33

**Nota 1:** ... syss ...

Recuérdese que si  $x \neq y$ , entonces  $v_{xy}^{ab}$  coincide con  $v_{yx}^{ba}$  como se vio en la [Nota 1](#) [pág. 20](#).

## Página 34

**Nota 1:** ... hip. de ind. ...

La hipótesis de inducción se aplica a la fórmula  $S_y^z \alpha$ , pues tiene la misma longitud que  $\alpha$ , luego menor que  $\theta$ , como muestra el siguiente resultado:

### Metateorema 1.6

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal,  $\theta$  una expresión en  $\mathcal{L}$  y  $x, y$  dos variables. Entonces, la longitud de  $S_x^y \theta$  es la misma que la de  $\theta$ .

Probémoslo por inducción en la longitud de  $\theta$ :

- Si  $\theta \equiv x_i$ , entonces se tiene que, en cualquier caso,  $S_x^y \theta$  será una variable, luego su longitud será uno al igual que la de  $\theta$ .
- Si  $\theta \equiv c_i$ , entonces  $S_x^y \theta \equiv \theta$  y el resultado está claro.
- Si  $\theta \equiv R_i^n t_1 \cdots t_n$ , entonces por hipótesis de inducción se tiene que la longitud de  $S_x^y t_i$  es la misma que la de  $t_i$ , digamos  $m_i$ , para cada  $i = 1, \dots, n$ . Por tanto, la longitud de  $\theta$  es  $m_1 + \cdots + m_n + 1$  y la de

$$S_x^y \theta \equiv R_i^n S_x^y t_1 \cdots S_x^y t_n$$

será también  $m_1 + \cdots + m_n + 1$  como queríamos ver.

- Si  $\theta \equiv f_i^n t_1 \cdots t_n$  se prueba de manera completamente análoga al caso anterior.

- Si  $\theta \equiv \neg\alpha$ , por hipótesis de inducción la longitud de  $S_x^y\alpha$  es igual a la de  $\alpha$ , digamos  $n$ , luego la de  $\theta$  es  $n + 1$  y la de

$$S_x^y\theta \equiv \neg S_x^y\alpha$$

será también  $n + 1$  como queríamos ver.

- Si  $\theta \equiv \alpha \rightarrow \beta$ , por hipótesis de inducción la longitud de  $S_x^y\alpha$  es igual a la de  $\alpha$ , digamos  $n$ , y la de  $S_x^y\beta$  es igual a la de  $\beta$ , digamos  $m$ , luego la de  $\theta$  es  $n + m + 1$  y la de

$$S_x^y\theta \equiv S_x^y\alpha \rightarrow S_x^y\beta$$

será también  $n + m + 1$  como queríamos ver.

- Si  $\theta \equiv \bigwedge x_i \alpha$  y  $x$  está en  $\theta$  tenemos tres casos:
  1. Si  $x$  no está libre en  $\theta$ , entonces  $S_x^y\theta \equiv \theta$  y el resultado es claro.
  2. Si  $x$  está libre en  $\theta$  y  $x_i \neq y$  (es decir,  $x_i$  no está libre en  $y$ ), entonces se tiene que

$$S_x^y\theta \equiv \bigwedge x_i S_x^y\alpha. \quad (1.13)$$

Como por hipótesis de inducción la longitud de  $\alpha$  es igual a la de  $S_x^y\alpha$ , digamos  $n$ , se tiene que la longitud de  $\theta$  será  $n + 2$  y, por (1.13), la de  $S_x^y\theta$  es también  $n + 2$  como queríamos ver.

3. Si  $x$  está libre en  $\theta$  y  $x_i \equiv y$  (es decir,  $x_i$  está libre en  $y$ ), entonces se tiene que

$$S_x^y\theta \equiv \bigwedge x_j S_x^y S_{x_i}^{x_j} \alpha \quad (1.14)$$

donde  $x_j$  es la variable de menor índice que no está en  $\theta$  y es distinta de  $y$ . Por hipótesis de inducción la longitud de  $S_{x_i}^{x_j}\alpha$  es igual a la de  $\alpha$ , digamos  $n$ , luego la de  $\theta$  es  $n + 2$ . Además, como la longitud de  $S_{x_i}^{x_j}\alpha$  es menor que la de  $\theta$ , podemos aplicarle también la hipótesis de inducción y obtener que tiene la misma longitud que  $S_x^y S_{x_i}^{x_j}\alpha$ , que por tanto tiene longitud  $n$ , y por (1.14) concluimos que la longitud de  $S_x^y\theta$  es  $n + 2$  con lo que, en efecto, es igual a la de  $\theta$ .

- Si  $\theta \equiv x_i|\alpha$  se prueba de manera completamente análoga al caso anterior.

Esto finaliza la inducción y con ello la demostración. 

**Nota 2:** ... syss ...

Se tiene que  $x \neq z$ , pues  $x$  está libre en  $\bigwedge y \alpha$  mientras que  $z$  no lo está, luego la equivalencia es clara en virtud de la [Nota 1](#) pág. 20.

**Nota 3:** ... syss (hip. de ind.) ...

Realmente, por la hipótesis de inducción se obtiene que

$$M \models S_y^z \alpha \left[ v_x^{M(t)[v]a} \right]_z \text{ syss } M \models \alpha \left[ \begin{array}{cc} M(t)[v]aM(z) & \left[ v_x^{M(t)[v]a} \right]_z \\ v_x & zy \end{array} \right],$$

pero como es claro que

$$M(z) \left[ v_x^{M(t)[v]a} \right]_z \equiv v_x^{M(t)[v]a}(z) \equiv a,$$

se obtiene que

$$M \models S_y^z \alpha \left[ v_x^{M(t)[v]a} \right]_z \text{ syss } M \models \alpha \left[ v_x^{M(t)[v]aa} \right]_{zy},$$

tal como queríamos ver.

**Nota 4:** ... syss (1.9) ...

Observemos que  $z$  no está libre en  $\alpha$ , pues, de hecho, ni siquiera está en  $\wedge y \alpha$ , luego las valoraciones  $v_x^{M(t)[v]aa}_{zy}$  y  $v_x^{M(t)[v]a}_y$  coinciden en las variables libres de  $\alpha$  (pues solo pueden ser distintas en  $z$ ) y, por el Teorema 1.9, se tiene la equivalencia deseada.

**Nota 5:** ... Esto no es casual ...

El haber elegido la variable de menor índice que cumple ciertas propiedades para los casos donde la sustitución lo requería es simplemente una forma de fijar que variables auxiliares usaremos para que la definición de sustitución sea precisa y sin ambigüedades. Sin embargo, análogo a lo que vimos en la **Nota 8** pág. 26, el siguiente resultado muestra que, realmente, podríamos haber fijado cualquier otro criterio para dichas variables (ver la Definición 1.14):

### Metateorema 1.7

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal,  $\alpha$  una fórmula cualquiera del lenguaje,  $t$  un término,  $x$  e  $y$  variables cualesquiera y  $z, w$  dos variables que no están en  $\wedge x \alpha, t$  ni en  $y$ . Entonces para cualquier modelo  $M$  de  $\mathcal{L}$  se cumple que:

- (i)  $M \models \wedge z S_y^t S_x^z \alpha \leftrightarrow \wedge w S_y^t S_x^w \alpha.$
- (ii)  $M \models z \mid S_y^t S_x^z \alpha = w \mid S_y^t S_x^w \alpha.$

Sea  $v$  una valoración fija y **veamos en primer lugar (i)**, es decir, que

$$M \models \left( \wedge z S_y^t S_x^z \alpha \leftrightarrow \wedge w S_y^t S_x^w \alpha \right) [v]. \quad (1.15)$$

Tenemos que, por la **Nota 1** pág. 23, (1.15) se satisface si, y solo si,

$$M \models \wedge z S_y^t S_x^z \alpha[v] \text{ syss } M \models \wedge w S_y^t S_x^w \alpha[v]. \quad (1.16)$$

Ahora bien,  $M \models \bigwedge z S_y^t S_x^z \alpha[v]$  syss para cada  $a$  de  $M$  se cumple que

$$M \models S_y^t S_x^z \alpha[v_z^a],$$

lo cual ocurre por el Teorema 1.12 syss para cada  $a$  de  $M$  se cumple que

$$M \models \alpha \left[ \begin{array}{c} aM(t)[v_z^a] M(z) \left[ v_{zy}^{aM(t)[v_z^a]} \right] \\ v_{zy} \quad x \end{array} \right]. \quad (1.17)$$

Ahora, como  $z$  no está libre en  $t$ , por el Teorema 1.9 se tiene que

$$M(t)[v] \equiv M(t)[v_z^a],$$

y como también es

$$M(z) \left[ v_{zy}^{aM(t)[v_z^a]} \right] \equiv v_{zy}^{aM(t)[v_z^a]}(z) \equiv a,$$

concluimos entonces que (1.17) es equivalente a

$$M \models \alpha \left[ v_{zy}^{aM(t)[v]a} \right]. \quad (1.18)$$

Más aún, como  $z$  no está en  $\alpha$ , usando de nuevo el Teorema 1.9 obtenemos que (1.18) es equivalente a

$$M \models \alpha \left[ v_y^{M(t)[v]a} \right]. \quad (1.19)$$

Con todo,

$$M \models \bigwedge z S_y^t S_x^z \alpha[v] \text{ syss para cada } a \text{ de } M \text{ se cumple (1.19).} \quad (1.20)$$

Por otra parte,  $M \models \bigwedge w S_y^t S_x^w \alpha[v]$  syss para cada  $a$  de  $M$  se cumple que

$$M \models S_y^t S_x^w \alpha[v_w^a],$$

y, como  $w$  tampoco está en  $t$  ni en  $\alpha$ , con un razonamiento análogo a lo visto (basta cambiar  $z$  por  $w$ ) se concluye que

$$M \models \bigwedge w S_y^t S_x^w \alpha[v] \text{ syss para cada } a \text{ de } M \text{ se cumple (1.19).} \quad (1.21)$$

Por (1.20) y (1.21) se obtiene que se satisface (1.16) y con ello concluye la prueba de (i).

**Para probar (ii)** basta ver que para cualquier valoración  $v$  se cumple que

$$M \left( z \left| S_y^t S_x^z \alpha \right. \right) [v] \equiv M \left( w \left| S_y^t S_x^w \alpha \right. \right) [v]. \quad (1.22)$$

Observemos primero que por lo visto en la demostración de (i) se tiene que para cualquier  $a$  de  $M$  se cumple que

$$M \models S_y^t S_x^z \alpha[v_z^a] \text{ syss se cumple (1.19) syss } M \models S_y^t S_x^w \alpha[v_w^a],$$

es decir,

$$\text{para cualquier } a \text{ de } M \text{ se cumple que } M \models S_y^t S_x^z \alpha[v_z^a] \text{ syss } M \models S_y^t S_x^w \alpha[v_w^a]. \quad (1.23)$$

Distingamos entonces dos casos:

1. Si existe un único  $a$  en  $M$  tal que  $M \models S_y^t S_x^z \alpha[v_z^a]$ , entonces se tiene que

$$M(z \mid S_y^t S_x^z \alpha)[v] \equiv a.$$

Ahora bien, por (1.23) tenemos que también se cumple que

$$M \models S_y^t S_x^w \alpha[v_w^a]$$

y, más aún, dicho  $a$  es el único objeto de  $M$  para el que se satisface lo anterior. En efecto, si existiera otro objeto  $b$  de  $M$  para el cual se cumpliera que  $M \models S_y^t S_x^w \alpha[v_w^b]$ , entonces por (1.23) también se satisface que  $M \models S_y^t S_x^z \alpha[v_z^b]$  y tenemos una contradicción con la unicidad.

Con todo, obtenemos que

$$M(w \mid S_y^t S_x^w \alpha)[v] \equiv a$$

y queda probada la identidad buscada.

2. Por otra parte, si no existe un único  $a$  en  $M$  tal que  $M \models S_y^t S_x^z \alpha[v_z^a]$ , entonces se tiene que

$$M(z \mid S_y^t S_x^z \alpha)[v] \equiv d$$

donde  $d$  es la descripción impropia.

Usando (1.23) de forma análoga al caso anterior se obtiene que tampoco existe un único  $a$  en  $M$  tal que  $M \models S_y^t S_x^w \alpha[v_w^a]$  y, por tanto, que

$$M(w \mid S_y^t S_x^w \alpha)[v] \equiv d,$$

obteniendo nuevamente la identidad buscada.

Como los dos casos anteriores abarcan todas las posibilidades queda probado (1.22) y con ello el teorema. 

Demostremos también la contrapartida sintáctica del resultado anterior (ver Capítulo 2), pero antes necesitaremos el siguiente resultado previo:

### Metateorema 1.8

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal,  $t_1, t_2$  dos términos de dicho lenguaje y  $w$  una variable que no está en ninguno de los términos. Se cumple que

$$w = t_1 \leftrightarrow w = t_2 \vdash t_1 = t_2.$$

En la deducción únicamente se generaliza respecto a  $w$ .

En efecto tenemos que

|     |                                                                                         |                     |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|
| (1) | $w = t_1 \leftrightarrow w = t_2$                                                       | Premisa             |
| (2) | $\wedge w(w = t_1 \leftrightarrow w = t_2)$                                             | IG 1                |
| (3) | $S_w^{t_1}(w = t_1 \leftrightarrow w = t_2) \equiv t_1 = t_1 \leftrightarrow t_1 = t_2$ | EG 2 (Teo. 1.13 2)) |
| (4) | $t_1 = t_1$                                                                             | I                   |
| (5) | $t_1 = t_2$                                                                             | SE 3, 4             |

que es la deducción buscada. 

**Metateorema 1.9**

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal,  $\alpha$  una fórmula cualquiera del lenguaje,  $t$  un término,  $x$  e  $y$  variables cualesquiera y  $z, w$  dos variables que no están libres en  $\bigwedge x \alpha$ ,  $t$  ni en  $y$ . Entonces se cumple que:

$$(i) \vdash \bigwedge z S_y^t S_x^z \alpha \leftrightarrow \bigwedge w S_y^t S_x^w \alpha.$$

$$(ii) \vdash z \mid S_y^t S_x^z \alpha = w \mid S_y^t S_x^w \alpha.$$

En primer lugar, observemos que en la regla de equivalencia entre términos idénticos se generaliza únicamente dentro de teoremas lógicos, por lo que es posible aplicar esta regla en cualquier contexto sin importar las restricciones sobre variables respecto a las cuales se puede generalizar (ver [Nota 2](#) pág. 72).

Ahora, si  $z \equiv w$  el resultado es trivialmente cierto, luego podemos considerar que son variables distintas.

Con esto en cuenta obtenemos que

$$\vdash z = w \rightarrow (S_y^t S_x^z \alpha \leftrightarrow S_y^t S_x^w \alpha). \quad (1.24)$$

En efecto, se tiene que:

|      |                                                                                                                  |                           |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| (1)  | $z = w$                                                                                                          | Hipótesis                 |
| (2)  | $S_x^z \alpha$                                                                                                   | Hipótesis                 |
| (3)  | $w = z$                                                                                                          | SI 1                      |
| (4)  | $S_x^w \alpha$                                                                                                   | ETI 2, 3                  |
| (5)  | $S_x^z \alpha \rightarrow S_x^w \alpha$                                                                          | Tma. deducción            |
| (6)  | $S_x^w \alpha$                                                                                                   | Hipótesis                 |
| (7)  | $S_x^z \alpha$                                                                                                   | ETI 1, 6                  |
| (8)  | $S_x^w \alpha \rightarrow S_x^z \alpha$                                                                          | Tma. deducción            |
| (9)  | $S_x^z \alpha \leftrightarrow S_x^w \alpha$                                                                      | IB 5, 8                   |
| (10) | $\bigwedge y (S_x^z \alpha \leftrightarrow S_x^w \alpha)$                                                        | IG 9 ( $y$ no libre en 1) |
| (11) | $S_y^t (S_x^z \alpha \leftrightarrow S_x^w \alpha) \equiv S_y^t S_x^z \alpha \leftrightarrow S_y^t S_x^w \alpha$ | EG 10                     |
| (12) | $z = w \rightarrow (S_y^t S_x^z \alpha \leftrightarrow S_y^t S_x^w \alpha)$                                      | Tma. deducción            |

A partir de (1.24) podemos obtener

$$\vdash S_z^w S_y^t S_x^z \alpha \leftrightarrow S_z^w S_y^t S_x^w \alpha \quad (1.25)$$

sin más que generalizar respecto a  $z$ , eliminar el generalizador por  $w$  y utilizar MP junto al teorema lógico  $w = w$ .

Por otro lado, como  $z$  no está libre en  $S_y^t S_x^w \alpha$ <sup>5</sup> por el Teorema 1.13 2) se obtiene que

$$S_z^w S_y^t S_x^w \alpha \equiv S_y^t S_x^w \alpha,$$

y de (1.25) obtenemos que

$$\vdash S_z^w S_y^t S_x^z \alpha \leftrightarrow S_y^t S_x^w \alpha. \quad (1.26)$$

<sup>5</sup> Si lo estuviera, como no está libre en  $t$  ni en  $w$ , por el Teorema 1.13 3) tendríamos que es distinta de  $x$  y está libre en  $\alpha$ , luego estaría libre en  $\bigwedge x \alpha$ .

Con todo, tenemos

|     |                                                                             |                           |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| (1) | $\bigwedge z S_y^t S_x^z \alpha$                                            | Hipótesis                 |
| (2) | $S_z^w S_y^t S_x^z \alpha$                                                  | EG 1                      |
| (3) | $S_y^t S_x^w \alpha$                                                        | SE 2, (1.26)              |
| (4) | $\bigwedge w S_y^t S_x^w \alpha$                                            | IG 3 ( $w$ no libre en 1) |
| (5) | $\bigwedge z S_y^t S_x^z \alpha \rightarrow \bigwedge w S_y^t S_x^w \alpha$ | Tma. deducción            |

Esto prueba que

$$\vdash \bigwedge z S_y^t S_x^z \alpha \rightarrow \bigwedge w S_y^t S_x^w \alpha,$$

y de forma análoga (generalizando respecto de  $w$  en lugar de  $z$  en (1.24), etc.) se obtiene que

$$\vdash \bigwedge w S_y^t S_x^w \alpha \rightarrow \bigwedge z S_y^t S_x^z \alpha,$$

con lo que por IB obtenemos (i).

**Para demostrar (ii)** tomemos  $p$  una variable que no está en  $t$  ni en  $\alpha$  y distinta de  $x, y, z$  y  $w$ , y veamos primero que

$$\vdash \bigwedge z (S_y^t S_x^z \alpha \leftrightarrow z = p) \leftrightarrow \bigwedge w (S_y^t S_x^w \alpha \leftrightarrow w = p) \quad (1.27)$$

En efecto, tenemos que

|      |                                                                                                                             |                            |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|
| (1)  | $\bigwedge z (S_y^t S_x^z \alpha \leftrightarrow z = p)$                                                                    | Hipótesis                  |
| (2)  | $S_z^w S_y^t S_x^z \alpha \leftrightarrow w = p$                                                                            | EG 1                       |
| (3)  | $S_y^t S_x^w \alpha$                                                                                                        | Hipótesis                  |
| (4)  | $S_z^w S_y^t S_x^z \alpha$                                                                                                  | SE 3, (1.26)               |
| (5)  | $w = p$                                                                                                                     | SE 2, 4                    |
| (6)  | $S_y^t S_x^w \alpha \rightarrow w = p$                                                                                      | Tma. deducción             |
| (7)  | $w = p$                                                                                                                     | Hipótesis                  |
| (8)  | $S_z^w S_y^t S_x^z \alpha$                                                                                                  | SE 2, 7                    |
| (9)  | $S_y^t S_x^w \alpha$                                                                                                        | SE 8, (1.26)               |
| (10) | $w = p \rightarrow S_y^t S_x^w \alpha$                                                                                      | Tma. deducción             |
| (11) | $S_y^t S_x^w \alpha \leftrightarrow w = p$                                                                                  | IB 6, 10                   |
| (12) | $\bigwedge w (S_y^t S_x^w \alpha \leftrightarrow w = p)$                                                                    | IG 11 ( $w$ no libre en 1) |
| (12) | $\bigwedge z (S_y^t S_x^z \alpha \leftrightarrow z = p) \rightarrow \bigwedge w (S_y^t S_x^w \alpha \leftrightarrow w = p)$ | Tma. deducción             |

De forma completamente análoga se prueba la otra implicación y por IB se obtiene (1.27).

Claramente, por el Teorema 2.11 y la regla (SI), de (1.27) también se obtiene que

$$\vdash \bigwedge z (S_y^t S_x^z \alpha \leftrightarrow p = z) \leftrightarrow \bigwedge w (S_y^t S_x^w \alpha \leftrightarrow p = w). \quad (1.28)$$

Tenemos también que

$$\vdash \bigvee^1 z S_y^t S_x^z \alpha \leftrightarrow \bigvee^1 w S_y^t S_x^w \alpha \quad (1.29)$$

Por el Teorema 2.9 3) tenemos que

$$\begin{aligned} &\vdash \bigvee^1 z S_y^t S_x^z \alpha \leftrightarrow \bigvee p \bigwedge z (S_y^t S_x^z \alpha \leftrightarrow p = z), \\ &\vdash \bigvee^1 w S_y^t S_x^w \alpha \leftrightarrow \bigvee p \bigwedge w (S_y^t S_x^w \alpha \leftrightarrow p = w). \end{aligned}$$



Usando entonces el Teorema 2.11 7) junto a (1.28) (generalizando primero respecto a  $p$ ) se obtiene lo deseado.

Ahora ya estamos listos para demostrar (ii) para lo cual, en virtud del Metateorema 1.8, basta ver que

$$p = z \mid S_y^t S_x^z \alpha \leftrightarrow p = w \mid S_y^t S_x^w \alpha . \quad (1.30)$$

Por el Teorema 3.33 tenemos que, tomando cualquier variable  $q$ , se cumplen

$$\begin{aligned} \vdash p = z \mid S_y^t S_x^z \alpha &\leftrightarrow \bigwedge z (S_y^t S_x^z \alpha \leftrightarrow z = p) \vee \left( \neg \bigvee^1 z S_y^t S_x^z \alpha \wedge p = q \mid (q = q) \right), \\ \vdash p = w \mid S_y^t S_x^w \alpha &\leftrightarrow \bigwedge w (S_y^t S_x^w \alpha \leftrightarrow w = p) \vee \left( \neg \bigvee^1 w S_y^t S_x^w \alpha \wedge p = q \mid (q = q) \right). \end{aligned}$$

Utilizando entonces el Teorema 2.11 junto a (1.27) y (1.29) se obtiene (1.30) y con ello finalizamos la demostración. 

## Página 35

**Nota 1: Teorema 1.13 ... DEMOSTRACIÓN ...**

### Metateorema 1.10: Teorema 1.13

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal,  $\theta$  una expresión de dicho lenguaje,  $t$  un término y  $x$  e  $y$  variables. Se cumplen:

1.  $S_x^x \theta \equiv \theta$ .
2. Si  $x$  no está libre en  $\theta$ , entonces  $S_x^t \theta \equiv \theta$ .
3. Una variable  $y$  está libre en  $S_x^t \theta$  syss o bien  $y$  está libre en  $\theta$  e  $y \neq x$ , o bien  $x$  está libre en  $\theta$  e  $y$  está libre en  $t$ .
4. Si  $y$  no está en  $\theta$  entonces  $S_y^x S_x^y \theta \equiv \theta$ .
5. Si  $x$  está libre en  $\theta$ , entonces las variables libres de  $t$  y las variables libres de  $\theta$  distintas de  $x$  están libres en  $S_x^t \theta$ .
6. Si  $c$  es una constante (o una variable que no está en  $\theta$ ), entonces  $y$  está ligada en  $S_x^c \theta$  syss  $y$  está ligada en  $\theta$ .
7. Si  $y$  no está en  $\theta$  y ninguna variable de  $\theta$  está libre en  $t$ , entonces  $S_y^t S_x^y \theta \equiv S_x^t \theta$ .
8. Si  $y$  está en  $t$  y  $x$  está libre en  $\theta$ , entonces  $y$  está en  $S_x^t \theta$ .

**Demostraremos 1)** por inducción sobre la longitud de  $\theta$ :

- Si  $\theta \equiv x_i$ , entonces si  $x \equiv x_i$  se tiene que

$$S_x^x \theta \equiv x \equiv \theta,$$

y si  $x \neq x_i$  directamente  $S_x^x \theta \equiv \theta$ , luego en cualquier caso se tiene lo deseado.

- Si  $\theta \equiv c_i$ , es claro que  $S_x^x \theta \equiv \theta$ .
- Si  $\theta \equiv R_i^n t_1 \cdots t_n$ , por hipótesis de inducción tenemos que  $S_x^x t_i \equiv t_i$  para cada  $i = 1, \dots, n$ , luego

$$S_x^x \theta \equiv R_i^n S_x^x t_1 \cdots S_x^x t_n \equiv R_i^n t_1 \cdots t_n \equiv \theta.$$

- Si  $\theta \equiv f_i^n t_1 \cdots t_n$  es análogo al caso anterior.
- Si  $\theta \equiv \neg \alpha$ , por hipótesis de inducción tenemos que  $S_x^x \alpha \equiv \alpha$ , luego

$$S_x^x \theta \equiv \neg S_x^x \alpha \equiv \neg \alpha \equiv \theta.$$

- Si  $\theta \equiv \alpha \rightarrow \beta$ , por hipótesis de inducción tenemos que  $S_x^x \alpha \equiv \alpha$  y  $S_x^x \beta \equiv \beta$ , luego

$$S_x^x \theta \equiv S_x^x \alpha \rightarrow S_x^x \beta \equiv \alpha \rightarrow \beta \equiv \theta.$$

- Si  $\theta \equiv \bigwedge x_i \alpha$ , observemos que si  $x$  está libre en  $\theta$  entonces  $x \neq x_i$ , luego  $x_i$  no está en  $x$  y el tercer caso de la sustitución para el generalizador no puede darse. Esto nos deja dos casos:

1. Si  $x$  no está libre en  $\theta$ , entonces es claro que  $S_x^x \theta \equiv \theta$ .
2. Si  $x$  está libre en  $\theta$ , entonces como por hipótesis de inducción tenemos que  $S_x^x \alpha \equiv \alpha$  se obtiene que

$$S_x^x \theta \equiv \bigwedge x_i S_x^x \alpha \equiv \bigwedge x_i \alpha \equiv \theta.$$

En cualquier caso se obtiene lo deseado.

- Si  $\theta \equiv x_i | \alpha$  es análogo al caso anterior.

**Demostraremos 2)** por inducción sobre la longitud de  $\theta$ :

- Si  $\theta \equiv x_i$ , como  $x$  no está libre en  $\theta$  se tiene que  $x \neq x_i$  y es claro que  $S_x^t \theta \equiv \theta$ .
- Si  $\theta \equiv c_i$ , es claro que  $S_x^t \theta \equiv \theta$ .
- Si  $\theta \equiv R_i^n t_1 \cdots t_n$ , como  $x$  no está libre en  $\theta$  se tiene que no lo está en ningún  $t_i$ , luego por hipótesis de inducción tenemos que  $S_x^t t_i \equiv t_i$  para cada  $i = 1, \dots, n$ . Con esto es claro que

$$S_x^t \theta \equiv R_i^n S_x^t t_1 \cdots S_x^t t_n \equiv R_i^n t_1 \cdots t_n \equiv \theta.$$

- Si  $\theta \equiv f_i^n t_1 \cdots t_n$  es análogo al caso anterior.
- Si  $\theta \equiv \neg \alpha$ , como  $x$  no está libre en  $\theta$  se tiene que no lo está en  $\alpha$  y, por hipótesis de inducción, se tiene que  $S_x^t \alpha \equiv \alpha$ . Con esto es claro que

$$S_x^t \theta \equiv \neg S_x^t \alpha \equiv \neg \alpha \equiv \theta.$$

- Si  $\theta \equiv \alpha \rightarrow \beta$ , como  $x$  no está libre en  $\theta$  se tiene que no lo está en  $\alpha$  ni en  $\beta$  y, por hipótesis de inducción, se tiene que  $S_x^t \alpha \equiv \alpha$  y  $S_x^t \beta \equiv \beta$ . Con esto es claro que

$$S_x^t \theta \equiv S_x^t \alpha \rightarrow S_x^t \beta \equiv \alpha \rightarrow \beta \equiv \theta.$$

- Si  $\theta \equiv \bigwedge x_i \alpha$  es claro por definición que  $S_x^t \theta \equiv \theta$ .
- Si  $\theta \equiv x_i | \alpha$  es análogo al caso anterior.

**Demostremos 3)** por inducción sobre la longitud de  $\theta$ :

- Si  $\theta \equiv x_i$  tenemos:
  - Si  $x \equiv x_i$  entonces  $S_x^t \theta \equiv t$  y, si  $y$  está libre en  $S_x^t \theta$ , entonces está libre en  $t$  y  $x$  está libre en  $\theta$ . Recíprocamente, si se cumple la disyunción, como no puede darse a la vez que  $y \neq x$  e  $y$  esté libre en  $\theta$  concluimos que  $y$  está libre en  $t$ , luego en  $S_x^t \theta$ .
  - Si  $x \neq x_i$  entonces  $S_x^t \theta \equiv \theta$ , luego si  $y$  está libre en  $S_x^t \theta$ , entonces  $y \equiv \theta$  y es claro que  $y$  está libre en  $\theta$  e  $y \neq x$ . Recíprocamente, si la disyunción es cierta, como  $x$  no está libre en  $\theta$  debe ser que  $y$  está libre en  $\theta$ , luego en  $S_x^t \theta$ .
- Si  $\theta \equiv c_i$  el resultado es trivial porque  $S_x^t \theta \equiv \theta$  y ninguna variable está libre en  $\theta$ .
- Si  $\theta \equiv R_i^n t_1 \cdots t_n$ , entonces se tiene que  $S_x^t \theta \equiv R_i^n S_x^t t_1 \cdots S_x^t t_n$  y:
  - Si  $y$  está libre en  $S_x^t \theta$ , entonces lo está en algún  $S_x^t t_i$  y, por hipótesis de inducción, o bien está libre en  $t_i$ , luego en  $\theta$ , e  $y \neq x$ ; o bien  $x$  está libre en  $t_i$ , luego en  $\theta$ , e  $y$  está libre en  $t$ .
  - Si  $y$  está libre en  $\theta$  e  $y \neq x$ , entonces se tiene que  $y$  está libre en algún  $t_i$  siendo  $y \neq x$ , luego por hipótesis de inducción obtenemos que  $y$  está libre en  $S_x^t t_i$  y esto implica que lo estará en  $S_x^t \theta$ .
  - Si  $x$  está libre en  $\theta$  e  $y$  lo está en  $t$ , entonces se tiene que  $x$  está libre en algún  $t_i$  estando  $y$  libre en  $t$ , luego por hipótesis de inducción obtenemos que  $y$  está libre en  $S_x^t t_i$  y esto implica que lo estará en  $S_x^t \theta$ .
- Si  $\theta \equiv f_i^n t_1 \cdots t_n$  es análogo al caso anterior.
- Si  $\theta \equiv \neg \alpha$ , entonces  $S_x^t \theta \equiv \neg S_x^t \alpha$ , luego se tiene que  $y$  está libre en  $S_x^t \theta$  syss está libre en  $S_x^t \alpha$ . Por hipótesis de inducción, esto último ocurre syss  $y$  está libre en  $\alpha$  e  $y \neq x$  o  $x$  está libre en  $\alpha$  e  $y$  lo está en  $t$ , y esto se da syss  $y$  está libre en  $\theta$  e  $y \neq x$  o  $x$  está libre en  $\theta$  e  $y$  lo está en  $t$ .
- Si  $\theta \equiv \alpha \rightarrow \beta$ , entonces  $S_x^t \theta \equiv S_x^t \alpha \rightarrow S_x^t \beta$  y:
  - Si  $y$  está libre en  $S_x^t \theta$ , entonces lo está en  $S_x^t \alpha$  o en  $S_x^t \beta$  (supondremos lo primero, pues el otro caso es análogo). Por hipótesis de inducción se tiene entonces que  $y$  está libre en  $\alpha$ , luego en  $\theta$ , e  $y \neq x$ , o bien  $x$  está libre en  $\alpha$ , luego en  $\theta$ , e  $y$  lo está en  $t$ .

- Si  $y$  está libre en  $\theta$  e  $y \neq x$ , entonces  $y$  está libre en  $\alpha$  o en  $\beta$  siendo  $y \neq x$ , con lo que por hipótesis de inducción se tiene que  $y$  está libre en  $S_x^t\alpha$  o en  $S_x^t\beta$  y, en cualquier caso,  $y$  está libre en  $S_x^t\theta$ .
  - Si  $x$  está libre en  $\theta$  e  $y$  lo está en  $t$ , de forma análoga a lo anterior se llega a que  $y$  está libre en  $S_x^t\theta$ .
- Si  $\theta \equiv \bigwedge x_i \alpha$  distinguimos tres casos:
1.  $x$  no está libre en  $\theta$  con lo que  $S_x^t\theta \equiv \theta$ .  
En este caso si  $y$  está libre en  $S_x^t\theta$  entonces es claro que lo está en  $\theta$  e  $y \neq x$  (pues estamos suponiendo que  $x$  no está libre en  $\theta$ ). Recíprocamente, si se da la disyunción, como  $x$  no está libre en  $\theta$  debe cumplirse que  $y$  está libre en  $\theta$ , luego en  $S_x^t\theta$ .
  2.  $x$  está libre en  $\theta$  y  $x_i$  no lo está en  $t$  con lo que  $S_x^t\theta \equiv \bigwedge x_i S_x^t\alpha$ .
    - Si  $y$  está libre en  $S_x^t\theta$ , entonces  $y \neq x_i$  e  $y$  está libre en  $S_x^t\alpha$  luego, por hipótesis de inducción, o bien  $y$  está libre en  $\alpha$ , con lo que lo está en  $\theta$  (al ser  $y \neq x_i$ ), e  $y \neq x$ ; o bien  $x$  está libre en  $\alpha$ , luego lo está en  $\theta$ , pues  $x \neq x_i$  al estar  $x$  libre en  $\theta$ , e  $y$  está libre en  $\theta$ .
    - Si  $y$  está libre en  $\theta$  e  $y \neq x$ , entonces  $y$  está libre en  $\alpha$  e  $y \neq x$  luego, por hipótesis de inducción,  $y$  está libre en  $S_x^t\alpha$  y al ser  $y \neq x_i$  (pues  $y$  está libre en  $\theta$ ) obtenemos que  $y$  está libre en  $S_x^t\theta$ .
    - Si  $x$  está libre en  $\theta$  e  $y$  lo está en  $t$ , entonces  $x$  está libre en  $\alpha$  y  $x \neq x_i$  luego, por hipótesis de inducción,  $y$  está libre en  $S_x^t\alpha$  y al ser  $y \neq x_i$  (pues  $y$  está libre en  $t$ ) obtenemos que  $y$  está libre en  $S_x^t\theta$ .
  3.  $x$  está libre en  $\theta$  y  $x_i$  lo está en  $t$  con lo que  $S_x^t\theta \equiv \bigwedge x_j S_x^t S_{x_i}^{x_j} \alpha$  siendo  $x_j$  la variable de menor índice que no está en  $\theta$  ni en  $t$ .  
Observemos que como la longitud de  $S_{x_i}^{x_j} \alpha$  es igual que la de  $\alpha$  (ver Metateorema 1.6) podemos aplicarle la hipótesis de inducción y tenemos:
    - Si  $y$  está libre en  $S_x^t\theta$ , entonces  $y \neq x_j$  e  $y$  está libre en  $S_x^t S_{x_i}^{x_j} \alpha$  luego, por hipótesis de inducción, o bien  $y$  está libre en  $S_{x_i}^{x_j} \alpha$  e  $y \neq x$ , o bien  $x$  está libre en  $S_{x_i}^{x_j} \alpha$  e  $y$  lo está en  $t$ .  
En el primer caso, usando de nuevo la hipótesis de inducción, obtenemos que al ser  $y \neq x_j$  se tendrá que  $y$  está libre en  $\alpha$  e  $y \neq x_i$ , luego  $y$  está libre en  $\theta$  e  $y \neq x$ .  
En el segundo caso es directo que  $x$  está libre en  $\theta$  (por estar en el punto 3.) e  $y$  lo está en  $t$ .
    - Si  $y$  está libre en  $\theta$  e  $y \neq x$ , entonces  $y$  está libre en  $\alpha$  e  $y \neq x_i$  luego, por hipótesis de inducción,  $y$  está libre en  $S_{x_i}^{x_j} \alpha$ . Como además  $y \neq x$  aplicando una vez más la hipótesis de inducción se tiene que  $y$  está libre en  $S_x^t S_{x_i}^{x_j} \alpha$ . Finalmente, al ser  $y \neq x_j$  (pues  $y$  está libre en  $\theta$ ) concluimos que  $y$  está libre en  $S_x^t\theta$ .
    - Si  $x$  está libre en  $\theta$  e  $y$  está libre en  $t$ , entonces  $x$  está libre en  $\alpha$  y  $x \neq x_i$  luego, por hipótesis de inducción,  $x$  está libre en  $S_{x_i}^{x_j} \alpha$ . Ahora, como  $y$  está libre en  $t$  aplicando una vez más la hipótesis de inducción se tiene que  $y$  está libre en  $S_x^t S_{x_i}^{x_j} \alpha$ . Finalmente, al ser  $y \neq x_j$  (pues  $y$  está libre en  $t$ ) concluimos que  $y$  está libre en  $S_x^t\theta$ .

- Si  $\theta \equiv x_i | \alpha$  se prueba de manera análoga al caso anterior.

**Demostraremos 4)** por inducción sobre la longitud de  $\theta$ :

- Si  $\theta \equiv x_i$ , como  $y$  no está en  $\theta$  se tiene:
  - Si  $x \equiv x_i$ , entonces  $S_y^x S_x^y \theta \equiv S_y^x y \equiv x \equiv \theta$ .
  - Si  $x \not\equiv x_i$ , entonces  $S_y^x S_x^y \theta \equiv S_y^x \theta \equiv \theta$ .
- Si  $\theta \equiv c_i$  es trivial.
- Si  $\theta \equiv R_i^n t_1 \cdots t_n$ , como  $y$  no está en  $\theta$  entonces no está en ningún  $t_i$  y, por hipótesis de inducción,  $S_y^x S_x^y t_i \equiv t_i$  para cada  $i = 1, \dots, n$ . Con ello, se obtiene que

$$S_y^x S_x^y \theta \equiv R_i^n S_y^x S_x^y t_1 \cdots S_y^x S_x^y t_n \equiv R_i^n t_1 \cdots t_n \equiv \theta.$$

- Si  $\theta \equiv f_i^n t_1 \cdots t_n$  es análogo al caso anterior.
- Si  $\theta \equiv \neg \alpha$ , como  $y$  no está en  $\theta$  se tiene que  $y$  no está en  $\alpha$  y, por hipótesis de inducción,  $S_y^x S_x^y \alpha \equiv \alpha$ . Con ello, se obtiene que

$$S_y^x S_x^y \theta \equiv \neg S_y^x S_x^y \alpha \equiv \neg \alpha \equiv \theta.$$

- Si  $\theta \equiv \alpha \rightarrow \beta$ , como  $y$  no está en  $\theta$  se tiene que  $y$  no está en  $\alpha$  ni en  $\beta$  y, por hipótesis de inducción,  $S_y^x S_x^y \alpha \equiv \alpha$  y  $S_y^x S_x^y \beta \equiv \beta$ . Con ello, se obtiene que

$$S_y^x S_x^y \theta \equiv S_y^x S_x^y \alpha \rightarrow S_y^x S_x^y \beta \equiv \alpha \rightarrow \beta \equiv \theta.$$

- Si  $\theta \equiv \bigwedge x_i \alpha$ , como  $y$  no está en  $\theta$  se tiene que  $y \not\equiv x_i$ , luego  $x_i$  no está nunca libre en  $y$  y distinguimos dos casos:

1. Si  $x$  no está libre en  $\theta$ , entonces

$$S_y^x S_x^y \theta \equiv S_y^x \theta \equiv \theta.$$

2. Si  $x$  está libre en  $\theta$ , entonces

$$S_y^x S_x^y \theta \equiv S_y^x \bigwedge x_i S_x^y \alpha. \quad (1.31)$$

Además, como  $x$  está libre en  $\theta$  se tiene que lo está en  $\alpha$ , luego tenemos que  $x$  está libre en  $\alpha$  y claramente  $y$  está libre en  $y$ , con lo que por el punto 3) del teorema se tiene que  $y$  está libre en  $S_x^y \alpha$ . Como también sabemos que  $y \not\equiv x_i$  se tiene que  $y$  está libre en  $\bigwedge x_i S_x^y \alpha$  y, como  $x_i \not\equiv x$  (pues  $x$  está libre en  $\theta$ ) obtenemos que

$$S_y^x \bigwedge x_i S_x^y \alpha \equiv \bigwedge x_i S_y^x S_x^y \alpha. \quad (1.32)$$

Finalmente, por hipótesis de inducción se tiene que  $S_y^x S_x^y \alpha \equiv \alpha$  y juntando (1.31) y (1.32) se obtiene lo deseado.

- Si  $\theta \equiv x_i | \alpha$  es análogo al anterior.

**Para probar 5)** basta observar que si  $x$  está libre en  $\theta$  e  $y$  es una variable libre de  $t$ , entonces por 3) es claro que  $y$  está libre en  $S_x^t\theta$ . Y también, si  $y$  es una variable libre de  $\theta$  distinta de  $x$ , usando de nuevo 3) se concluye que  $y$  está libre en  $S_x^t\theta$ .

**Demostraremos 6)** por inducción sobre la longitud de  $\theta$ :

- Si  $\theta \equiv x_i$  entonces:
  - Si  $x \equiv x_i$ , entonces  $S_x^c\theta \equiv c$  y tenemos que  $y$  nunca está ligada en  $S_x^c\theta$  y tampoco lo está en  $\theta$ , luego se cumple lo deseado.
  - Si  $x \not\equiv x_i$ , entonces  $S_x^c\theta \equiv \theta$  y nuevamente  $y$  nunca está ligada en  $S_x^c\theta$  y tampoco lo está en  $\theta$ .
- Si  $\theta \equiv c_i$ , entonces  $S_x^c\theta \equiv \theta$  y nuevamente se tiene que  $y$  nunca está ligada en  $S_x^c\theta$  y tampoco lo está en  $\theta$ .
- Si  $\theta \equiv R_i^n t_1 \cdots t_n$ , tenemos que  $S_x^c\theta \equiv R_i^n S_x^c t_1 \cdots S_x^c t_n$  y se cumple que  $y$  está ligada en  $S_x^c\theta$  syss lo está en algún  $S_x^c t_i$ . Por hipótesis de inducción, esto último ocurre syss  $y$  está ligada en algún  $t_i$ , lo que ocurre syss está ligada en  $\theta$ .
- Si  $\theta \equiv f_i^n t_1 \cdots t_n$  es análogo al caso anterior.
- Si  $\theta \equiv \neg\alpha$ , tenemos que  $S_x^c\theta \equiv \neg S_x^c\alpha$  y se cumple que  $y$  está ligada en  $S_x^c\theta$  syss lo está en  $S_x^c\alpha$ . Por hipótesis de inducción, esto último ocurre syss  $y$  está ligada en  $\alpha$ , lo que ocurre syss está ligada en  $\theta$ .
- Si  $\theta \equiv \alpha \rightarrow \beta$ , tenemos que  $S_x^c\theta \equiv S_x^c\alpha \rightarrow S_x^c\beta$  y se cumple que  $y$  está ligada en  $S_x^c\theta$  syss lo está en  $S_x^c\alpha$  o en  $S_x^c\beta$ . Por hipótesis de inducción, esto último ocurre syss  $y$  está ligada en  $\alpha$  o en  $\beta$ , lo que ocurre syss está ligada en  $\theta$ .
- Si  $\theta \equiv \bigwedge x_i \alpha$  distinguimos dos casos:
  1.  $x$  no está libre en  $\theta$  con lo que  $S_x^c\theta \equiv \theta$ .  
En este caso es claro que  $y$  está ligado en  $S_x^c\theta$  syss  $y$  está ligado en  $\theta$ .
  2.  $x$  está libre en  $\theta$  con lo que, como  $x_i$  nunca está libre en  $c$  (pues es una constante o una variable que no está en  $\theta$ ), se tiene que  $S_x^c\theta \equiv \bigwedge x_i S_x^c\alpha$ .  
Así,  $y$  está ligado en  $S_x^c\theta$  syss  $y \equiv x_i$  o  $y$  está ligado en  $S_x^c\alpha$ , lo que por hipótesis de inducción ocurre syss  $y \equiv x_i$  o  $y$  está ligado en  $\alpha$ , siendo esto último equivalente a que  $y$  esté ligado en  $\theta$ .
- Si  $\theta \equiv x_i | \alpha$  es análogo al caso anterior.

**Demostraremos 7)** por inducción sobre la longitud de  $\theta$ :

- Si  $\theta \equiv x_i$  entonces:
  - Si  $x \equiv x_i$  se tiene que
 
$$S_y^t S_x^y \theta \equiv S_y^t y \equiv t \equiv S_x^t \theta.$$
  - Si  $x \not\equiv x_i$ , como también tenemos que  $y \not\equiv x_i$  se tiene que

$$S_y^t S_x^y \theta \equiv S_y^t \theta \equiv \theta \equiv S_x^t \theta.$$

- Si  $\theta \equiv c_i$  es trivial.
- Si  $\theta \equiv R_i^n t_1 \cdots t_n$ , entonces como  $y$  no está en  $\theta$  se tiene que no está en ningún  $t_i$ . Además, ninguna variable libre de los  $t_i$  puede estar en  $t$  (pues cualquier variable libre de un  $t_i$  es una variable libre de  $\theta$ ), con lo que por hipótesis de inducción obtenemos que  $S_y^t S_x^y t_i \equiv S_x^t t_i$  para cada  $i = 1, \dots, n$ . Con esto, concluimos que

$$S_y^t S_x^y \theta \equiv R_i^n S_y^t S_x^y t_1 \cdots S_y^t S_x^y t_n \equiv R_i^n S_x^t t_1 \cdots S_x^t t_n \equiv S_x^t \theta.$$

- Si  $\theta \equiv f_i^n t_1 \cdots t_n$  es análogo al caso anterior.
- Si  $\theta \equiv \neg \alpha$ , entonces como  $y$  no está en  $\theta$  se tiene que no está en  $\alpha$ . Además, ninguna variable libre de  $\alpha$  puede estar en  $t$  (pues cualquier variable libre de  $\alpha$  es una variable libre de  $\theta$ ), con lo que por hipótesis de inducción obtenemos que  $S_y^t S_x^y \alpha \equiv S_x^t \alpha$ . Con esto, concluimos que

$$S_y^t S_x^y \theta \equiv \neg S_y^t S_x^y \alpha \equiv \neg S_x^t \alpha \equiv S_x^t \theta.$$

- Si  $\theta \equiv \alpha \rightarrow \beta$ , entonces como  $y$  no está en  $\theta$  se tiene que no está en  $\alpha$  ni en  $\beta$ . Además, ninguna variable libre de  $\alpha$  o de  $\beta$  puede estar en  $t$  (pues cualquier variable libre de  $\alpha$  o de  $\beta$  es una variable libre de  $\theta$ ), con lo que por hipótesis de inducción obtenemos que  $S_y^t S_x^y \alpha \equiv S_x^t \alpha$  y  $S_y^t S_x^y \beta \equiv S_x^t \beta$ . Con esto, concluimos que

$$S_y^t S_x^y \theta \equiv S_y^t S_x^y \alpha \rightarrow S_y^t S_x^y \beta \equiv S_x^t \alpha \rightarrow S_x^t \beta \equiv S_x^t \theta.$$

- Si  $\theta \equiv \bigwedge x_i \alpha$ , entonces como  $y$  no está en  $\theta$  se tiene que  $y \neq x_i$  e  $y$  no está en  $\alpha$ . Además, ni  $x_i$  ni ninguna variable libre de  $\alpha$  está libre en  $t$ , luego por hipótesis de inducción tenemos que

$$S_y^t S_x^y \alpha \equiv S_x^t \alpha. \quad (1.33)$$

Distingamos entonces dos casos:

1.  $x$  no está libre en  $\theta$ , con lo que como  $y$  tampoco está en  $\theta$  obtenemos que

$$S_y^t S_x^y \theta \equiv S_y^t \theta \equiv \theta \equiv S_x^t \theta.$$

2.  $x$  está libre en  $\theta$ , con lo que como  $y \neq x_i$  se tiene que

$$S_y^t S_x^y \theta \equiv S_y^t \bigwedge x_i S_x^y \alpha. \quad (1.34)$$

Ahora, como  $y \neq x_i$  e  $y$  está libre en  $S_x^y \alpha$  (pues basta aplicar 3) observando que  $x$  está libre en  $\alpha$ , por estarlo en  $\theta$ , y claramente  $y$  está libre en  $y$ ) tenemos también que  $y$  está libre en  $\bigwedge x_i S_x^y \alpha$ , y como además  $x_i$  no está libre en  $t$  se tiene que

$$S_y^t \bigwedge x_i S_x^y \alpha \equiv \bigwedge x_i S_y^t S_x^y \alpha. \quad (1.35)$$

Juntando (1.33), (1.34) y (1.35) concluimos con lo deseado.

- Si  $\theta \equiv x_i | \alpha$  es análogo al caso anterior.

**Para demostrar 8)** observemos primero que si  $y$  está libre en  $t$  y  $x$  está libre en  $\theta$ , entonces por 3) tenemos que  $y$  está libre en  $S_x^t\theta$ , luego resta ver el caso cuando  $y$  está ligada en  $t$  (pues por el Metateorema 1.1 como  $y$  está en  $t$  debe estar libre o ligada).

Veamos, por inducción sobre la longitud de  $\theta$ , que en este caso se tiene que  $y$  está ligada en  $S_x^t$ :

- Si  $\theta \equiv x_i$ , como  $x$  está libre en  $\theta$  se tiene que  $x \equiv x_i$  y así  $S_x^t\theta \equiv t$ , luego efectivamente  $y$  está ligada en  $S_x^t\theta$ .
- No puede ocurrir que  $\theta \equiv c_i$ , pues  $x$  está libre en  $\theta$ .
- Si  $\theta \equiv R_i^n t_1 \cdots t_n$ , entonces como  $x$  está libre en  $\theta$  debe estar libre en algún  $t_i$  y, por hipótesis de inducción,  $y$  estará ligado en  $S_x^t t_i$ , luego estará ligado en

$$R_i^n S_x^t t_1 \cdots S_x^t t_n \equiv S_x^t \theta.$$

- Si  $\theta \equiv f_i^n t_1 \cdots t_n$  es análogo al caso anterior.
- Si  $\theta \equiv \neg \alpha$ , entonces como  $x$  está libre en  $\theta$  debe estar libre en  $\alpha$  y, por hipótesis de inducción,  $y$  estará ligado en  $S_x^t \alpha$ , luego estará ligado en

$$\neg S_x^t \alpha \equiv S_x^t \theta.$$

- Si  $\theta \equiv \alpha \rightarrow \beta$ , entonces como  $x$  está libre en  $\theta$  debe estar libre en  $\alpha$  o en  $\beta$  y, por hipótesis de inducción,  $y$  estará ligado en  $S_x^t \alpha$  o en  $S_x^t \beta$ , luego estará ligado en

$$S_x^t \alpha \rightarrow S_x^t \beta \equiv S_x^t \theta.$$

- Si  $\theta \equiv \bigwedge x_i \alpha$ , entonces como  $x$  está libre en  $\theta$  se tiene que  $x \neq x_i$  y  $x$  está libre en  $\alpha$ . Distingamos dos casos:

1.  $x_i$  no está libre en  $t$ , con lo que  $S_x^t \theta \equiv \bigwedge x_i S_x^t \alpha$  y, como por hipótesis de inducción  $y$  está ligada en  $S_x^t \alpha$ , concluimos que  $y$  está ligada en  $S_x^t \theta$ .
2.  $x_i$  está libre en  $t$  con lo que

$$S_x^t \theta \equiv \bigwedge x_j S_x^t S_{x_i}^{x_j} \alpha$$

siendo  $x_j$  la variable de menor índice que no está en  $\theta$  ni en  $t$ .

Observemos entonces que por 3) se tiene que  $x$  está libre en  $S_{x_i}^{x_j} \alpha$  (pues  $x$  está libre en  $\alpha$  y  $x \neq x_i$ ) y, como la longitud de  $S_{x_i}^{x_j} \alpha$  es igual a la de  $\alpha$  (ver Metateorema 1.6), podemos aplicar la hipótesis de inducción y obtener que  $y$  estará ligada en  $S_x^t S_{x_i}^{x_j} \alpha$ , luego estará ligada en  $S_x^t \theta$ .

- Si  $\theta \equiv x_i | \alpha$  es análogo al caso anterior.

Con esto quedan demostrados todos los apartados y, finalmente, el teorema. 

Observemos que por el punto 2) de este teorema se tiene que si  $x, y$  son dos variables distintas e  $y$  no está libre en un término  $t$ , entonces se tiene que

$$S_x^t \bigwedge y \alpha \equiv \bigwedge y S_x^t \alpha, \quad (1.36)$$

$$S_x^t \bigvee y \alpha \equiv \bigvee y S_x^t \alpha. \quad (1.37)$$



En efecto, si  $x$  no está libre en  $\bigwedge y\alpha$  ( $\bigvee y\alpha$ ), como  $x \neq y$  se tiene que  $x$  no está libre en  $\alpha$  y por el Teorema 1.13 2)

$$\bigwedge y S_x^t \alpha \equiv \bigwedge y \alpha \equiv S_x^t \bigwedge y \alpha \quad \left( \bigvee y S_x^t \alpha \equiv \bigvee y \alpha \equiv S_x^t \bigvee y \alpha \right).$$

Por otra parte, si  $x$  está libre en  $\bigwedge y\alpha$  ( $\bigvee y\alpha$ ) se cumple lo deseado por definición. 

De igual modo se prueba que si  $x, y$  son dos variables distintas e  $y$  no está libre en un término  $t$ , entonces

$$S_x^t(y|\alpha) \equiv y|S_x^t\alpha. \quad (1.38)$$

Para la existencia con unicidad no se cumplen, en general, los resultados anteriores, pero si podemos asegurar que las fórmulas serán lógicamente equivalentes. Añadiremos aquí dicho resultado para tenerlos todos agrupados, aunque el lector deberá esperar a finalizar el Capítulo 2 para entender completamente el resultado y su demostración:

### Metateorema 1.11

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal,  $\alpha$  y  $t$  una fórmula y un término de  $\mathcal{L}$  respectivamente y  $x, y$  dos variables distintas de modo que  $y$  no está libre en  $t$ . Entonces se cumple que

$$\vdash S_x^t \bigvee y \alpha \leftrightarrow \bigvee y S_x^t \alpha.$$

Por el Teorema 2.9 3) tenemos que si  $z$  es una variable que no está en  $\alpha$ ,  $S_x^t\alpha$  ni  $t$  y distinta de  $x$  e  $y$  se cumple que

$$\begin{aligned} \vdash \bigvee y \alpha &\leftrightarrow \bigvee z \bigwedge y (\alpha \leftrightarrow z = y), \\ \vdash \bigvee y S_x^t \alpha &\leftrightarrow \bigvee z \bigwedge y (S_x^t \alpha \leftrightarrow z = y). \end{aligned}$$

Por tanto, el Metateorema 1.18 nos da que

$$\vdash S_x^t \bigvee y \alpha \leftrightarrow S_x^t \bigvee z \bigwedge y (\alpha \leftrightarrow z = y)$$

y por la regla (MBB) bastará ver que

$$S_x^t \bigvee z \bigwedge y (\alpha \leftrightarrow z = y) \equiv \bigvee z \bigwedge y (S_x^t \alpha \leftrightarrow z = y). \quad (1.39)$$

Sin más, por (1.36) y (1.37) (y usando que  $x \neq z, y$ ) se tiene que

$$\begin{aligned} S_x^t \bigvee z \bigwedge y (\alpha \leftrightarrow z = y) &\equiv \bigvee z S_x^t \bigwedge y (\alpha \leftrightarrow z = y) \equiv \bigvee z \bigwedge y S_x^t (\alpha \leftrightarrow z = y) \\ &\equiv \bigvee z \bigwedge y (S_x^t \alpha \leftrightarrow z = y), \end{aligned}$$

luego queda probado (1.39) y con ello el resultado buscado. 

**Nota 2:** ...  $\theta(y_1, \dots, y_n)$  ...

Como se ha mencionado para una única variable, al expresar de esta forma una expresión no estamos queriendo decir que las variables  $y_1, \dots, y_n$  estén en  $\theta$ , es simplemente una forma de expresar que, al escribir  $\theta(t_1, \dots, t_n)$  para ciertos términos  $t_1, \dots, t_n$ , estamos indicando que sustituimos la variable  $y_1$  por  $t_1$ ,  $y_2$  por  $t_2$ , etc. (siempre teniendo en cuenta la definición de sustitución para varias variables).

**Nota 3:** ...  $\theta(t_1, \dots, t_n)$  ...

Observemos que esta definición introduce una ambigüedad respecto a que significa la expresión  $\theta(t)$ , pues por una parte debe significar  $S_x^t \theta$  como se ha dicho más arriba en el texto, pero por otra parte, con la definición dada para varias variables, debería significar  $S_z^t S_x^z \theta$  con  $z$  la variable de menor índice que no está en  $t$  ni en  $\theta$  y que es distinta de  $x$ .

En general, las expresiones  $S_x^t \theta$  y  $S_z^t S_x^z \theta$  no son idénticas, por lo que, para fijar una definición concreta, cuando escribamos  $\theta(t)$  entenderemos que significa  $S_x^t \theta$ . Ahora bien, por el Metateorema 2.3 se tiene que tanto a nivel sintáctico como semántico siempre “significarán” lo mismo, luego en la práctica será indiferente que definición tomemos.

**Nota 4:** ... o más en general, variables cualesquiera ...

Tal y como vimos en la Nota 8 pág. 26 y en la Nota 5 pág. 34 el haber elegido precisamente las variables de menor índice que no están en  $t_1, \dots, t_n, \theta, y_1, \dots, y_n$  es una forma de dar una definición precisa de que debemos entender por una sustitución de varias variables, pero tal y como vimos en los casos anteriores mostraremos a continuación que podríamos haber tomado cualquier otro criterio para elegir dichas variables.

En primer lugar, veamos que la fórmula definida para la sustitución de múltiples variables significa realmente lo que deseamos, es decir, que tenemos un análogo del Teorema 1.12.

### Metateorema 1.12

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal,  $\theta$  una expresión cualquiera del lenguaje,  $t_1, \dots, t_n$  términos,  $x_1, \dots, x_n$  variables cualesquiera e  $y_1, \dots, y_n$  variables que no están en  $t_1, \dots, t_n, \theta, x_1, \dots, x_n$ . Entonces para cualquier modelo  $M$  de  $\mathcal{L}$  y cualquier valoración  $v$  de  $M$  se tiene que si  $\theta$  es una fórmula

$$M \models S_{y_1}^{t_1} \dots S_{y_n}^{t_n} S_{x_1}^{y_1} \dots S_{x_n}^{y_n} \theta[v] \text{ syss } M \models \theta \left[ v_{x_1}^{M(t_1)[v]} \dots v_{x_n}^{M(t_n)[v]} \right],$$

y si  $\theta$  es un término entonces

$$M \left( S_{y_1}^{t_1} \dots S_{y_n}^{t_n} S_{x_1}^{y_1} \dots S_{x_n}^{y_n} \theta \right) [v] \equiv M(\theta) \left[ v_{x_1}^{M(t_1)[v]} \dots v_{x_n}^{M(t_n)[v]} \right].$$

Demostraremos el caso en el que  $\theta$  es una fórmula, pues el caso para términos es análogo. Por el Teorema 1.12 y teniendo en cuenta que ningún  $y_i$  está en ningún  $t_j$  (y usando el Teorema 1.9) tenemos que

$$M \models S_{y_1}^{t_1} \dots S_{y_n}^{t_n} S_{x_1}^{y_1} \dots S_{x_n}^{y_n} \theta[v] \text{ syss } M \models S_{x_1}^{y_1} \dots S_{x_n}^{y_n} \theta \left[ v_{y_1}^{M(t_1)[v]} \dots v_{y_n}^{M(t_n)[v]} \right]. \quad (1.40)$$

Veámoslo, por ejemplo, para las dos primeras variables, pues el resto es análogo.

Se tiene que, por el Teorema 1.12,

$$\begin{aligned} M \models S_{y_1}^{t_1} \dots S_{y_n}^{t_n} S_{x_1}^{y_1} \dots S_{x_n}^{y_n} \theta[v] \text{ syss } M \models S_{y_2}^{t_2} \dots S_{y_n}^{t_n} S_{x_1}^{y_1} \dots S_{x_n}^{y_n} \theta \left[ v_{y_1}^{M(t_1)[v]} \right] \\ \text{syss } M \models S_{y_3}^{t_3} \dots S_{y_n}^{t_n} S_{x_1}^{y_1} \dots S_{x_n}^{y_n} \theta \left[ v_{y_1}^{M(t_1)[v]} v_{y_2}^{M(t_2)[v]} \right], \end{aligned}$$

pero como  $y_1$  no está en  $t_2$ , por el Teorema 1.9 obtenemos que

$$M \models S_{y_3}^{t_3} \dots S_{y_n}^{t_n} S_{x_1}^{y_1} \dots S_{x_n}^{y_n} \theta \left[ \begin{array}{cc} M(t_1)[v] & M(t_2) \left[ v_{y_1}^{M(t_1)[v]} \right] \\ v_{y_1} & y_2 \end{array} \right] \text{ syss } M \models S_{y_3}^{t_3} \dots S_{y_n}^{t_n} S_{x_1}^{y_1} \dots S_{x_n}^{y_n} \theta \left[ \begin{array}{cc} M(t_1)[v] & M(t_2)[v] \\ v_{y_1} & y_2 \end{array} \right]$$

tal como buscábamos.

Veamos ahora que

$$M \models S_{x_1}^{y_1} \dots S_{x_n}^{y_n} \theta \left[ \begin{array}{ccc} v_{y_1}^{M(t_1)[v]} & \dots & M(t_n)[v] \\ & \dots & y_n \end{array} \right] \text{ syss } M \models \theta \left[ \begin{array}{ccc} v_{x_1}^{M(t_1)[v]} & \dots & M(t_n)[v] \\ & \dots & x_n \end{array} \right], \quad (1.41)$$

lo cual es nuevamente consecuencia de los Teoremas 1.9 y 1.12.

En efecto, por el Teorema 1.12 y teniendo en cuenta que todas las variables  $y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_n$  son distintas se tiene que

$$\begin{aligned} M &\models S_{x_1}^{y_1} \dots S_{x_n}^{y_n} \theta \left[ \begin{array}{ccc} v_{y_1}^{M(t_1)[v]} & \dots & M(t_n)[v] \\ & \dots & y_n \end{array} \right] \text{ syss} \\ M &\models S_{x_2}^{y_2} \dots S_{x_n}^{y_n} \theta \left[ \begin{array}{ccc} M(t_1)[v] & \dots & M(t_n)[v] M(y_1) \left[ v_{y_1}^{M(t_1)[v]} \dots M(t_n)[v] \right] \\ v_{y_1} & \dots & y_n \quad x_1 \end{array} \right] \text{ syss} \\ M &\models S_{x_2}^{y_2} \dots S_{x_n}^{y_n} \theta \left[ \begin{array}{ccc} M(t_1)[v] & \dots & M(t_n)[v] M(t_1)[v] \\ v_{y_1} & \dots & y_n \quad x_1 \end{array} \right] \text{ syss} \\ M &\models S_{x_3}^{y_3} \dots S_{x_n}^{y_n} \theta \left[ \begin{array}{ccc} M(t_1)[v] & \dots & M(t_n)[v] M(t_1)[v] M(y_2) \left[ v_{y_1}^{M(t_1)[v]} \dots M(t_n)[v] M(t_1)[v] \right] \\ v_{y_1} & \dots & y_n \quad x_1 \quad x_2 \end{array} \right] \text{ syss} \\ M &\models S_{x_3}^{y_3} \dots S_{x_n}^{y_n} \theta \left[ \begin{array}{ccc} M(t_1)[v] & \dots & M(t_n)[v] M(t_1)[v] M(t_2)[v] \\ v_{y_1} & \dots & y_n \quad x_1 \quad x_2 \end{array} \right] \text{ syss} \\ &\dots \\ M &\models \theta \left[ \begin{array}{ccc} v_{y_1}^{M(t_1)[v]} & \dots & M(t_n)[v] M(t_1)[v] \dots M(t_n)[v] \\ & \dots & y_n \quad x_1 \quad \dots x_n \end{array} \right] \end{aligned}$$

y como  $y_1, \dots, y_n$  no están libres en  $\theta$ , por el Teorema 1.9 obtenemos lo deseado.

Juntando (1.40) y (1.41) concluimos con lo deseado. 

Este resultado nos permite concluir de manera inmediata que, en efecto, podríamos haber tomado cualquier otro criterio para elegir las variables  $z_1, \dots, z_n$  en la definición de sustitución de varias variables:

### Metateorema 1.13

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal,  $\theta$  una expresión cualquiera del lenguaje,  $t_1, \dots, t_n$  términos,  $x_1, \dots, x_n$  variables cualesquiera y  $z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n$  variables que no están en  $t_1, \dots, t_n, \theta, x_1, \dots, x_n$ . Entonces para cualquier modelo  $M$  de  $\mathcal{L}$  se cumple que si  $\theta$  es una fórmula

$$M \models S_{z_1}^{t_1} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta \leftrightarrow S_{w_1}^{t_1} \dots S_{w_n}^{t_n} S_{x_1}^{w_1} \dots S_{x_n}^{w_n} \theta,$$

y si  $\theta$  es un término entonces

$$M \models S_{z_1}^{t_1} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta = S_{w_1}^{t_1} \dots S_{w_n}^{t_n} S_{x_1}^{w_1} \dots S_{x_n}^{w_n} \theta.$$

Basta ver que dada cualquier valoración  $v$  de  $M$  se tiene que

$$M \models S_{z_1}^{t_1} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta[v] \text{ syss } M \models S_{w_1}^{t_1} \dots S_{w_n}^{t_n} S_{x_1}^{w_1} \dots S_{x_n}^{w_n} \theta[v]$$

si  $\theta$  es una fórmula, y que

$$M \left( S_{z_1}^{t_1} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta \right) [v] \equiv M \left( S_{w_1}^{t_1} \dots S_{w_n}^{t_n} S_{x_1}^{w_1} \dots S_{x_n}^{w_n} \theta \right) [v]$$

si  $\theta$  es un término.

Para ello, es suficiente con ver que, en general, si  $y_1, \dots, y_n$  son variables que no están en  $t_1, \dots, t_n, \theta, x_1, \dots, x_n$ , entonces si  $\theta$  es una fórmula se tiene que

$$M \models S_{y_1}^{t_1} \dots S_{y_n}^{t_n} S_{x_1}^{y_1} \dots S_{x_n}^{y_n} \theta[v] \text{ syss } M \models \theta \left[ v_{x_1}^{M(t_1)[v]} \dots v_{x_n}^{M(t_n)[v]} \right]$$

y si  $\theta$  es un término se tiene que

$$M \left( S_{y_1}^{t_1} \dots S_{y_n}^{t_n} S_{x_1}^{y_1} \dots S_{x_n}^{y_n} \theta \right) [v] \equiv M(\theta) \left[ v_{x_1}^{M(t_1)[v]} \dots v_{x_n}^{M(t_n)[v]} \right],$$

pero esto es precisamente lo que dice el Metateorema 1.12 con lo que podemos concluir la demostración. 

Observemos que para las sustituciones de varias variables existe un resultado análogo al Teorema 1.13 2):

#### Metateorema 1.14

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal,  $\theta$  una expresión,  $t_1, \dots, t_n$  términos,  $x_1, \dots, x_n$  variables cualesquiera y  $z_1, \dots, z_n$  variables que no están en  $t_1, \dots, t_n, \theta, x_1, \dots, x_n$ . Entonces, si  $x_i$  no está libre en  $\theta$  se cumple que

$$S_{z_1}^{t_1} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta \equiv S_{z_1}^{t_1} \dots S_{z_{i-1}}^{t_{i-1}} S_{z_{i+1}}^{t_{i+1}} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_{i-1}}^{z_{i-1}} S_{x_{i+1}}^{z_{i+1}} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta.$$

Observemos en primer lugar que  $x_i$  no está libre en

$$S_{x_{i+1}}^{z_{i+1}} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta,$$

pues si lo estuviera, como es distinta de cada  $z_j$ , el Teorema 1.13 3) nos forzaría a que  $x_i$  estuviera libre en  $\theta$ . Por el Teorema 1.13 2) obtenemos entonces que

$$S_{x_i}^{z_i} S_{x_{i+1}}^{z_{i+1}} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta \equiv S_{x_{i+1}}^{z_{i+1}} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta,$$

luego que

$$S_{z_{i+1}}^{t_{i+1}} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta \equiv S_{z_{i+1}}^{t_{i+1}} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_{i-1}}^{z_{i-1}} S_{x_{i+1}}^{z_{i+1}} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta.$$

Ahora, usando de nuevo el Teorema 1.13 3) obtenemos que  $z_i$  no está libre en la expresión anterior (fijándonos en la forma de la derecha), pues si lo estuviera, como es distinta de cada  $z_j$  con  $j \neq i$  y no está en ningún  $t_j$ , el Teorema 1.13 3) nos forzaría a que  $z_i$  estuviera libre en  $\theta$ . Utilizando de nuevo el Teorema 1.13 2) obtenemos que

$$S_{z_i}^{t_i} S_{z_{i+1}}^{t_{i+1}} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_{i-1}}^{z_{i-1}} S_{x_{i+1}}^{z_{i+1}} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta \equiv S_{z_{i+1}}^{t_{i+1}} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_{i-1}}^{z_{i-1}} S_{x_{i+1}}^{z_{i+1}} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta,$$

luego que

$$S_{z_i}^{t_i} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta \equiv S_{z_{i+1}}^{t_{i+1}} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_{i-1}}^{z_{i-1}} S_{x_{i+1}}^{z_{i+1}} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta$$

y así que

$$S_{z_1}^{t_1} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta \equiv S_{z_1}^{t_1} \dots S_{z_{i-1}}^{t_{i-1}} S_{z_{i+1}}^{t_{i+1}} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_{i-1}}^{z_{i-1}} S_{x_{i+1}}^{z_{i+1}} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta$$

tal y como queríamos ver. 

El resultado anterior nos permite considerar en la práctica únicamente sustituciones donde las variables  $x_1, \dots, x_n$  estén libres y en este contexto tenemos el siguiente resultado análogo al Teorema 1.13 3):

### Metateorema 1.15

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal,  $\theta$  una expresión,  $t_1, \dots, t_n$  términos,  $x_1, \dots, x_n$  variables libres en  $\theta$  y  $z_1, \dots, z_n$  variables que no están en  $t_1, \dots, t_n$  ni  $\theta^a$ . Entonces, una variable  $y$  está libre en  $S_{z_1}^{t_1} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta$  si, y solo si,  $y$  está libre en  $\theta$  y es distinta de  $x_1, \dots, x_n$ , o bien  $y$  está libre en algún  $t_i$ .

<sup>a</sup> Luego también son distintas de  $x_1, \dots, x_n$  al estar estas variables libres en  $\theta$ .

Si  $y$  está libre en

$$S_{z_1}^{t_1} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta \quad (1.42)$$

y no está libre en ningún  $t_i$ , por el Teorema 1.13 3) tenemos que  $y$  debe estar libre en

$$S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta$$

y ser distinta de  $z_1, \dots, z_n$ . Ahora bien, por ser  $y$  distinta de cada  $z_i$ , el mismo Teorema 1.13 3) nos asegura que  $y$  debe estar libre en  $\theta$  y ser distinta de  $x_1, \dots, x_n$  como queríamos ver.

Esto prueba que si  $y$  está libre en (1.42), entonces  $y$  está libre en  $\theta$  y es distinta de  $x_1, \dots, x_n$ , o bien  $y$  está libre en algún  $t_i$ .

Recíprocamente, si  $y$  está libre en  $\theta$  y es distinta de cada  $x_1, \dots, x_n$ , el Teorema 1.13 3) nos asegura que  $y$  está libre en

$$S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta.$$

Además, como  $y$  está libre en  $\theta$  será distinta de cada  $z_i$ , luego usando de nuevo el Teorema 1.13 3) obtenemos que  $y$  está libre en

$$S_{z_1}^{t_1} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta.$$

Por último, el Teorema 1.13 3) nos asegura que  $x_i$  está libre en

$$S_{x_{i+1}}^{z_{i+1}} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta,$$

(pues es distinta de  $x_{i+1}, \dots, x_n$  y está libre en  $\theta$ ) y con ello que  $z_i$  está libre en

$$S_{x_i}^{z_i} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta.$$

Como  $z_i$  es distinta del resto de  $z_j$  y de  $x_1, \dots, x_{i-1}$ , el famoso teorema nos dice que también está libre en

$$S_{z_{i+1}}^{t_{i+1}} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta.$$

Con todo, si  $y$  está libre en algún  $t_i$ , usando una vez más el famoso teorema, obtenemos que está libre en

$$S_{z_i}^{t_i} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta$$

y, finalmente, como  $y$  es distinta de cada  $z_j$  (por estar en  $t_i$ ), concluimos que está libre en

$$S_{z_1}^{t_1} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta.$$

Con esto queda demostrado que si  $y$  está libre en  $\theta$  y es distinta de  $x_1, \dots, x_n$ , o bien  $y$  está libre en algún  $t_i$ , entonces  $y$  está libre en (1.42). 

Como hicimos con notas anteriores, veamos también el análogo sintáctico del Metateorema 1.13:

### Metateorema 1.16

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal,  $\theta$  una expresión cualquiera del lenguaje,  $t_1, \dots, t_n$  términos,  $x_1, \dots, x_n$  variables cualesquiera y  $z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n$  variables que no están libres en  $t_1, \dots, t_n, \theta, x_1, \dots, x_n$ . Entonces, si  $\theta$  es una fórmula se cumple que

$$\vdash S_{z_1}^{t_1} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta \leftrightarrow S_{w_1}^{t_1} \dots S_{w_n}^{t_n} S_{x_1}^{w_1} \dots S_{x_n}^{w_n} \theta,$$

y si  $\theta$  es un término se cumple que

$$\vdash S_{z_1}^{t_1} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta = S_{w_1}^{t_1} \dots S_{w_n}^{t_n} S_{x_1}^{w_1} \dots S_{x_n}^{w_n} \theta.$$

Para demostrarlo necesitaremos el siguiente resultado:

### Metateorema 1.17

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal,  $\alpha, \beta$  fórmulas cualesquiera del lenguaje,  $x_1, \dots, x_n$  variables y  $t_1, \dots, t_n, s_1, \dots, s_n$  términos cualesquiera. Entonces se cumple que

$$t_1 = s_1, \dots, t_n = s_n, \alpha \leftrightarrow \beta \vdash S_{x_1}^{t_1} \dots S_{x_n}^{t_n} \alpha \leftrightarrow S_{x_1}^{s_1} \dots S_{x_n}^{s_n} \beta.$$

En la deducción se generaliza únicamente respecto a  $x_1, \dots, x_n$ .

Veamos en primer lugar el caso para una única variable, es decir, que si  $\alpha, \beta$  son fórmulas cualesquiera,  $x$  una variable y  $t, s$  son dos términos cualesquiera, entonces

$$t = s, \alpha \leftrightarrow \beta \vdash S_x^t \alpha \leftrightarrow S_x^s \beta. \quad (1.43)$$

Sin más, la deducción es la siguiente (donde se observa que solamente se generaliza respecto a  $x$ ):

- |     |                                            |         |
|-----|--------------------------------------------|---------|
| (1) | $t = s$                                    | Premisa |
| (2) | $\alpha \leftrightarrow \beta$             | Premisa |
| (3) | $\wedge x(\alpha \leftrightarrow \beta)$   | IG 2    |
| (4) | $S_x^t \alpha \leftrightarrow S_x^s \beta$ | EG 3    |

|      |                                            |                |
|------|--------------------------------------------|----------------|
| (5)  | $S_x^t \beta$                              | Hipótesis      |
| (6)  | $s = t$                                    | SI 1           |
| (7)  | $S_x^s \beta$                              | ETI 5, 6       |
| (8)  | $S_x^t \beta \rightarrow S_x^s \beta$      | Tma. deducción |
| (9)  | $S_x^s \beta$                              | Hipótesis      |
| (10) | $S_x^t \beta$                              | ETI 1, 9       |
| (11) | $S_x^s \beta \rightarrow S_x^t \beta$      | Tma. deducción |
| (12) | $S_x^t \beta \leftrightarrow S_x^s \beta$  | IB 8, 11       |
| (13) | $S_x^t \alpha \leftrightarrow S_x^s \beta$ | MBB 4, 12      |

Ahora, para el caso general tenemos que

|               |                                                                                                        |                       |
|---------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| (1)           | $t_1 = s_1$                                                                                            | Premisa               |
| ...           |                                                                                                        |                       |
| (n)           | $t_n = s_n$                                                                                            | Premisa               |
| (n + 1)       | $\alpha \leftrightarrow \beta$                                                                         | Premisa               |
| (n + 2)       | $S_{x_n}^{t_n} \alpha \leftrightarrow S_{x_n}^{s_n} \beta$                                             | (1.43) $n, n + 1$     |
| (n + 3)       | $S_{x_{n-1}}^{t_{n-1}} S_{x_n}^{t_n} \alpha \leftrightarrow S_{x_{n-1}}^{s_{n-1}} S_{x_n}^{s_n} \beta$ | (1.43) $n - 1, n + 2$ |
| ...           |                                                                                                        |                       |
| (n + (n + 1)) | $S_{x_1}^{t_1} \cdots S_{x_n}^{t_n} \alpha \leftrightarrow S_{x_1}^{s_1} \cdots S_{x_n}^{s_n} \beta$   | (1.43) $1, n + n$     |

y con ello concluimos la prueba. 

Las siguientes versiones del Metateorema 1.17 pueden resultar útiles en algunas ocasiones:

### Metateorema 1.18

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal,  $\alpha, \beta$  dos fórmulas,  $x_1, \dots, x_n$  variables cualesquiera y  $t_1, \dots, t_n$  términos cualesquiera. Entonces se cumple que

$$\alpha \leftrightarrow \beta \vdash S_{x_1}^{t_1} \cdots S_{x_n}^{t_n} \alpha \leftrightarrow S_{x_1}^{t_1} \cdots S_{x_n}^{t_n} \beta.$$

En la deducción se generaliza únicamente respecto de  $x_1, \dots, x_n$ .

Basta aplicar el Metateorema 1.17 teniendo en cuenta que por la regla (I) se tiene siempre que  $\vdash t_i = t_i$  para cada  $i = 1, \dots, n$ . 

### Metateorema 1.19

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal,  $t, s$  dos términos,  $x_1, \dots, x_n$  variables cualesquiera y  $t_1, \dots, t_n$  términos cualesquiera. Entonces se cumple que

$$t = s \vdash S_{x_1}^{t_1} \cdots S_{x_n}^{t_n} t = S_{x_1}^{t_1} \cdots S_{x_n}^{t_n} s.$$

En la deducción se generaliza únicamente respecto de  $x_1, \dots, x_n$ .

Por el Metateorema 1.8 basta demostrar que

$$t = s \vdash w = S_{x_1}^{t_1} \cdots S_{x_n}^{t_n} t \leftrightarrow w = S_{x_1}^{t_1} \cdots S_{x_n}^{t_n} s \quad (1.44)$$

donde  $w$  es una variable que no está en  $S_{x_1}^{t_1} \cdots S_{x_n}^{t_n} t, S_{x_1}^{t_1} \cdots S_{x_n}^{t_n} s, t_1, \dots, t_n$  ni en  $x_1, \dots, x_n$ .

Ahora bien, como  $w$  no está en ninguno de estos términos tenemos que

$$w = S_{x_1}^{t_1} \cdots S_{x_n}^{t_n} t \equiv S_{x_1}^{t_1} \cdots S_{x_n}^{t_n} (w = t)$$

y

$$w = S_{x_1}^{t_1} \cdots S_{x_n}^{t_n} s \equiv S_{x_1}^{t_1} \cdots S_{x_n}^{t_n} (w = s),$$

luego por el Metateorema 1.18 basta ver que

$$t = s \vdash w = t \leftrightarrow w = s \quad (1.45)$$

para obtener que (1.44) es cierto, pero esto es inmediato por la siguiente deducción:

|     |                               |                |
|-----|-------------------------------|----------------|
| (1) | $t = s$                       | Premisa        |
| (2) | $w = t$                       | Hipótesis      |
| (3) | $w = s$                       | TI 1, 2        |
| (4) | $w = t \rightarrow w = s$     | Tma. deducción |
| (5) | $w = s$                       | Hipótesis      |
| (6) | $s = t$                       | SI 1           |
| (7) | $w = t$                       | TI 5, 6        |
| (8) | $w = s \rightarrow w = t$     | Tma. deducción |
| (9) | $w = t \leftrightarrow w = s$ | IB 4, 8        |

Con todo, queda demostrado el resultado buscado. 

Demostremos ya el Metateorema 1.16.

Supongamos **primero que  $\theta$  es una fórmula** y comencemos suponiendo que las variables  $z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n$  son todas distintas dos a dos.

Como también son todas distintas de  $x_1, \dots, x_n$  y en la deducción del Metateorema 1.17 únicamente se generaliza respecto a estas variables, utilizando el teorema de deducción y el teorema lógico  $\vdash \theta \leftrightarrow \theta$  obtenemos que

$$\vdash z_1 = w_1 \wedge \cdots \wedge z_n = w_n \rightarrow (S_{x_1}^{z_1} \cdots S_{x_n}^{z_n} \theta \leftrightarrow S_{x_1}^{w_1} \cdots S_{x_n}^{w_n} \theta). \quad (1.46)$$

Si denotamos

$$\alpha \equiv z_1 = w_1 \wedge \cdots \wedge z_n = w_n \rightarrow (S_{x_1}^{z_1} \cdots S_{x_n}^{z_n} \theta \leftrightarrow S_{x_1}^{w_1} \cdots S_{x_n}^{w_n} \theta)$$

teniendo en cuenta que ni  $z_1, \dots, z_n$  ni  $w_1, \dots, w_n$  están libres en ningún  $t_i$  y que todas estas variables son distintas dos a dos obtenemos (usando (1.36)) la demostración

|          |                                                                                                                                                            |           |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| (1)      | $\alpha$                                                                                                                                                   | (1.46)    |
| (2)      | $\wedge w_1 \alpha$                                                                                                                                        | IG 1      |
| (3)      | $\wedge z_1 w_1 \alpha$                                                                                                                                    | IG 2      |
|          | $\dots$                                                                                                                                                    |           |
| (2n + 1) | $\wedge z_n w_n \cdots z_1 w_1 \alpha$                                                                                                                     | IG 2n     |
| (2n + 2) | $S_{z_n}^{t_n} \wedge w_n \cdots z_1 w_1 \alpha \equiv \wedge w_n \cdots z_1 w_1 S_{z_n}^{t_n} \alpha$                                                     | EG 2n + 1 |
| (2n + 3) | $S_{w_n}^{t_n} \wedge z_{n-1} w_{n-1} \cdots z_1 w_1 S_{z_n}^{t_n} \alpha \equiv \wedge z_{n-1} w_{n-1} \cdots z_1 w_1 S_{w_n}^{t_n} S_{z_n}^{t_n} \alpha$ | EG 2n + 2 |
|          | $\dots$                                                                                                                                                    |           |
| (4n + 2) | $S_{w_1}^{t_1} S_{z_1}^{t_1} \cdots S_{w_n}^{t_n} S_{z_n}^{t_n} \alpha$                                                                                    |           |



Es decir, hemos obtenido que

$$\vdash S_{w_1}^{t_1} S_{z_1}^{t_1} \dots S_{w_n}^{t_n} S_{z_n}^{t_n} \alpha \quad (1.47)$$

Ahora bien, observemos que como todas las variables  $z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n$  son distintas entre sí y ninguna está libre en ningún  $t_i$  se tiene (por el Teorema 1.13 2)) que

$$\begin{aligned} S_{w_1}^{t_1} S_{z_1}^{t_1} \dots S_{w_n}^{t_n} S_{z_n}^{t_n} \alpha &\equiv \\ &\equiv S_{w_1}^{t_1} S_{z_1}^{t_1} \dots S_{w_n}^{t_n} S_{z_n}^{t_n} (z_1 = w_1 \wedge \dots \wedge z_n = w_n) \rightarrow \\ &\rightarrow S_{w_1}^{t_1} S_{z_1}^{t_1} \dots S_{w_n}^{t_n} S_{z_n}^{t_n} (S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta \leftrightarrow S_{x_1}^{w_1} \dots S_{x_n}^{w_n} \theta) \equiv \\ &\equiv (t_1 = t_1 \wedge \dots \wedge t_n = t_n) \rightarrow \\ &\rightarrow (S_{w_1}^{t_1} S_{z_1}^{t_1} \dots S_{w_n}^{t_n} S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta \leftrightarrow S_{w_1}^{t_1} S_{z_1}^{t_1} \dots S_{w_n}^{t_n} S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{w_1} \dots S_{x_n}^{w_n} \theta), \end{aligned}$$

luego como es claro que

$$\vdash t_1 = t_1 \wedge \dots \wedge t_n = t_n$$

usando MP junto a (1.47) obtenemos que

$$\vdash S_{w_1}^{t_1} S_{z_1}^{t_1} \dots S_{w_n}^{t_n} S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta \leftrightarrow S_{w_1}^{t_1} S_{z_1}^{t_1} \dots S_{w_n}^{t_n} S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{w_1} \dots S_{x_n}^{w_n} \theta. \quad (1.48)$$

Por otra parte, observemos que como  $w_n$  no está libre en  $S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta$  (pues  $w_n$  no está libre en  $\theta$  ni tampoco en  $t_n, z_1, \dots, z_n$  y basta aplicar el Teorema 1.13 3)) se tiene por el Teorema 1.13 2) que

$$S_{w_n}^{t_n} S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta \equiv S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta.$$

De igual modo, como  $w_{n-1}$  no está libre en  $S_{z_{n-1}}^{t_{n-1}} S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta$  usando lo anterior y el Teorema 1.13 2) se obtiene que

$$S_{w_{n-1}}^{t_{n-1}} S_{z_{n-1}}^{t_{n-1}} S_{w_n}^{t_n} S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta \equiv S_{z_{n-1}}^{t_{n-1}} S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta.$$

Iterando este proceso obtenemos finalmente que

$$S_{w_1}^{t_1} S_{z_1}^{t_1} \dots S_{w_n}^{t_n} S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta \equiv S_{z_1}^{t_1} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta. \quad (1.49)$$

De forma completamente análoga se obtiene que

$$S_{w_1}^{t_1} S_{z_1}^{t_1} \dots S_{w_n}^{t_n} S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{w_1} \dots S_{x_n}^{w_n} \theta \equiv S_{w_1}^{t_1} \dots S_{w_n}^{t_n} S_{x_1}^{w_1} \dots S_{x_n}^{w_n} \theta. \quad (1.50)$$

y por (1.48), (1.49) y (1.50) concluimos esta parte de la demostración.

Veamos ahora el caso general donde  $z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n$  son variables cualesquiera<sup>6</sup> de modo que no están libres en  $t_1, \dots, t_n, \theta$  ni en  $x_1, \dots, x_n$ .

Tomando entonces unas nuevas variables  $y_1, \dots, y_n$  que tampoco estén libres en  $t_1, \dots, t_n, \theta$  ni en  $x_1, \dots, x_n$  y que sean distintas de cada  $z_i$  y  $w_j$  se tiene que, aplicando lo ya demostrado, obtenemos que

$$\vdash S_{z_1}^{t_1} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta \leftrightarrow S_{y_1}^{t_1} \dots S_{y_n}^{t_n} S_{x_1}^{y_1} \dots S_{x_n}^{y_n} \theta$$

---

<sup>6</sup> Es decir, los  $z_i$  son disjuntos dos a dos e igualmente para los  $w_j$ , aunque tal vez puedan haber variables comunes entre los  $z_i$  y los  $w_j$ .

y

$$\vdash S_{y_1}^{t_1} \dots S_{y_n}^{t_n} S_{x_1}^{y_1} \dots S_{x_n}^{y_n} \theta \leftrightarrow S_{w_1}^{t_1} \dots S_{w_n}^{t_n} S_{x_1}^{w_1} \dots S_{x_n}^{w_n} \theta,$$

y claramente estas dos fórmulas permiten probar lo deseado.

Finalmente, para el caso en el que  $\theta$  es un término podemos aplicar el Metateorema 1.8 que nos dice que bastará ver que

$$\vdash w = S_{z_1}^{t_1} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta \leftrightarrow w = S_{w_1}^{t_1} \dots S_{w_n}^{t_n} S_{x_1}^{w_1} \dots S_{x_n}^{w_n} \theta \quad (1.51)$$

donde  $w$  es una variable que no está en  $t_1, \dots, t_n, \theta, x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n$  ni en  $w_1, \dots, w_n$ .

Ahora bien, como  $w$  es distinta de  $x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n$ , se tiene que

$$w = S_{z_1}^{t_1} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta \equiv S_{z_1}^{t_1} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} (w = \theta)$$

y

$$w = S_{w_1}^{t_1} \dots S_{w_n}^{t_n} S_{x_1}^{w_1} \dots S_{x_n}^{w_n} \theta \equiv S_{w_1}^{t_1} \dots S_{w_n}^{t_n} S_{x_1}^{w_1} \dots S_{x_n}^{w_n} (w = \theta),$$

luego por (1.51) basta ver que

$$\vdash S_{z_1}^{t_1} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} (w = \theta) \leftrightarrow S_{w_1}^{t_1} \dots S_{w_n}^{t_n} S_{x_1}^{w_1} \dots S_{x_n}^{w_n} (w = \theta). \quad (1.52)$$

Observemos entonces que esta última fórmula no es más que un caso particular del teorema que estamos demostrando tomando como fórmula  $w = \theta$  (pues claramente las variables  $z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n$  no están libres en  $w = \theta$ ) y, como ya lo hemos demostrado para el caso en el que la expresión dada es una fórmula, obtenemos que efectivamente se satisface (1.52) y queda pues demostrado el caso para términos. 

Demostraremos también otra caracterización de la sustitución para varias variables en el caso de fórmulas:

### Metateorema 1.20

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal,  $\alpha(x_1, \dots, x_n)$  una fórmula,  $t_1, \dots, t_n$  términos y  $z_1, \dots, z_n$  variables que no están libres en  $t_1, \dots, t_n, \alpha$  ni en  $x_1, \dots, x_n$ . Se cumplen:

- (i)  $\vdash \alpha(t_1, \dots, t_n) \leftrightarrow \forall z_1 \dots z_n (z_1 = t_1 \wedge \dots \wedge z_n = t_n \wedge S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha)$ .
- (ii)  $\vdash \alpha(t_1, \dots, t_n) \leftrightarrow \bigwedge z_1 \dots z_n ((z_1 = t_1 \wedge \dots \wedge z_n = t_n) \rightarrow S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha)$ .

En primer lugar, por el Metateorema 1.16 sabemos que<sup>7</sup>

$$\vdash \alpha(t_1, \dots, t_n) \leftrightarrow S_{z_1}^{t_1} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha.$$

Por tanto, para demostrar (i) basta ver que

$$\vdash S_{z_1}^{t_1} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha \leftrightarrow \bigvee z_1 \dots z_n (z_1 = t_1 \wedge \dots \wedge z_n = t_n \wedge S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha). \quad (1.53)$$

<sup>7</sup> Para el caso en el que hay una única variable utilizamos el Metateorema 2.3 para obtener la equivalencia.

Sin más, para la implicación de izquierda a derecha tenemos:

|          |                                                                                                                                           |                   |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|
| (1)      | $S_{z_1}^{t_1} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha$                                                              | Hipótesis         |
| (2)      | $t_1 = t_1 \equiv S_{z_1}^{t_1} \dots S_{z_n}^{t_n} (z_1 = t_1)$                                                                          | I                 |
| ...      |                                                                                                                                           |                   |
| (n + 1)  | $t_n = t_n \equiv S_{z_1}^{t_1} \dots S_{z_n}^{t_n} (z_n = t_n)$                                                                          | I                 |
| (n + 2)  | $S_{z_1}^{t_1} \dots S_{z_n}^{t_n} (z_1 = t_1 \wedge z_2 = t_2)$                                                                          | IC 2, 3           |
| ...      |                                                                                                                                           |                   |
| (2n)     | $S_{z_1}^{t_1} \dots S_{z_n}^{t_n} (z_1 = t_1 \wedge \dots \wedge z_n = t_n)$                                                             | IC n + 1, 2n - 1  |
| (2n + 1) | $S_{z_1}^{t_1} \dots S_{z_n}^{t_n} (z_1 = t_1 \wedge \dots \wedge z_n = t_n \wedge S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha)$             | IC 2n, 1          |
| (2n + 2) | $\bigvee z_1 S_{z_2}^{t_2} \dots S_{z_n}^{t_n} (z_1 = t_1 \wedge \dots \wedge z_n = t_n \wedge S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha)$ | IP 2n + 1         |
| (2n + 3) | $S_{z_2}^{t_2} \dots S_{z_n}^{t_n} \bigvee z_1 (z_1 = t_1 \wedge \dots \wedge z_n = t_n \wedge S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha)$ | R 2n + 2 [(1.37)] |
| ...      |                                                                                                                                           |                   |
| (4n)     | $\bigvee z_n \dots z_1 (z_1 = t_1 \wedge \dots \wedge z_n = t_n \wedge S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha)$                         | IP 4n - 1         |
| (4n + 1) | $\beta$                                                                                                                                   | Tma. deducción    |

donde

$$\beta \equiv S_{z_1}^{t_1} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha \rightarrow \bigvee z_n \dots z_1 (z_1 = t_1 \wedge \dots \wedge z_n = t_n \wedge S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha).$$

Como es claro que<sup>8</sup>

$$\begin{aligned} & \bigvee z_n \dots z_1 (z_1 = t_1 \wedge \dots \wedge z_n = t_n \wedge S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha) \leftrightarrow \\ & \bigvee z_1 \dots z_n (z_1 = t_1 \wedge \dots \wedge z_n = t_n \wedge S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha) \end{aligned}$$

obtenemos la implicación deseada.

Para la otra implicación tenemos:

|          |                                                                                                                                              |                              |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|
| (1)      | $\bigvee z_1 \dots z_n (z_1 = t_1 \wedge \dots \wedge z_n = t_n \wedge S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha)$                            | Hipótesis                    |
| (2)      | $\bigvee z_2 \dots z_n (z_1 = t_1 \wedge \dots \wedge z_n = t_n \wedge S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha)$                            | EP 1 ( $z_1$ no libre en 1)  |
| ...      |                                                                                                                                              |                              |
| (n + 1)  | $z_1 = t_1 \wedge \dots \wedge z_n = t_n \wedge S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha$                                                    | EP n ( $z_n$ no libre 1 - n) |
| (n + 2)  | $S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha \equiv S_{z_n}^{z_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha$                                     | EC n + 1                     |
| (n + 3)  | $t_n = z_n$                                                                                                                                  | SI (EC n + 1)                |
| (n + 4)  | $S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha \equiv S_{z_{n-1}}^{z_{n-1}} S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha$ | ETI n + 2, n + 3             |
| (n + 5)  | $t_{n-1} = z_{n-1}$                                                                                                                          | SI (EC n + 1)                |
| (n + 6)  | $S_{z_{n-1}}^{t_{n-1}} S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha$                                                               | ETI n + 4, n + 5             |
| ...      |                                                                                                                                              |                              |
| (3n + 2) | $S_{z_1}^{t_1} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha$                                                                 | ETI 3n, 3n + 1 <sup>9</sup>  |
| (3n + 3) | $\gamma$                                                                                                                                     | Tma. deducción               |

donde

$$\gamma \equiv \bigvee z_1 \dots z_n (z_1 = t_1 \wedge \dots \wedge z_n = t_n \wedge S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha) \rightarrow S_{z_1}^{t_1} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha$$

<sup>8</sup> Basta eliminar todos los particularizadores y después introducirlos en el orden correcto.

<sup>9</sup> Ningún  $z_i$  está libre en la fórmula pues no está libre en ningún  $t_j$  y basta aplicar el Teorema 1.13 3).

tal y como buscábamos.

Por lo visto basta utilizar IB para obtener (1.53) y con ello probar (i).

Igualmente, utilizando el Metateorema 1.16 se tiene que **para probar (ii)** basta con ver que

$$\vdash S_{z_1}^{t_1} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha \leftrightarrow \bigwedge z_1 \dots z_n \left( (z_1 = t_1 \wedge \dots \wedge z_n = t_n) \rightarrow S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha \right). \quad (1.54)$$

Para la implicación de izquierda a derecha tenemos entonces:

|          |                                                                                                                                                                |                           |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| (1)      | $S_{z_1}^{t_1} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha$                                                                                   | Hipótesis                 |
| (2)      | $z_1 = t_1 \wedge \dots \wedge z_n = t_n$                                                                                                                      | Hipótesis                 |
| (3)      | $z_1 = t_1$                                                                                                                                                    | EC 2                      |
| (4)      | $S_{z_1}^{z_1} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha \equiv S_{z_2}^{t_2} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha$ | ETI 1, 3                  |
| (5)      | $z_2 = t_2$                                                                                                                                                    | EC 2                      |
| (6)      | $S_{z_2}^{z_2} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha \equiv S_{z_3}^{t_3} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha$ | ETI 4, 5                  |
| ...      |                                                                                                                                                                |                           |
| (2n)     | $S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha$                                                                                                       | ETI $2n - 2, 2n - 1$      |
| (2n + 1) | $z_n = t_n$                                                                                                                                                    | EC 2                      |
| (2n + 2) | $S_{z_n}^{z_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha \equiv S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha$                                                       | ETI $2n, 2n + 1$          |
| (2n + 3) | $(z_1 = t_1 \wedge \dots \wedge z_n = t_n) \rightarrow S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha$                                                               | Tma. deducción            |
| (2n + 4) | $\bigwedge z_n \left( (z_1 = t_1 \wedge \dots \wedge z_n = t_n) \rightarrow S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha \right)$                                  | IG $2n + 3$ <sup>10</sup> |
| ...      |                                                                                                                                                                |                           |
| (3n + 3) | $\bigwedge z_1 \dots z_n \left( (z_1 = t_1 \wedge \dots \wedge z_n = t_n) \rightarrow S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha \right)$                        | IG $3n + 2$               |
| (3n + 4) | $\delta$                                                                                                                                                       | Tma. deducción            |

donde

$$\delta \equiv S_{z_1}^{t_1} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha \rightarrow \bigwedge z_1 \dots z_n \left( (z_1 = t_1 \wedge \dots \wedge z_n = t_n) \rightarrow S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha \right)$$

tal y como buscábamos.

Para la otra implicación observemos primero que sin más que eliminar los generalizadores y luego introducirlos en el orden buscado se tiene que

$$\begin{aligned} & \bigwedge z_1 \dots z_n \left( (z_1 = t_1 \wedge \dots \wedge z_n = t_n) \rightarrow S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha \right) \leftrightarrow \\ & \bigwedge z_n \dots z_1 \left( (z_1 = t_1 \wedge \dots \wedge z_n = t_n) \rightarrow S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha \right) \end{aligned} \quad (1.55)$$

y con ello (y usando (1.36) junto a que ningún  $z_i$  está libre en ningún  $t_j$ ) tenemos:

|         |                                                                                                                                                           |                   |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|
| (1)     | $\bigwedge z_1 \dots z_n \left( (z_1 = t_1 \wedge \dots \wedge z_n = t_n) \rightarrow S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha \right)$                   | Hipótesis         |
| (2)     | $\bigwedge z_n \dots z_1 \left( (z_1 = t_1 \wedge \dots \wedge z_n = t_n) \rightarrow S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha \right)$                   | SE 1, (1.55)      |
| (3)     | $\bigwedge z_{n-1} \dots z_1 S_{z_n}^{t_n} \left( (z_1 = t_1 \wedge \dots \wedge z_n = t_n) \rightarrow S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha \right)$ | EG 2              |
| ...     |                                                                                                                                                           |                   |
| (n + 2) | $S_{z_1}^{t_1} \dots S_{z_n}^{t_n} \left( (z_1 = t_1 \wedge \dots \wedge z_n = t_n) \rightarrow S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha \right)$         | EG $n + 1$        |
| (n + 3) | $(t_1 = t_1 \wedge \dots \wedge t_n = t_n) \rightarrow S_{z_1}^{t_1} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha$                        | R $n + 2$         |
| (n + 4) | $t_1 = t_1 \wedge \dots \wedge t_n = t_n$                                                                                                                 | Tma. lógico       |
| (n + 5) | $S_{z_1}^{t_1} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha$                                                                              | MP $n + 3, n + 4$ |
| (n + 6) | $\epsilon$                                                                                                                                                | Tma. deducción    |

<sup>10</sup> Esta generalización y las sucesivas son válidas pues, como vimos en la prueba de (i), ningún  $z_i$  está libre en  $S_{z_1}^{t_1} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha$ .

donde

$$\epsilon \equiv \bigwedge z_1 \cdots z_n \left( (z_1 = t_1 \wedge \cdots \wedge z_n = t_n) \rightarrow S_{x_1}^{z_1} \cdots S_{x_n}^{z_n} \alpha \right) \rightarrow S_{z_1}^{t_1} \cdots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \cdots S_{x_n}^{z_n} \alpha$$

obteniendo pues la implicación buscada.

Con todo lo visto basta utilizar IB para obtener (1.54) y con ello probar (ii). 

Más aún, el Metateorema 1.20 nos permite probar de forma fácil el siguiente resultado que nos permite trabajar de forma cómoda con las sustituciones:

### Metateorema 1.21

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal,  $s_1, \dots, s_m, t_1, \dots, t_n$  términos y  $\theta(x_1, \dots, x_n)$  una expresión cuyas variables libres están entre las indicadas. Entonces, si  $\theta$  es una fórmula se cumple que

$$\vdash S_{y_1}^{s_1} \cdots S_{y_m}^{s_m} \theta(t_1, \dots, t_n) \leftrightarrow \theta(S_{y_1}^{s_1} \cdots S_{y_m}^{s_m} t_1, \dots, S_{y_1}^{s_1} \cdots S_{y_m}^{s_m} t_n)$$

y si  $\theta$  es un término se cumple que

$$\vdash S_{y_1}^{s_1} \cdots S_{y_m}^{s_m} \theta(t_1, \dots, t_n) = \theta(S_{y_1}^{s_1} \cdots S_{y_m}^{s_m} t_1, \dots, S_{y_1}^{s_1} \cdots S_{y_m}^{s_m} t_n).$$

Veamos primero el caso en el que  $\theta$  es una **fórmula** por inducción en el número de sustituciones.

En primer lugar, si únicamente hay una sustitución debemos ver que

$$\vdash S_x^t \theta(t_1, \dots, t_n) \leftrightarrow \theta(S_x^t t_1, \dots, S_x^t t_n). \quad (1.56)$$

Por el Metateorema 1.20 (i) tenemos que si  $z_1, \dots, z_n$  son variables que no están en  $t, t_1, \dots, t_n, S_x^t t_1, \dots, S_x^t t_n, \theta$  ni en  $x, x_1, \dots, x_n$  se cumple que

$$\vdash \theta(t_1, \dots, t_n) \leftrightarrow \bigvee z_1 \cdots z_n \left( z_1 = t_1 \wedge \cdots \wedge z_n = t_n \wedge S_{x_1}^{z_1} \cdots S_{x_n}^{z_n} \theta \right).$$

Por el Metateorema 1.18 obtenemos entonces que

$$\vdash S_x^t \theta(t_1, \dots, t_n) \leftrightarrow S_x^t \left( \bigvee z_1 \cdots z_n \left( z_1 = t_1 \wedge \cdots \wedge z_n = t_n \wedge S_{x_1}^{z_1} \cdots S_{x_n}^{z_n} \theta \right) \right).$$

Ahora bien, usando (1.37) y que  $x$  no está libre en  $S_{x_1}^{z_1} \cdots S_{x_n}^{z_n} \theta$ <sup>11</sup> se tiene que

$$\begin{aligned} S_x^t \left( \bigvee z_1 \cdots z_n \left( z_1 = t_1 \wedge \cdots \wedge z_n = t_n \wedge S_{x_1}^{z_1} \cdots S_{x_n}^{z_n} \theta \right) \right) &\equiv \\ \bigvee z_1 \cdots z_n \left( z_1 = S_x^t t_1 \wedge \cdots \wedge z_n = S_x^t t_n \wedge S_{x_1}^{z_1} \cdots S_{x_n}^{z_n} \theta \right), \end{aligned}$$

luego realmente tenemos que

$$\vdash S_x^t \theta(t_1, \dots, t_n) \leftrightarrow \bigvee z_1 \cdots z_n \left( z_1 = S_x^t t_1 \wedge \cdots \wedge z_n = S_x^t t_n \wedge S_{x_1}^{z_1} \cdots S_{x_n}^{z_n} \theta \right).$$

Aplicando entonces la regla (MBB) a la equivalencia anterior y al Metateorema 1.20 (i) obtenemos (1.56).

<sup>11</sup> En efecto, como  $x$  es distinto de cada  $z_i$ , por el Teorema 1.13 3) se tiene que si  $x$  estuviera libre en dicha fórmula, entonces debe ser distinto de cada  $x_i$  y estar libre en  $\theta$ , lo cual no es posible.

Supongamos ahora que el resultado es cierto para  $k < m$  sustituciones y veamos que entonces lo es para  $m$  sustituciones.

Por hipótesis de inducción tenemos entonces que

$$\vdash S_{y_2}^{s_2} \dots S_{y_m}^{s_m} \theta(t_1, \dots, t_n) \leftrightarrow \theta(S_{y_2}^{s_2} \dots S_{y_m}^{s_m} t_1, \dots, S_{y_2}^{s_2} \dots S_{y_m}^{s_m} t_n)$$

y por el Metateorema 1.18 obtenemos que

$$\vdash S_{y_1}^{s_1} \dots S_{y_m}^{s_m} \theta(t_1, \dots, t_n) \leftrightarrow S_{y_1}^{s_1} \theta(S_{y_2}^{s_2} \dots S_{y_m}^{s_m} t_1, \dots, S_{y_2}^{s_2} \dots S_{y_m}^{s_m} t_n). \quad (1.57)$$

Ahora bien, por el caso para una única sustitución tenemos también que

$$\vdash S_{y_1}^{s_1} \theta(S_{y_2}^{s_2} \dots S_{y_m}^{s_m} t_1, \dots, S_{y_2}^{s_2} \dots S_{y_m}^{s_m} t_n) \leftrightarrow \theta(S_{y_1}^{s_1} \dots S_{y_m}^{s_m} t_1, \dots, S_{y_1}^{s_1} \dots S_{y_m}^{s_m} t_n), \quad (1.58)$$

luego aplicando la regla (MBB) a (1.57) y (1.58) obtenemos lo deseado y concluimos la inducción.

Esto prueba el resultado cuando  $\theta$  es una fórmula.

Por otra parte, si  $\theta$  es un término por el Metateorema 1.8 basta ver que

$$\vdash w = S_{y_1}^{s_1} \dots S_{y_m}^{s_m} \theta(t_1, \dots, t_n) \leftrightarrow w = \theta(S_{y_1}^{s_1} \dots S_{y_m}^{s_m} t_1, \dots, S_{y_1}^{s_1} \dots S_{y_m}^{s_m} t_n), \quad (1.59)$$

donde  $w$  es una variable que no está en la fórmula  $S_{y_1}^{s_1} \dots S_{y_m}^{s_m} \theta(t_1, \dots, t_n)$  ni tampoco en  $\theta(S_{y_1}^{s_1} \dots S_{y_m}^{s_m} t_1, \dots, S_{y_1}^{s_1} \dots S_{y_m}^{s_m} t_n)$  y que es distinta de  $y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_n$ .

Para ello, observemos que si denotamos por  $\beta(w, x_1, \dots, x_n) \equiv w = \theta$ , se tiene que es una fórmula cuyas variables libres están entre las indicadas y por lo visto para el caso donde  $\theta$  era una fórmula tenemos que

$$\vdash S_{y_1}^{s_1} \dots S_{y_m}^{s_m} \beta(w, t_1, \dots, t_n) \leftrightarrow \beta(S_{y_1}^{s_1} \dots S_{y_m}^{s_m} w, S_{y_1}^{s_1} \dots S_{y_m}^{s_m} t_1, \dots, S_{y_1}^{s_1} \dots S_{y_m}^{s_m} t_n),$$

luego teniendo en cuenta que

$$S_{y_1}^{s_1} \dots S_{y_m}^{s_m} w \equiv w,$$

se tiene que

$$\vdash S_{y_1}^{s_1} \dots S_{y_m}^{s_m} \beta(w, t_1, \dots, t_n) \leftrightarrow \beta(w, S_{y_1}^{s_1} \dots S_{y_m}^{s_m} t_1, \dots, S_{y_1}^{s_1} \dots S_{y_m}^{s_m} t_n). \quad (1.60)$$

Ahora, si  $r_1, \dots, r_n$  son términos, observemos que por el Metateorema 1.16 tenemos que

$$\vdash \beta(w, r_1, \dots, r_n) \leftrightarrow S_z^w S_{z_1}^{r_1} \dots S_{z_n}^{r_n} S_w^z S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \beta \quad (1.61)$$

y

$$\vdash S_{z_1}^{r_1} \dots S_{z_n}^{r_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta = \theta(r_1, \dots, r_n) \quad (1.62)$$

siendo  $z, z_1, \dots, z_n$  variables que no están en  $w, r_1, \dots, r_n$  ni en  $\beta$  y son distintas de  $w, x_1, \dots, x_n$ . Observando entonces que

$$S_z^w S_{z_1}^{r_1} \dots S_{z_n}^{r_n} S_w^z S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \beta \equiv w = S_{z_1}^{r_1} \dots S_{z_n}^{r_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta,$$

por (1.61) tenemos que

$$\vdash S_a^{S_{z_1}^{r_1} \dots S_{z_n}^{r_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta} (\beta(w, r_1, \dots, r_n) \leftrightarrow w = a) \quad (1.63)$$

con  $a$  una variable que no está en  $\beta(w, r_1, \dots, r_n)$  ni en  $w$ . Utilizando entonces la regla (ETI) con (1.62) y (1.63) concluimos que

$$\vdash \beta(w, r_1, \dots, r_n) \leftrightarrow w = \theta(r_1, \dots, r_n). \quad (1.64)$$

Como (1.64) es cierta para cualesquiera términos  $r_1, \dots, r_n$ , por el Metateorema 1.18 obtenemos que

$$\vdash S_{y_1}^{s_1} \dots S_{y_m}^{s_m} \beta(w, t_1, \dots, t_n) \leftrightarrow w = S_{y_1}^{s_1} \dots S_{y_m}^{s_m} \theta(t_1, \dots, t_n), \quad (1.65)$$

y también que

$$\vdash \beta(w, S_{y_1}^{s_1} \dots S_{y_m}^{s_m} t_1, \dots, S_{y_1}^{s_1} \dots S_{y_m}^{s_m} t_n) \leftrightarrow w = \theta(S_{y_1}^{s_1} \dots S_{y_m}^{s_m} t_1, \dots, S_{y_1}^{s_1} \dots S_{y_m}^{s_m} t_n). \quad (1.66)$$

Aplicando entonces la regla (MBB) a (1.60), (1.65) y (1.66) obtenemos que

$$\vdash w = S_{y_1}^{s_1} \dots S_{y_m}^{s_m} \theta(t_1, \dots, t_n) \leftrightarrow w = \theta(S_{y_1}^{s_1} \dots S_{y_m}^{s_m} t_1, \dots, S_{y_1}^{s_1} \dots S_{y_m}^{s_m} t_n),$$

es decir, obtenemos (1.59) y con ello concluimos la demostración. 

Por último, vamos un resultado que justifica que el orden de las sustituciones en todo lo anterior es indiferente:

### Metateorema 1.22

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal,  $\theta$  una expresión,  $t_1, \dots, t_n$  términos y  $x_1, \dots, x_n$  variables distintas de modo que  $x_i$  no está libre en ningún  $t_j$  con  $i \neq j$ . Entonces, para cualquier permutación  $\pi$  del conjunto  $\{1, \dots, n\}$  se tiene que si  $\theta$  es una fórmula se cumple que

$$\vdash S_{x_1}^{t_1} \dots S_{x_n}^{t_n} \theta \leftrightarrow S_{x_{\pi(1)}}^{t_{\pi(1)}} \dots S_{x_{\pi(n)}}^{t_{\pi(n)}} \theta$$

y si  $\theta$  es un término se cumple que

$$\vdash S_{x_1}^{t_1} \dots S_{x_n}^{t_n} \theta = S_{x_{\pi(1)}}^{t_{\pi(1)}} \dots S_{x_{\pi(n)}}^{t_{\pi(n)}} \theta.$$

Dada  $\pi$  una permutación arbitraria demostremos el resultado por inducción en la longitud de  $\theta$ :

- Si  $\theta \equiv x$  podemos distinguir dos casos:

- Si  $x$  es distinta de cada  $x_i$ , entonces

$$S_{x_1}^{t_1} \dots S_{x_n}^{t_n} \theta \equiv x \equiv S_{x_{\pi(1)}}^{t_{\pi(1)}} \dots S_{x_{\pi(n)}}^{t_{\pi(n)}} \theta.$$

- Si  $x \equiv x_i$  para algún  $i = 1, \dots, n$ , entonces como  $x_i$  no está libre en ningún  $t_j$  y las variables  $x_1, \dots, x_n$  son distintas entre sí tenemos (usando el Teorema 1.13 2))

$$S_{x_1}^{t_1} \dots S_{x_n}^{t_n} \theta \equiv S_{x_1}^{t_1} \dots S_{x_{i-1}}^{t_{i-1}} t_i \equiv t_i. \quad (1.67)$$

Por otro lado, como  $\pi$  es una permutación existe un  $j = 1, \dots, n$  tal que  $\pi(j) = i$  y  $\pi(j) \neq k$  para cada  $k \neq i$ , luego por el mismo argumento que antes obtenemos que

$$S_{x_{\pi(1)}}^{t_{\pi(1)}} \dots S_{x_{\pi(n)}}^{t_{\pi(n)}} \theta \equiv S_{x_{\pi(1)}}^{t_{\pi(1)}} \dots S_{x_{\pi(j-1)}}^{t_{\pi(j-1)}} t_{\pi(j)} \equiv t_{\pi(j)} \equiv t_i. \quad (1.68)$$

Por (1.67) y (1.68) obtenemos lo deseado.

- Si  $\theta \equiv c$ , entonces

$$S_{x_1}^{t_1} \cdots S_{x_n}^{t_n} \theta \equiv c \equiv S_{x_{\pi(1)}}^{t_{\pi(1)}} \cdots S_{x_{\pi(n)}}^{t_{\pi(n)}} \theta.$$

- Si  $\theta \equiv R_i^m s_1 \cdots s_m$ , por hipótesis de inducción tenemos que para cada  $j = 1, \dots, m$  se cumple que

$$\vdash S_{x_1}^{t_1} \cdots S_{x_n}^{t_n} s_j = S_{x_{\pi(1)}}^{t_{\pi(1)}} \cdots S_{x_{\pi(n)}}^{t_{\pi(n)}} s_j.$$

Utilizando entonces el Metateorema 2.16 obtenemos que

$$\vdash R_i^m S_{x_1}^{t_1} \cdots S_{x_n}^{t_n} s_1 \cdots s_m \leftrightarrow R_i^m S_{x_{\pi(1)}}^{t_{\pi(1)}} \cdots S_{x_{\pi(n)}}^{t_{\pi(n)}} s_1 \cdots s_m,$$

que, por la definición de sustitución, es exactamente lo que buscábamos demostrar.

- Si  $\theta \equiv f_i^m s_1 \cdots s_m$  se prueba de forma completamente análoga al caso anterior sustituyendo el uso del Metateorema 2.16 por el del Metateorema 2.17.
- Si  $\theta \equiv \neg \alpha$ , por hipótesis de inducción tenemos que

$$\vdash S_{x_1}^{t_1} \cdots S_{x_n}^{t_n} \alpha \leftrightarrow S_{x_{\pi(1)}}^{t_{\pi(1)}} \cdots S_{x_{\pi(n)}}^{t_{\pi(n)}} \alpha,$$

luego por el Teorema 2.11 1) obtenemos que

$$\vdash \neg S_{x_1}^{t_1} \cdots S_{x_n}^{t_n} \alpha \leftrightarrow \neg S_{x_{\pi(1)}}^{t_{\pi(1)}} \cdots S_{x_{\pi(n)}}^{t_{\pi(n)}} \alpha$$

que, por la definición de sustitución, es exactamente lo que buscábamos demostrar.

- Si  $\theta \equiv \alpha \rightarrow \beta$ , por hipótesis de inducción tenemos que

$$\vdash S_{x_1}^{t_1} \cdots S_{x_n}^{t_n} \alpha \leftrightarrow S_{x_{\pi(1)}}^{t_{\pi(1)}} \cdots S_{x_{\pi(n)}}^{t_{\pi(n)}} \alpha$$

y

$$\vdash S_{x_1}^{t_1} \cdots S_{x_n}^{t_n} \beta \leftrightarrow S_{x_{\pi(1)}}^{t_{\pi(1)}} \cdots S_{x_{\pi(n)}}^{t_{\pi(n)}} \beta,$$

luego por el Teorema 2.11 2) obtenemos que

$$\vdash (S_{x_1}^{t_1} \cdots S_{x_n}^{t_n} \alpha \rightarrow S_{x_1}^{t_1} \cdots S_{x_n}^{t_n} \beta) \leftrightarrow (S_{x_{\pi(1)}}^{t_{\pi(1)}} \cdots S_{x_{\pi(n)}}^{t_{\pi(n)}} \alpha \rightarrow S_{x_{\pi(1)}}^{t_{\pi(1)}} \cdots S_{x_{\pi(n)}}^{t_{\pi(n)}} \beta)$$

que, por la definición de sustitución, es exactamente lo que buscábamos demostrar.

- Si  $\theta \equiv \bigwedge x \alpha$ , consideremos  $z$  una variable distinta de  $x_1, \dots, x_n$  que no esté en  $t_1, \dots, t_n$  ni en  $\alpha$  y observemos que entonces<sup>12</sup>

$$\vdash \theta \leftrightarrow \bigwedge z S_x^z \alpha.$$

<sup>12</sup> En efecto, la demostración es inmediata:

|     |                                                           |                           |     |                                                               |                           |
|-----|-----------------------------------------------------------|---------------------------|-----|---------------------------------------------------------------|---------------------------|
| (1) | $\bigwedge x \alpha$                                      | Hipótesis                 | (5) | $\bigwedge z S_x^z \alpha$                                    | Hipótesis                 |
| (2) | $S_x^z \alpha$                                            | EG 1                      | (6) | $S_x^x S_x^z \alpha \equiv \alpha$                            | EG 5 [Teo. 1.13 4)]       |
| (3) | $\bigwedge z S_x^z \alpha$                                | IG 2 ( $z$ no libre en 1) | (7) | $\bigwedge x \alpha$                                          | IG 6 ( $x$ no libre en 5) |
| (4) | $\bigwedge x \alpha \rightarrow \bigwedge z S_x^z \alpha$ | Tma. deducción            | (8) | $\bigwedge z S_x^z \alpha \rightarrow \bigwedge x \alpha$     | Tma. deducción            |
|     |                                                           |                           | (9) | $\bigwedge x \alpha \leftrightarrow \bigwedge z S_x^z \alpha$ | IB 4, 8                   |



Por el Metateorema 1.18 tenemos entonces que

$$\vdash S_{x_1}^{t_1} \dots S_{x_n}^{t_n} \theta \leftrightarrow S_{x_1}^{t_1} \dots S_{x_n}^{t_n} \bigwedge z S_x^z \alpha$$

y

$$\vdash S_{x_{\pi(1)}}^{t_{\pi(1)}} \dots S_{x_{\pi(n)}}^{t_{\pi(n)}} \theta \leftrightarrow S_{x_{\pi(1)}}^{t_{\pi(1)}} \dots S_{x_{\pi(n)}}^{t_{\pi(n)}} \bigwedge z S_x^z \alpha,$$

con lo que, por la regla (MBB), basta ver que

$$\vdash S_{x_1}^{t_1} \dots S_{x_n}^{t_n} \bigwedge z S_x^z \alpha \leftrightarrow S_{x_{\pi(1)}}^{t_{\pi(1)}} \dots S_{x_{\pi(n)}}^{t_{\pi(n)}} \bigwedge z S_x^z \alpha,$$

lo que por (1.36) se reduce a ver que

$$\vdash \bigwedge z S_{x_1}^{t_1} \dots S_{x_n}^{t_n} S_x^z \alpha \leftrightarrow \bigwedge z S_{x_{\pi(1)}}^{t_{\pi(1)}} \dots S_{x_{\pi(n)}}^{t_{\pi(n)}} S_x^z \alpha. \quad (1.69)$$

Por hipótesis de inducción aplicada a  $S_x^z \alpha$  (que tiene la misma longitud de  $\alpha$  por el Metateorema 1.6) tenemos que

$$\vdash S_{x_1}^{t_1} \dots S_{x_n}^{t_n} S_x^z \alpha \leftrightarrow S_{x_{\pi(1)}}^{t_{\pi(1)}} \dots S_{x_{\pi(n)}}^{t_{\pi(n)}} S_x^z \alpha$$

y por el Metateorema 2.10 obtenemos (1.69) tal y como buscábamos.

- Si  $\theta \equiv x|\alpha$ , consideramos  $z$  una variable distinta de  $x_1, \dots, x_n$  que no esté en  $t_1, \dots, t_n$  ni en  $\alpha$  y obtenemos por el Metateorema 3.7 que

$$\vdash \theta = z|S_x^z \alpha.$$

Por el Metateorema 1.19 tenemos entonces que

$$\vdash S_{x_1}^{t_1} \dots S_{x_n}^{t_n} \theta = S_{x_1}^{t_1} \dots S_{x_n}^{t_n} (z|S_x^z \alpha)$$

y

$$\vdash S_{x_{\pi(1)}}^{t_{\pi(1)}} \dots S_{x_{\pi(n)}}^{t_{\pi(n)}} \theta = S_{x_{\pi(1)}}^{t_{\pi(1)}} \dots S_{x_{\pi(n)}}^{t_{\pi(n)}} (z|S_x^z \alpha),$$

con lo que, por la regla (TI), basta ver que

$$\vdash S_{x_1}^{t_1} \dots S_{x_n}^{t_n} (z|S_x^z \alpha) = S_{x_{\pi(1)}}^{t_{\pi(1)}} \dots S_{x_{\pi(n)}}^{t_{\pi(n)}} (z|S_x^z \alpha),$$

lo que por (1.38) se reduce a ver que

$$\vdash z \left| \left( S_{x_1}^{t_1} \dots S_{x_n}^{t_n} S_x^z \alpha \right) = z \left| \left( S_{x_{\pi(1)}}^{t_{\pi(1)}} \dots S_{x_{\pi(n)}}^{t_{\pi(n)}} S_x^z \alpha \right) \right. \quad (1.70)$$

Por hipótesis de inducción aplicada a  $S_x^z \alpha$  (que tiene la misma longitud de  $\alpha$  por el Metateorema 1.6) tenemos que

$$\vdash S_{x_1}^{t_1} \dots S_{x_n}^{t_n} S_x^z \alpha \leftrightarrow S_{x_{\pi(1)}}^{t_{\pi(1)}} \dots S_{x_{\pi(n)}}^{t_{\pi(n)}} S_x^z \alpha$$

y por el Teorema 3.31 obtenemos (1.70) tal y como buscábamos.

Con esto finaliza la inducción y con ello la demostración.



## Página 36

### Nota 1: Definición 1.14 ...

Es importante observar que aunque por la **Nota 1** **pág. 23** se tiene que para cualquier valoración  $v$  se cumple que

$$M \models (\alpha \leftrightarrow \beta)[v] \text{ syss } (M \models \alpha[v] \text{ syss } M \models \beta[v]),$$

no es cierto que se cumpla que

$$M \models (\alpha \leftrightarrow \beta) \text{ syss } (M \models \alpha \text{ syss } M \models \beta).$$

Esto ocurre porque si tanto  $M \models \alpha$  como  $M \models \beta$  no se satisfacen entonces son trivialmente equivalentes, pero no tiene porque cumplirse  $M \models (\alpha \leftrightarrow \beta)[v]$ , es decir,

$$(M \models \alpha[v] \text{ y } M \models \beta[v]) \text{ o } (\text{no } M \models \alpha[v] \text{ y no } M \models \beta[v])$$

para cada valoración  $v$ , pues puede ocurrir que para cierta valoración  $v$  se satisfaga  $M \models \alpha[v]$ , pero no  $M \models \beta[v]$ . Por ejemplo, si consideramos en el lenguaje de la aritmética las fórmulas

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv x = y \\ \beta &\equiv \bigwedge xy(x = y) \end{aligned}$$

se cumple lo dicho.

En efecto, no se cumplen ni  $\mathbb{N} \models \alpha$  ni  $\mathbb{N} \models \beta$  (para verlo, basta tomar una valoración  $v$  tal que  $v(x) \not\equiv v(y)$  para el primer caso y para el segundo basta tener en cuenta que existen al menos dos números naturales distintos), luego trivialmente se cumple que son afirmaciones equivalentes, pero no se cumple que  $\mathbb{N} \models (\alpha \leftrightarrow \beta)$  pues tomando cualquier valoración  $v$  tal que  $v(x) \equiv v(y)$  se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{N} \models (\alpha \leftrightarrow \beta)[v] \text{ syss } (\mathbb{N} \models \alpha[v] \text{ y } \mathbb{N} \models \beta[v]) \text{ o } (\text{no } \mathbb{N} \models \alpha[v] \text{ y no } \mathbb{N} \models \beta[v]) \text{ syss} \\ (v(x) \equiv v(y) \text{ y para cualquier par de naturales } n \text{ y } m \text{ se tiene que } n \equiv m) \text{ o} \\ (v(x) \not\equiv v(y) \text{ y existen dos naturales } n \text{ y } m \text{ tales que } n \not\equiv m), \end{aligned}$$

y claramente ninguna de las dos afirmaciones se cumple. 

Sin embargo, sí que se cumple una implicación pues si  $M \models (\alpha \leftrightarrow \beta)$ , entonces  $M \models \alpha \text{ syss } M \models \beta$ .

En efecto, como se tiene que  $M \models (\alpha \leftrightarrow \beta)$ , sabemos que para cualquier valoración  $v$  se cumple que  $M \models (\alpha \leftrightarrow \beta)[v]$ , luego que  $M \models \alpha[v] \text{ syss } M \models \beta[v]$ . Así pues, si se cumple que  $M \models \alpha$ , dada una valoración cualquiera se tiene que se satisface que  $M \models \alpha[v]$ , con lo que por lo dicho también se satisface  $M \models \beta[v]$  y, como la valoración era arbitraria, obtenemos que, en efecto, se cumple que  $M \models \beta$ . Suponiendo que se satisface  $M \models \beta$  se concluye de manera análoga que  $M \models \alpha$  y así queda demostrado lo deseado. 

También es cierto que si se satisface  $M \models (\alpha \leftrightarrow \beta)$ , entonces  $\alpha$  es falsa en  $M$  syss  $\beta$  es falsa en  $M$ .

Supongamos que  $\alpha$  es falsa en  $M$  y sea  $v$  una valoración arbitraria de  $M$ .

Tenemos entonces que no se cumple que  $M \models \alpha[v]$  (por ser  $\alpha$  falsa en  $M$ ) y como  $M \models (\alpha \leftrightarrow \beta)[v]$  obtenemos que no se cumple que  $M \models \beta[v]$ . Por ser la valoración arbitraria concluimos que, en efecto,  $\beta$  es falsa en  $M$ .

El recíproco suponiendo que  $\beta$  es falsa en  $M$  es análogo. 

Por último, observemos que si  $\alpha$  y  $\beta$  son ambas verdaderas o ambas falsas en un modelo  $M$ , entonces si se satisface la equivalencia dicha.

En efecto, si tanto  $\alpha$  como  $\beta$  son verdaderas en  $M$ , entonces dada cualquier valoración  $v$  se cumple que  $M \models \alpha[v]$  y  $M \models \beta[v]$ , luego que  $M \models (\alpha \leftrightarrow \beta)[v]$  y la arbitrariedad de la valoración nos da lo deseado.

Por otra parte, si tanto  $\alpha$  como  $\beta$  son falsas en  $M$ , entonces dada cualquier valoración  $v$  no se cumple que  $M \models \alpha[v]$  y tampoco se cumple que  $M \models \beta[v]$ , luego igualmente se obtiene que  $M \models (\alpha \leftrightarrow \beta)[v]$  y la arbitrariedad de la valoración nos permite concluir. 

**Nota 2:** ... enumerarlas explícitamente ...

Una forma conceptualmente sencilla de hacerlo es enumerar todas las cadenas de signos y, de entre ellas, considerar únicamente las fórmulas. Es decir, si vemos que somos capaces de enumerar todas las cadenas de signos, como de entre ellas podemos distinguir algorítmicamente cuales son fórmulas y cuales no, simplemente iríamos avanzando por dicha sucesión y cuando alguna fuera una fórmula la anotaríamos en nuestra enumeración para las fórmulas. Es importante tener en cuenta que, aunque dicha enumeración no nos diga explícitamente cual es la primera, la segunda o la tercera de nuestras fórmulas, está claro que el razonamiento muestra que es posible enumerarlas lo cual es lo único que nos importa ahora mismo.

Veamos entonces como podemos enumerar todas las cadenas de signos (teniendo en cuenta nuevamente que el razonamiento solo muestra que es posible hacerlo, no da un “algoritmo práctico” para discernir los elementos de la enumeración).

En primer lugar, enumeraremos todos los signos del lenguaje formal<sup>13</sup>, digamos que dicha enumeración es  $s_0, s_1, s_2$ , etc. Entonces, podemos considerar todas las cadenas de longitud uno formadas solo por  $s_0$ , después todas las cadenas de longitud menor o igual a dos formadas solo por  $s_0$  y  $s_1$ , después todas las cadenas de longitud menor o igual a tres formadas solo por  $s_0, s_1$  y  $s_2$ , etc. Como cada conjunto formado es finito lo podemos ordenar, por ejemplo, atendiendo a la longitud de las cadenas y, para cadenas de igual longitud, utilizando un orden lexicográfico respecto a los subíndices de la enumeración de signos. Con esto obtenemos finalmente una enumeración de todas las cadenas de signos del lenguaje.

---

<sup>13</sup> Una forma de hacerlo es enumerar como  $s_0, s_1, s_2$  y  $s_3$  al negador, implicador, cuantificador universal y descriptor respectivamente; como  $s_{4(n+1)}$  a las variables (de modo que  $s_{4(n+1)}$  se corresponda con la variable de índice  $n$ ); como  $s_{4(n+1)+1}$  a las constantes (de modo que  $s_{4(n+1)+1}$  se corresponda con la constante de índice  $n$ ); como  $s_{4(n+1)+2}$  a los relatores y como  $s_{4(n+1)+3}$  a los funtores (donde estos dos últimos los enumeramos previamente bajo cualquier enumeración de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , lo cual es posible hacer de forma explícita).

Esta enumeración comenzaría entonces como

$$s_0; s_1, s_0s_0, s_0s_1, s_1s_0, s_1s_1; s_2, s_0s_2, s_1s_2, s_2s_0, s_2s_1, s_2s_2, s_0s_0s_0, s_0s_0s_1, \dots$$

donde, como hemos dicho, cada  $s_i$  es el correspondiente símbolo del lenguaje bajo la enumeración de los mismos descrita en el pie de página.

## Página 37

**Nota 1:** ... todas las formadas por números que sumen 1 ...

Como hemos mencionado en la nota anterior, como cada conjunto formado de esta forma es finito podemos ordenarlo, por ejemplo, bajo un orden lexicográfico y obtener así una enumeración global de todas las  $n$ -tuplas de números naturales. Por ejemplo, para las 3-tuplas la enumeración comenzaría de la siguiente forma:

$$(0, 0, 0); (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0); (0, 0, 2), (0, 1, 1), (0, 2, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (2, 0, 0); \dots$$

Teniendo dicha enumeración podemos entonces trasladarla a una de las  $n$ -tuplas de los objetos de un modelo sin más que considerar el orden inducido a través de la biyección existente entre los objetos del modelo  $M$  y los naturales. Es decir, si los objetos de  $M$  quedan enumerados como  $m_0, m_1, m_2, \dots$  podemos enumerar las  $n$ -tuplas de  $M$  siguiendo la enumeración descrita para las  $n$ -tuplas de naturales, pero utilizando para el orden los subíndices de los  $m_i$ . Por ejemplo, para las 3-tuplas la enumeración comienza como

$$(m_0, m_0, m_0); (m_0, m_0, m_1), (m_0, m_1, m_0), (m_1, m_0, m_0); (m_0, m_0, m_2), (m_0, m_1, m_1), \\ (m_0, m_2, m_0), (m_1, m_0, m_1), (m_1, m_1, m_0), (m_2, m_0, m_0); \dots$$

y vemos que simplemente hemos “calcado” la enumeración anterior para las 3-tuplas de naturales.

**Nota 2:** ... para todas las interpretaciones posibles de sus variables libres ...

La Definición 1.14, a priori, solo tiene sentido como un “esquema de definición” que nos dice que si para una fórmula particular  $\alpha$  **podemos justificar** que siempre que nos den una valoración  $v$  entonces se cumple que  $M \models \alpha[v]$ , con dicho argumento como soporte (y únicamente por disponer de dicho argumento) podemos decir que  $\alpha$  es verdadera en  $M$ . Por ejemplo, si tomamos la fórmula  $\alpha \equiv x = x$ , tenemos que si  $v$  es una valoración en un modelo  $M$  se cumple que

$$M \models \alpha[v] \text{ syss } v(x) \equiv v(x),$$

y es claro que esto último se dará independientemente de cual sea la valoración  $v$ , luego este razonamiento nos permite afirmar que  $\alpha$  es verdadera en  $M$ . Ahora bien, ¿qué pasa si no somos capaces de dar un argumento que nos muestre que una fórmula  $\alpha$  es verdadera en un modelo  $M$ , ni tampoco podemos razonar que no lo sea? ¿No podemos afirmar que, en cualquier caso,  $\alpha$  será o no verdadera en  $M$ ?

La respuesta es que sí existe un argumento que nos permite afirmar que cualquier fórmula es verdadera o no en cualquier modelo  $M$ , incluso aunque no sepamos razonar cual es el caso. Para ello necesitamos la siguiente definición alternativa para la veracidad de una fórmula  $\alpha$  en un modelo  $M$ :

### Definición 1.23: Fórmulas verdaderas y falsas

Una fórmula  $\alpha$  de un lenguaje formal  $\mathcal{L}$  con variables libres  $x_1, \dots, x_n$  es **verdadera** en un modelo  $M$  si para cualquier  $n$ -tupla de objetos de  $M$ ,  $(a_1, \dots, a_n)$ , se cumple que

$$M \models \alpha \left[ u_{x_1 \dots x_n}^{a_1 \dots a_n} \right], \quad (1.71)$$

donde  $u$  es la valoración trivial definida como  $u(x) \equiv a$  para cada variable  $x$ , siendo  $a$  un objeto prefijado de  $M$ .

Diremos que la fórmula  $\alpha$  es **falsa** en  $M$  si ninguna  $n$ -tupla de objetos de  $M$ ,  $(a_1, \dots, a_n)$ , cumple (1.71).

Esta definición tiene un significado perfectamente claro pues, tal y como hemos visto en la nota anterior, podemos enumerar las  $n$ -tuplas de objetos de  $M$  y entonces, que se cumpla (1.71) para cada una de ellas significa que se cumpla para la primera  $n$ -tupla en la enumeración, y para la segunda y que por mucho que avancemos en la sucesión de  $n$ -tuplas siempre se cumplirá.

A priori puede parecer que esta definición (que al contrario que la Definición 1.14 si es precisa y objetiva) es más débil que la Definición 1.14, pero sucede que el Teorema 1.9 nos asegura que dada una valoración  $v$  arbitraria<sup>14</sup> se tiene que

$$M \models \alpha[v] \text{ syss } M \models \alpha \left[ u_{x_1 \dots x_n}^{v(x_1) \dots v(x_n)} \right],$$

luego si se cumple (1.71) para cada  $n$ -tupla de objetos de  $M$  resulta entonces que el Teorema 1.9 nos da un argumento para segurar que  $\alpha$  es verdadera en el sentido de la Definición 1.14.

Es por tanto este argumento el que da objetividad en el plano informal a la Definición 1.14 y permite adoptarla tal cual está planteada.

**Nota 3:** ... cumplen los hechos siguientes ...

### Demostremos 1).

Si  $\alpha$  fuera verdadera y falsa en un mismo modelo  $M$ , entonces dada una valoración  $v$  en  $M$  tendríamos que  $M \models \alpha[v]$  (por ser  $\alpha$  verdadera en  $M$ ) y que no  $M \models \alpha[v]$  (por ser  $\alpha$  falsa en  $M$ ), pero esto no puede ocurrir pues fijado un modelo, una fórmula y una valoración se tiene que o bien la fórmula es satisfecha en  $M$  por  $v$ , o bien no lo es, y no hay más opciones pues la definición de satisfacción es completamente precisa y objetiva.

<sup>14</sup> Aquí entendemos “arbitraria” como lo hemos hecho a lo largo del capítulo, en el sentido de que estamos dando un esquema de razonamiento que será válido en cuanto lo particularicemos con cualquier valoración  $v$  concreta.

**Demostremos 2).**

En una sentencia  $\alpha$  no hay variables libres, luego dadas dos valoraciones  $v$  y  $w$  cualesquiera en un modelo  $M$  se cumple que éstas coinciden trivialmente sobre las variables libres de  $\alpha$  (pues no tiene ninguna). Fijando entonces una valoración  $u$  de  $M$  (por ejemplo, una valoración trivial que a cada variable le asigna el mismo objeto de  $M$ ) se obtiene que, por el Teorema 1.9, dada una valoración arbitraria  $v$  en  $M$  se cumple que

$$M \models \alpha[v] \text{ syss } M \models \alpha[u]. \quad (1.72)$$

Por tanto, tenemos dos opciones:

- O bien  $M \models \alpha[u]$  y por (1.72) se tiene entonces que  $\alpha$  es satisfecha en  $M$  por cualquier valoración, luego que  $\alpha$  es verdadera en  $M$ .
- O bien no  $M \models \alpha[u]$  y por (1.72) se tiene entonces que  $\alpha$  no es satisfecha en  $M$  por ninguna valoración, luego que  $\alpha$  es falsa en  $M$ .

**Demostremos 3).**

Tenemos que

$$\begin{aligned} M \models \alpha \text{ syss para cualquier valoración } v \text{ de } M \text{ se cumple que } M \models \alpha[v] \text{ syss} \\ \text{syss para cualquier valoración } v \text{ de } M \text{ no se cumple que } M \models \neg\alpha[v] \text{ syss} \\ \text{syss } \neg\alpha \text{ es falsa en } M, \end{aligned}$$

y que  $\alpha$  es falsa en  $M$

$$\begin{aligned} \text{syss para cualquier valoración } v \text{ de } M \text{ no se cumple que } M \models \alpha[v] \text{ syss} \\ \text{syss para cualquier valoración } v \text{ de } M \text{ se cumple que } M \models \neg\alpha[v] \text{ syss} \\ \text{syss } M \models \neg\alpha. \end{aligned}$$

**Demostremos 4).**

Previamente necesitamos los siguientes resultados:

**Metateorema 1.24**

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal,  $\theta$  una expresión de  $\mathcal{L}$  sin descriptores,  $M$  y  $M'$  dos modelos de  $\mathcal{L}$  que se diferencian únicamente en la descripción impropia y  $v$  una valoración de  $M'$  (o equivalentemente de  $M^a$ ). Entonces, si  $\theta$  es una fórmula tenemos que

$$M \models \theta[v] \text{ syss } M' \models \theta[v]$$

y si  $\theta$  es un término se tiene que

$$M(\theta)[v] \equiv M'(\theta)[v].$$

<sup>a</sup> Observemos que, como  $M$  y  $M'$  solo se diferencian en la descripción impropia en particular tienen el mismo universo, luego toda valoración de  $M'$  es también una valoración de  $M$  y viceversa.

Veámoslo por inducción en la longitud de  $\theta$  (teniendo en cuenta que el caso del descriptor no puede darse):

- Si  $\theta \equiv x_i$ , entonces se tiene que

$$M(\theta)[v] \equiv v(x_i) \equiv M'(\theta)[v].$$

- Si  $\theta \equiv c_i$ , entonces como  $M$  y  $M'$  asignan los mismos objetos a las mismas constantes se tiene que

$$M(\theta)[v] \equiv M(c_i) \equiv M'(c_i) \equiv M'(\theta)[v].$$

- Si  $\theta \equiv R_i^n t_1 \cdots t_n$ , entonces como  $\theta$  no tiene descriptor tampoco lo tiene ningún  $t_i$  y, por hipótesis de inducción, tenemos que

$$M(t_i)[v] \equiv M'(t_i)[v]$$

para cada  $i = 1, \dots, n$ . Teniendo también en cuenta que  $M$  y  $M'$  asocian a cada relator  $n$ -ádico la misma relación  $n$ -ádica concluimos que

$$\begin{aligned} M \models \theta[v] \text{ syss } M(R_i^n)(M(t_1)[v], \dots, M(t_n)[v]) \\ \text{syss } M'(R_i^n)(M'(t_1)[v], \dots, M'(t_n)[v]) \text{ syss } M' \models \theta[v]. \end{aligned}$$

- Si  $\theta \equiv f_i^n t_1 \cdots t_n$  es análogo al caso anterior.
- Si  $\theta \equiv \neg \alpha$ , entonces como  $\theta$  no tiene descriptor tampoco lo tiene  $\alpha$  y, por hipótesis de inducción, tenemos que

$$M \models \alpha[v] \text{ syss } M' \models \alpha[v].$$

Con esto obtenemos que

$$M \models \theta[v] \text{ syss no } M \models \alpha[v] \text{ syss no } M' \models \alpha[v] \text{ syss } M' \models \theta[v].$$

- Si  $\theta \equiv \alpha \rightarrow \beta$ , entonces como  $\theta$  no tiene descriptor tampoco lo tienen  $\alpha$  ni  $\beta$  y, por hipótesis de inducción, tenemos que

$$M \models \alpha[v] \text{ syss } M' \models \alpha[v]$$

y

$$M \models \beta[v] \text{ syss } M' \models \beta[v].$$

Con esto obtenemos que

$$\begin{aligned} M \models \theta[v] \text{ syss no } M \models \alpha[v] \text{ o } M \models \beta[v] \\ \text{syss no } M' \models \alpha[v] \text{ o } M' \models \beta[v] \text{ syss } M' \models \theta[v]. \end{aligned}$$

- Si  $\theta \equiv \bigwedge x_i \alpha$ , entonces como  $\theta$  no tiene descriptor tampoco lo tiene  $\alpha$  y, por hipótesis de inducción, tenemos que para cualquier valoración  $w$  de  $M$  (o de  $M'$  pues toda valoración de uno es una valoración del otro)

$$M \models \alpha[w] \text{ syss } M' \models \alpha[w].$$

Teniendo también en cuenta que el universo de  $M$  y  $M'$  es el mismo obtenemos que

$$\begin{aligned} M \models \theta[v] \text{ syss para todo objeto } a \text{ de } M \text{ se cumple que } M \models \alpha[v_{x_i}^a] \\ \text{syss para todo objeto } a \text{ de } M' \text{ se cumple que } M' \models \alpha[v_{x_i}^a] \\ \text{syss } M' \models \theta[v]. \end{aligned}$$

Esto finaliza la inducción y con ello la demostración. 

Ahora, para demostrar lo deseado basta probar que si  $M$  y  $M'$  son modelos idénticos de un mismo lenguaje formal  $\mathcal{L}$  salvo por la descripción impropia, entonces se tiene que

$$M \models \alpha \text{ syss } M' \models \alpha \quad (1.73)$$

y que

$$\alpha \text{ es falsa en } M \text{ syss } \alpha \text{ es falsa en } M'. \quad (1.74)$$

Para ello, observemos que si  $\alpha$  es verdadera en  $M$ , entonces dada una valoración cualquiera  $v$  de  $M'$  se tiene por el Metateorema 1.24 que

$$M \models \alpha[v] \text{ syss } M' \models \alpha[v],$$

y como lo primero se da por ser  $\alpha$  verdadera en  $M$ , obtenemos que también se da lo segundo. La arbitrariedad de  $v$  nos da entonces que, en efecto,  $\alpha$  es verdadera en  $M'$ .

El recíproco es completamente análogo y (1.73) queda demostrado.

Para ver (1.74) basta usar 3) y (1.73) pues como  $\neg\alpha$  tampoco tiene descriptor se obtiene que

$$\alpha \text{ es falsa en } M \text{ syss } M \models \neg\alpha \text{ syss } M' \models \neg\alpha \text{ syss } \alpha \text{ es falsa en } M'.$$

Finalmente, para probar el “en particular”, necesitamos también un resultado previo:

### Metateorema 1.25

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal,  $\theta$  una expresión de  $\mathcal{L}$  sin descriptores,  $M$  un modelo de  $\mathcal{L}$  y  $v$  una valoración de  $M$ . Entonces,  $M$  es también un modelo de  $\underline{\mathcal{L}}$  sin más que obviar la descripción impropia (lo denotaremos por  $\underline{M}$ ),  $v$  también es una valoración de  $M$  entendido como modelo de  $\underline{\mathcal{L}}$  y se cumple que si denotamos<sup>a</sup> por  $\underline{\theta}$  a la expresión entendida como una expresión de  $\underline{\mathcal{L}}$  entonces, si  $\theta$  es una fórmula tenemos que

$$M \models \theta[v] \text{ syss } \underline{M} \models \underline{\theta}[v]$$

y si  $\theta$  es un término se tiene que

$$M(\theta)[v] \equiv \underline{M}(\underline{\theta})[v].$$

<sup>a</sup> Se debe entender que esto es mera notación pues realmente  $\theta$  y  $\underline{\theta}$  son exactamente las mismas cadenas de signos.

Veámoslo por inducción en la longitud de  $\theta$  (teniendo en cuenta que el caso del descriptor no puede darse):

- Si  $\theta \equiv x_i$ , entonces se tiene que

$$M(\theta)[v] \equiv v(x_i) \equiv \underline{M}(\underline{\theta})[v].$$

- Si  $\theta \equiv c_i$ , entonces

$$M(\theta)[v] \equiv M(c_i) \equiv \underline{M}(\underline{\theta})[v].$$



- Si  $\theta \equiv R_i^n t_1 \cdots t_n$ , entonces como  $\theta$  no tiene descriptor tampoco lo tiene ningún  $t_i$  y, por hipótesis de inducción, tenemos que

$$M(t_i)[v] \equiv \underline{M}(\underline{t_i})[v]$$

para cada  $i = 1, \dots, n$ . Concluimos entonces que

$$\begin{aligned} M \models \theta[v] \text{ syss } M(R_i^n) (M(t_1)[v], \dots, M(t_n)[v]) \\ \text{syss } \underline{M}(R_i^n) (\underline{M}(\underline{t_1})[v], \dots, \underline{M}(\underline{t_n})[v]) \text{ syss } \underline{M} \models \underline{\theta}[v]. \end{aligned}$$

- Si  $\theta \equiv f_i^n t_1 \cdots t_n$  es análogo al caso anterior.
- Si  $\theta \equiv \neg \alpha$ , entonces como  $\theta$  no tiene descriptor tampoco lo tiene  $\alpha$  y, por hipótesis de inducción, tenemos que

$$M \models \alpha[v] \text{ syss } \underline{M} \models \underline{\alpha}[v].$$

Con esto obtenemos que

$$M \models \theta[v] \text{ syss no } M \models \alpha[v] \text{ syss no } \underline{M} \models \underline{\alpha}[v] \text{ syss } \underline{M} \models \underline{\theta}[v].$$

- Si  $\theta \equiv \alpha \rightarrow \beta$ , entonces como  $\theta$  no tiene descriptor tampoco lo tienen  $\alpha$  ni  $\beta$  y, por hipótesis de inducción, tenemos que

$$M \models \alpha[v] \text{ syss } \underline{M} \models \underline{\alpha}[v]$$

y

$$M \models \beta[v] \text{ syss } \underline{M} \models \underline{\beta}[v].$$

Con esto obtenemos que

$$\begin{aligned} M \models \theta[v] \text{ syss no } M \models \alpha[v] \text{ o } M \models \beta[v] \\ \text{syss no } \underline{M} \models \underline{\alpha}[v] \text{ o } \underline{M} \models \underline{\beta}[v] \text{ syss } \underline{M} \models \underline{\theta}[v]. \end{aligned}$$

- Si  $\theta \equiv \bigwedge x_i \alpha$ , entonces como  $\theta$  no tiene descriptor tampoco lo tiene  $\alpha$  y, por hipótesis de inducción, tenemos que para cualquier valoración  $w$  de  $M$

$$M \models \alpha[w] \text{ syss } \underline{M} \models \underline{\alpha}[w].$$

Obtenemos entonces que

$$\begin{aligned} M \models \theta[v] \text{ syss para todo objeto } a \text{ de } M \text{ se cumple que } M \models \alpha[v_{x_i}^a] \\ \text{syss para todo objeto } a \text{ de } \underline{M} \text{ se cumple que } \underline{M} \models \underline{\alpha}[v_{x_i}^a] \\ \text{syss } \underline{M} \models \underline{\theta}[v]. \end{aligned}$$

Esto finaliza la inducción y con ello la demostración. 

Sea pues  $\alpha$  una fórmula sin descriptor de  $\mathcal{L}$ ,  $M$  un modelo de  $\mathcal{L}$  y veamos que

$$M \models \alpha \text{ syss } \underline{M} \models \underline{\alpha}. \quad (1.75)$$

Si  $M \models \alpha$ , dada cualquier valoración  $v$  de  $M$  se tiene por el Metateorema 1.25 que

$$M \models \alpha[v] \text{ syss } \underline{M} \models \underline{\alpha}[v],$$

luego como se cumple lo primero por ser  $\alpha$  verdadera en  $M$ , concluimos que también se cumple lo segundo. La arbitrariedad de la valoración nos da entonces que, en efecto,  $\underline{\alpha}$  es verdadera en  $\underline{M}$ .

El recíproco es claramente análogo y (1.75) queda demostrado.

Más aún, observemos que si es  $M$  un modelo de  $\mathcal{L}$  podemos construir un modelo  $M'$  de  $\mathcal{L}$  sin más que asignar como descripción impropia cualquier objeto de  $M$ . Con la notación empleada en lo anterior se tiene entonces que  $\underline{M}'$  es exactamente el mismo modelo que  $M$  y tenemos por (1.75) que

$$M' \models \alpha \text{ syss } M \models \underline{\alpha}. \quad (1.76)$$

Además, por (1.73) se tiene que lo anterior es independiente de la asignación que hagamos para la descripción impropia. 

# Capítulo 2

## El cálculo deductivo

### Página 42

**Nota 1:** ... En este caso tenemos ...

Si realizamos la tabla de verdad directamente para las fórmulas  $\alpha, \beta$  y  $\alpha \rightarrow \beta$  tendríamos que incluir un tercer valor que fuera “indeterminado” para incluir los casos en los que las fórmulas no sean ni verdaderas ni falsas:

| $M \models \theta$ |         |                            |
|--------------------|---------|----------------------------|
| $\alpha$           | $\beta$ | $\alpha \rightarrow \beta$ |
| V                  | V       | V                          |
| V                  | F       | F                          |
| V                  | I       | I                          |
| F                  | V       | V                          |
| F                  | F       | V                          |
| F                  | I       | V                          |
| I                  | V       | V                          |
| I                  | F       | I                          |
| I                  | I       | I                          |

Con esta tabla es cierto el razonamiento dado en el tercer párrafo de la página, pero lo que realmente haremos normalmente será utilizar tablas de verdad donde se muestran los “valores de verdad” de  $M \models \alpha[v]$ ,  $M \models \beta[v]$  y  $M \models (\alpha \rightarrow \beta)[v]$  para una valoración  $v$  de  $M$  arbitraria:

| $M \models \theta[v]$ |         |                            |
|-----------------------|---------|----------------------------|
| $\alpha$              | $\beta$ | $\alpha \rightarrow \beta$ |
| V                     | V       | V                          |
| V                     | F       | F                          |
| F                     | V       | V                          |
| F                     | F       | V                          |

Así, el razonamiento dado en el tercer párrafo de la página es cierto para una valoración  $v$  de  $M$  arbitraria y con ello se obtiene igualmente que  $M \models \beta$ .

**Nota 2:** ... ejercicio al lector ...

Tenemos la siguiente tabla de verdad:

| $M \models \theta[v]$ |         |              |             |                            |
|-----------------------|---------|--------------|-------------|----------------------------|
| $\alpha$              | $\beta$ | $\neg\alpha$ | $\neg\beta$ | $\alpha \rightarrow \beta$ |
| V                     | V       | F            | F           | V                          |
| V                     | F       | F            | V           | F                          |
| F                     | V       | V            | F           | V                          |
| F                     | F       | V            | V           | V                          |

Vemos entonces que para cualquier valoración  $v$  de un modelo  $M$  en la que se satisfagan  $\alpha \rightarrow \beta$  y  $\neg\beta$  también se satisface  $\neg\alpha$ , luego en cualquier modelo en el que sean verdaderas  $\alpha \rightarrow \beta$  y  $\neg\beta$  también debe serlo  $\neg\alpha$  tal y como buscábamos.

**Nota 3:** ... como se prueba trivialmente ...

Tenemos la siguiente tabla de verdad:

| $M \models \theta[v]$ |              |                          |
|-----------------------|--------------|--------------------------|
| $\alpha$              | $\neg\alpha$ | $\alpha \vee \neg\alpha$ |
| V                     | F            | V                        |
| F                     | V            | V                        |

Vemos entonces que para cualquier valoración  $v$  de un modelo  $M$  siempre se satisface  $\alpha \vee \neg\alpha$ , luego en cualquier modelo será verdadera la fórmula  $\alpha \vee \neg\alpha$ .

## Página 43

**Nota 1:** ... equivale a ...

En efecto, se tiene que

$$M \models (x = t) \left[ v_x^{M(t)[v]} \right] \text{ syss } v_x^{M(t)[v]}(x) \equiv M(t) \left[ v_x^{M(t)[v]} \right] \text{ syys } M(t)[v] \equiv M(t) \left[ v_x^{M(t)[v]} \right],$$

y como  $x$  no está libre en  $t$ , por el Teorema 1.9 tenemos que

$$M(t) \left[ v_x^{M(t)[v]} \right] \equiv M(t)[v],$$

y esto prueba que siempre se satisface lo anterior.

**Nota 2:** ... entonces ...

Ver **Nota 3** pág. 20.

**Nota 3:** ... Como  $x$  no está libre en  $t$  ...

Nuevamente, por el Teorema 1.9 se tiene que  $M(t)[v_x^a] \equiv M(t)[v]$ .

## Página 44

**Nota 1:** ... también que ...

Pues en la página anterior se ha visto que  $a \equiv M(t)[v]$ .

## Página 46

**Nota 1:** ... no será lógicamente válida o si lo será ...

En el Capítulo 4 se verá que una fórmula  $\alpha$ , o bien es verdadera en todo modelo, o bien existe alguno donde no lo es, incluso aunque no sepamos cual es el caso.

**Nota 2:** ... razonamientos sobre modelos son esquemáticos ...

Es decir, cuando en la Definición 2.2 o en la siguiente nota decimos “todo modelo”, queremos decir que sabemos dar un esquema de razonamiento (unas instrucciones para generar un razonamiento) que se convierten en razonamientos válidos cuando se aplican a modelos concretos.

**Nota 3:** Claramente se cumple ...

**Demostremos 1).**

Si  $\alpha$  es lógicamente válida existe un argumento que nos muestra que dado un modelo  $M$  se cumple  $M \models \alpha$ . Aplicando entonces 3) de la página 37 obtenemos que  $\neg\alpha$  es falsa en  $M$ . Por tanto, juntando el argumento que nos muestra que  $\alpha$  es verdadera en cualquier modelo  $M$  con el argumento que demuestra 3) en la página 37 (ver **Nota 3** pág.37) obtenemos un argumento que muestra que  $\neg\alpha$  es necesariamente falsa en cualquier modelo, luego insatisfactible.

El recíproco es análogo.

La **demostración de 2)** es análoga a la anterior.

**Demostremos 3).**

Por la siguiente nota sabemos que todo lenguaje formal tiene al menos un modelo  $M$  y, por 1) de la página 37, sabemos que  $\alpha$  no puede ser verdadera y falsa en  $M$ , luego no puede ser lógicamente válida e insatisfactible.

**Demostremos 4).**

Si  $\alpha$  es satisfactible, entonces existe un modelo  $M$  en el cual es verdadera y por 3) de la página 37 obtenemos que  $\neg\alpha$  es falsa en  $M$ , luego que  $\neg\alpha$  es falseable.

La **demostración de 5)** es análoga a la anterior.



**Nota 4:** ... interpretan de forma obvia.

Es decir, consideramos un modelo  $M$  cuyo universo  $\mathcal{U}$  está formado por un único objeto  $u$  y tal que:

- Para toda constante  $c_i$  consideramos  $M(c_i) \equiv u$ .
- Para cada relator  $R_i^n$  (distinto del igualador) consideramos que  $M(R_i^n) \equiv R^n$ , donde  $R^n$  es la relación  $n$ -ádica que asigna un valor verdadero a cada  $n$ -tupla de objetos de  $M$ .
- Para cada funtor  $f_i^n$  consideramos  $M(f_i^n) \equiv f^n$ , donde  $f^n$  es la función que asigna a cada  $n$ -tupla de objetos de  $M$  el objeto  $u$ .
- Si el lenguaje tiene descriptor, definimos la descripción impropia como el objeto  $u$ .

Más aún, observemos que lo anterior puede extenderse para mostrar que dado un conjunto bien definido  $\mathcal{U}$ , todo lenguaje formal  $\mathcal{L}$  admite un modelo  $M$  con  $\mathcal{U}$  como universo.

En efecto, basta fijar un elemento de  $\mathcal{U}$ , digamos  $u$ , y definir las asignaciones para constantes, relatores y funtores (y el descriptor) de igual modo que en el caso anterior.

En particular, todo lenguaje formal admite modelos cuyo universo tiene cualquier cantidad finita de elementos e incluso modelos con una cantidad numerable de elementos (pues siempre podemos encontrar conjuntos bien definidos con estas características).

## Página 47

**Nota 1:** ... tales que cada ... es una *consecuencia* ...

Veamos que si  $\Gamma$  es un conjunto de fórmulas en un lenguaje formal,  $F$  un sistema deductivo y  $\alpha$  una fórmula para la que se cumple que  $\Gamma \vdash_F \alpha$ , entonces existe una deducción que es de la forma  $\gamma_1, \dots, \gamma_n, \phi_1, \dots, \phi_p, \delta_1, \dots, \delta_m$  donde  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  son fórmulas de  $\Gamma$ ,  $\phi_1, \dots, \phi_p$  son axiomas de  $F$  y ningún  $\delta_i$  es una fórmula de  $\Gamma$  ni un axioma de  $F$ .

En primer lugar, si  $\alpha$  es una fórmula de  $\Gamma$  o un axioma de  $F$ , la deducción buscada que cumple lo deseado es simplemente la fórmula  $\alpha$ , por lo que supongamos que  $\alpha$  no es una fórmula de  $\Gamma$  ni un axioma de  $F$ . Como se cumple que  $\Gamma \vdash_F \alpha$ , debe existir una sucesión de fórmulas  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  tales que  $\alpha_k \equiv \alpha$  y cada  $\alpha_i$  es un axioma de  $F$ , una fórmula de  $\Gamma$  o una consecuencia inmediata de fórmulas anteriores en la sucesión. Reordenemos entonces la sucesión de modo que aparezcan en primer lugar todas las fórmulas de  $\Gamma$  que estén entre  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ , tras ellas todos los axiomas lógicos de  $F$  que estén entre  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  y para el resto de fórmulas  $\alpha_i$  mantengamos el orden relativo entre ellas<sup>1</sup>. Esta nueva sucesión de fórmulas tendrá la forma deseada, digamos que es  $\gamma_1, \dots, \gamma_n, \phi_1, \dots, \phi_p, \delta_1, \dots, \delta_m$  con la notación dada anteriormente, y basta ver que sigue siendo una deducción de  $\alpha$  con premisas en  $\Gamma$ . En primer lugar, como  $\alpha$  no es una fórmula de  $\Gamma$  ni un axioma de  $F$  y se ha mantenido el orden relativo entre las fórmulas que son de esta forma se tiene que

<sup>1</sup> Esto podemos hacerlo fácilmente de forma completamente algorítmica.

$\delta_m \equiv \alpha_k \equiv \alpha$ . Por otra parte, cada  $\delta_i$  se corresponde con un  $\alpha_j$  que era consecuencia inmediata de fórmulas anteriores en la sucesión y como todos los  $\alpha_r$  que precedían a  $\alpha_j$  están entre los  $\gamma_l$ , los  $\phi_s$  o los  $\delta_t$  con  $t < i$  (pues si  $\alpha_r$  precedía a  $\alpha_j$  y era una fórmula de  $\Gamma$  o un axioma de  $F$  es claro y, si no lo era, como se ha mantenido el orden relativo de estas fórmulas debe corresponder con algún  $\delta_t$  con  $t < i$ ), se tiene que  $\delta_i$  es consecuencia inmediata de fórmulas anteriores de la sucesión. Esto prueba que la sucesión obtenida es una deducción de  $\alpha$  con premisas en  $\Gamma$  tal y como queríamos ver.

Tenemos también el siguiente resultado que será útil a lo largo del capítulo.

### Metateorema 2.1

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal,  $\Gamma$  y  $\Delta$  dos conjuntos de fórmulas de  $\mathcal{L}$ ,  $F$  un sistema deductivo sobre  $\mathcal{L}$  y  $\alpha$  una fórmula en  $\mathcal{L}$  para la que se cumple que  $\Gamma, \Delta \vdash_F \alpha$  (en particular, si se cumple  $\Delta \vdash_F \alpha^a$ ). Si para cada fórmula<sup>b</sup>  $\delta$  de  $\Delta$  se cumple que  $\Gamma \vdash_F \delta$ , entonces  $\Gamma \vdash_F \alpha$ .

<sup>a</sup> Pues es inmediato que si  $\Delta \vdash_F \alpha$ , entonces  $\Gamma, \Delta \vdash_F \alpha$ .

<sup>b</sup> Observemos que, como podemos enumerar las fórmulas de  $\mathcal{L}$ , en particular podemos enumerar las de  $\Delta$  (ver [Nota 2 pág. 4](#)) y entendemos pues lo que significa que una propiedad bien definida se satisfaga para todas las fórmulas de  $\Delta$ .

Como tenemos que  $\Gamma, \Delta \vdash_F \alpha$ , por lo dicho anteriormente existe una deducción de la forma  $\gamma_1, \dots, \gamma_n, \delta_1, \dots, \delta_m, \phi_1, \dots, \phi_p, \alpha_1, \dots, \alpha_r$  donde cada  $\gamma_i$  es una fórmula de  $\Gamma$ , cada  $\delta_i$  es una fórmula de  $\Delta$ , cada  $\phi_i$  es un axioma de  $F$  y cada  $\alpha_i$  no es ni un axioma de  $F$  ni una fórmula de  $\Gamma$  ni de  $\Delta$ . Ahora, por hipótesis tenemos que  $\Gamma \vdash_F \delta_i$  para cada  $i = 1, \dots, m$ , luego existe una sucesión  $\delta_i^1, \dots, \delta_i^{k_i}$  de fórmulas de  $\mathcal{L}$  que es una deducción en  $F$  de  $\delta_i$  con premisas en  $\Gamma$  para cada  $i = 1, \dots, m$ . Se tiene entonces que

$$\gamma_1, \dots, \gamma_n, \delta_1^1, \dots, \delta_1^{k_1}, \dots, \delta_m^1, \dots, \delta_m^{k_m}, \phi_1, \dots, \phi_p, \alpha_1, \dots, \alpha_r$$

será una deducción en  $F$  de  $\alpha$  con premisas en  $\Gamma$  pues se cumplen:

- Cada  $\gamma_i$  es una fórmula de  $\Gamma$ .
- Cada  $\delta_i^j$  es, o bien una fórmula de  $\Gamma$ , o bien un axioma de  $F$ , o bien consecuencia inmediata de las fórmulas  $\delta_i^1, \dots, \delta_i^{j-1}$ , luego de fórmulas anteriores en la sucesión.
- Cada  $\phi_i$  es un axioma de  $F$ .
- Cada  $\alpha_i$  es consecuencia inmediata de las fórmulas  $\gamma_1, \dots, \gamma_n, \delta_1, \dots, \delta_m, \phi_1, \dots, \phi_p, \alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}$  y, como para cada  $j = 1, \dots, m$  es  $\delta_j^{k_j} \equiv \delta_j$ , tenemos que en definitiva  $\alpha_i$  es consecuencia inmediata de fórmulas anteriores en la sucesión.
- Claramente  $\alpha_r \equiv \alpha$ .

Todos estos puntos muestran que, en efecto, la sucesión dada es la deducción buscada. 

## Página 48

**Nota 1:** ... fórmulas precedentes lo son ...

Como hemos supuesto que  $\beta_1, \dots, \beta_i$  son verdaderas en  $M$ , este razonamientos nos da que, en efecto,  $\beta_{i+1}$  también será verdadera en  $M$ .

**Nota 2:** ... es verdadera en  $M$ .

Como siempre podemos razonar que  $\beta_1$  es verdadera en  $M$ , el argumento dado nos muestra que es posible razonar de forma sucesiva que cada  $\beta_i$  es verdadero en  $M$ , luego en a lo sumo  $m$  de estos pasos podemos razonar que  $\beta_m \equiv \alpha$  es verdadera en  $M$ .

En particular, si  $\alpha$  es un teorema de  $F$  será la última fórmula de una demostración en  $F$ , con lo que aplicando el razonamiento anterior eliminando toda referencia a las premisas (en este caso cada  $\beta_i$  es un axioma o una consecuencia inmediata de fórmulas anteriores), vemos que dado un modelo  $M$  es posible razonar que  $\alpha$  es verdadera en  $M$ , luego que es lógicamente válida.

## Página 49

**Nota 1:** ... sino infinitos ...

De igual forma también tiene infinitas reglas de inferencia primitivas pues para cada variable en  $\mathcal{L}$  tenemos una introducción del generalizador distinta.

**Nota 2:** ... en la sección precedente ...

En las páginas 42 y 44 respectivamente.

**Nota 3:** ... basta calcular sus tablas de verdad ...

En efecto, por lo comentado en la **Nota 1** [pág. 42](#) basta calcular las tablas de verdad para  $M \models \theta[v]$  y observar que la última columna es siempre verdadera, pues esto nos indica que independientemente de si se cumplen o no  $M \models \alpha[v]$ ,  $M \models \beta[v]$  o  $M \models \gamma[v]$  se tiene que siempre se cumple  $M \models \phi[v]$  (con  $\phi$  uno de los axiomas considerados) tal como queremos ver.

Para K1 tenemos:

| $M \models \theta[v]$ |         |                            |                                                 |
|-----------------------|---------|----------------------------|-------------------------------------------------|
| $\alpha$              | $\beta$ | $\beta \rightarrow \alpha$ | $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$ |
| V                     | V       | V                          | V                                               |
| V                     | F       | V                          | V                                               |
| F                     | V       | F                          | V                                               |
| F                     | F       | V                          | V                                               |



Para K2 tenemos:

| $M \models \theta[v]$ |         |          |                            |                                                 |                            |                             |                                                                      |        |
|-----------------------|---------|----------|----------------------------|-------------------------------------------------|----------------------------|-----------------------------|----------------------------------------------------------------------|--------|
| $\alpha$              | $\beta$ | $\gamma$ | $\beta \rightarrow \gamma$ | $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$ | $\alpha \rightarrow \beta$ | $\alpha \rightarrow \gamma$ | $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$ | $\phi$ |
| V                     | V       | V        | V                          | V                                               | V                          | V                           | V                                                                    | V      |
| V                     | V       | F        | F                          | F                                               | V                          | F                           | F                                                                    | V      |
| V                     | F       | V        | V                          | V                                               | F                          | V                           | V                                                                    | V      |
| V                     | F       | F        | V                          | V                                               | F                          | F                           | V                                                                    | V      |
| F                     | V       | V        | V                          | V                                               | V                          | V                           | V                                                                    | V      |
| F                     | V       | F        | F                          | V                                               | V                          | V                           | V                                                                    | V      |
| F                     | F       | V        | V                          | V                                               | V                          | V                           | V                                                                    | V      |
| F                     | F       | F        | V                          | V                                               | V                          | V                           | V                                                                    | V      |

Para K3 tenemos:

| $M \models \theta[v]$ |         |              |             |                                    |                            |        |
|-----------------------|---------|--------------|-------------|------------------------------------|----------------------------|--------|
| $\alpha$              | $\beta$ | $\neg\alpha$ | $\neg\beta$ | $\neg\alpha \rightarrow \neg\beta$ | $\beta \rightarrow \alpha$ | $\phi$ |
| V                     | V       | F            | F           | V                                  | V                          | V      |
| V                     | F       | F            | V           | V                                  | V                          | V      |
| F                     | V       | V            | F           | F                                  | F                          | V      |
| F                     | F       | V            | V           | V                                  | V                          | V      |

Esto finaliza la demostración para estos tres tipos de axiomas.



## Página 50

**Nota 1:** ... comprobamos para justificar ...

En la página 43.

**Nota 2:** ... Tenemos que ...

Pues estamos suponiendo que  $M \models \bigwedge x(\alpha \rightarrow \beta)[v]$ .

**Nota 3:** ... también ...

Pues también estamos suponiendo que  $M \models \alpha[v]$  y, por el Teorema 1.9, esto es equivalente a  $M \models \alpha[v_x^a]$ .

**Nota 4:** ... en la sección anterior.

En la página 43.

**Nota 5:** ... Por lo tanto ...

En la página 23 se demostró que para cualquier modelo  $M$  de un lenguaje formal, cualquier valoración  $v$  en dicho modelo y cualquier variable  $x$  de dicho lenguaje, se tiene que  $M(x|x=x)[v] \equiv d$ .

## Página 56

**Nota 1:** ... Si  $\Gamma, \alpha \vdash \beta$  ...

El conjunto de fórmulas  $\Gamma$  podría ser vacío, en cuyo caso lo que dice el metateorema es que si  $\alpha \vdash \beta$  y en la deducción no se generaliza respecto a variables libres en  $\alpha$ , entonces  $\vdash \alpha \rightarrow \beta$ .

## Página 57

**Nota 1:** ... es consecuencia de  $\Gamma$ .

Es decir, para probar el resultado basta ver que podemos sustituir de manera sucesiva cada  $\delta_i$  en la deducción por un conjunto de fórmulas (ordenadas)  $\Delta_i$ , de modo que la última fórmula de cada  $\Delta_i$  es  $\alpha \rightarrow \delta_i$  y que en cada  $\Delta_i$  únicamente aparecen fórmulas que sean axiomas, consecuencias inmediatas de fórmulas anteriores (dentro del propio  $\Delta_i$  o de algún  $\Delta_j$  con  $j < i$ ) o fórmulas en  $\Gamma$ .

En efecto, si hacemos esto tendremos una deducción con premisas en  $\Gamma$  cuya última fórmula será  $\alpha \rightarrow \delta_m$ , es decir,  $\alpha \rightarrow \beta$ , luego obtenemos que  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ .

**Nota 2:** ... es la siguiente ...

Es decir, si  $\delta_i$  es un axioma o una premisa, tenemos que el  $\Delta_i$  correspondiente (respecto a la notación en la nota anterior) serán las fórmulas  $\delta_i, \delta_i \rightarrow (\alpha \rightarrow \delta_i), \alpha \rightarrow \delta_i$  (en dicho orden).

**Nota 3:** ... debemos incorporar a la deducción ...

Es decir, si  $\delta_i \equiv \alpha$ , entonces el  $\Delta_i$  correspondiente estará formado por las cinco fórmulas dadas en la demostración del Teorema 2.7 (en dicho orden).

**Nota 4:** ...  $\delta_j$  y  $\delta_j \rightarrow \delta_i$  ...

Es decir, existen dos fórmulas  $\delta_j$  y  $\delta_k$  con  $j, k < i$  de modo que  $\delta_k \equiv \delta_j \rightarrow \delta_i$ .

**Nota 5:** ... ya habremos incorporado las fórmulas ...

Es decir, como vamos sustituyendo de forma sucesiva cada  $\delta_i$  por el correspondiente  $\Delta_i$ ,

ya habremos sustituido  $\delta_j$  y  $\delta_k$  (ver nota anterior) por  $\Delta_j$  y  $\Delta_k$ , luego serán fórmulas anteriores de nuestra deducción tanto  $\alpha \rightarrow \delta_j$  como  $\alpha \rightarrow \delta_k \equiv \alpha \rightarrow (\delta_j \rightarrow \delta_i)$ .

**Nota 6:** ... de este modo ...

$\alpha \rightarrow \delta_j$  es una fórmula anterior en la deducción porque está en  $\Delta_j$  y  $\alpha \rightarrow (\delta_j \rightarrow \delta_i)$  lo es pues está en  $\Delta_k$  siendo  $j, k < i$  (ver **Nota 4 pág. 57**). Tenemos pues en este caso que  $\Delta_i$  estará formado por las fórmulas  $(\alpha \rightarrow (\delta_j \rightarrow \delta_i)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \delta_j) \rightarrow (\alpha \rightarrow \delta_i))$ ,  $(\alpha \rightarrow \delta_j) \rightarrow (\alpha \rightarrow \delta_i)$  y  $\alpha \rightarrow \delta_i$  (en dicho orden).

**Nota 7:** ... de este modo ...

Como hemos visto en las notas anteriores, al hacer la sustitución de los  $\delta_l$  por los  $\Delta_l$  de forma sucesiva, ya se tiene que la fórmula  $\alpha \rightarrow \delta_j$  es una fórmula anterior en la deducción (pues está en  $\Delta_j$  y  $j < i$ ), luego en este caso  $\Delta_i$  está formado por las fórmulas  $\wedge x(\alpha \rightarrow \delta_j)$ ,  $\wedge x(\alpha \rightarrow \delta_j) \rightarrow (\alpha \rightarrow \wedge x\delta_j)$  y  $\alpha \rightarrow \wedge x\delta_j \equiv \alpha \rightarrow \delta_i$  (en dicho orden).

**Nota 8:** Esto completa la prueba.

Como siempre podemos comenzar este proceso de sustitución pues  $\delta_1$  será siempre un axioma, una premisa en  $\Gamma$  o  $\alpha$ , queda claro que siempre podemos realizar todas las sustituciones de los  $\delta_i$  por los  $\Delta_i$  y obtener así la deducción buscada.

**Nota 9:** ... exactamente respecto de ...

En efecto, al sustituir los  $\delta_i$  por los  $\Delta_i$  únicamente se generaliza respecto a una fórmula anterior cuando el propio  $\delta_i$  se obtenía por generalización de una fórmula anterior y dichas generalizaciones son ambas respecto de la misma variable.

## Página 58

**Nota 1:** ... una versión ligeramente más general ...

El teorema de deducción puede aplicarse varias veces en una misma deducción.

Por ejemplo, supongamos que estamos construyendo una deducción, digamos  $\delta_1, \dots, \delta_m$ , a partir de unas premisas  $\Gamma$  y a continuación queremos deducir una fórmula de tipo  $\alpha \rightarrow \beta$ . Entonces, escribimos  $\alpha$  y la usamos como una premisa más hasta obtener  $\beta$  (sin generalizar respecto de variables libres en  $\alpha$  y pudiendo utilizar cualquier línea anterior  $\delta_i$  de la deducción). Al llegar a  $\beta$ , tal y como se argumenta en el primer párrafo de la página 58, obtenemos que  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ . Podemos entonces añadir la fórmula  $\alpha \rightarrow \beta$  a nuestra deducción y continuarla teniendo ahora como fórmulas anteriores a  $\delta_1, \dots, \delta_m$  y  $\alpha \rightarrow \beta$ , y nada nos impide en algún otro punto de posterior de la deducción volver a utilizar el teorema de deducción.

Más aún, podemos utilizar el teorema de deducción dentro de una demostración a la que vayamos a aplicar el teorema de deducción (teniendo siempre en cuenta las restricciones respecto a la generalización).

En efecto, supongamos como antes que tenemos una deducción  $\delta_1, \dots, \delta_m$ , a partir de unas premisas  $\Gamma$  y a continuación queremos deducir una fórmula de tipo  $\alpha \rightarrow \beta$ . Entonces, escribimos  $\alpha$  y la usamos como una premisa más hasta obtener  $\beta$  (sin generalizar respecto de variables libres en  $\alpha$ ), pero puede ocurrir que en algún punto de la deducción de  $\beta$ , digamos teniendo como fórmulas anteriores a  $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  (a parte de las fórmulas  $\delta_1, \dots, \delta_m$ ), necesitemos deducir alguna fórmula de la forma  $\gamma \rightarrow \delta$ . Para ello, tomamos  $\gamma$  como hipótesis y lo usamos como una nueva premisa hasta obtener  $\delta$ , teniendo ahora en cuenta que no podemos generalizar respecto a variables libres en  $\gamma$ , pero tampoco respecto a variables libres en  $\alpha$ . Tenemos así que

$$\delta_1, \dots, \delta_m, \alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \gamma \vdash \delta,$$

donde, como hemos dicho, en la deducción no se generaliza respecto de variables libres de  $\alpha$  ni de  $\gamma$ . Aplicando entonces el teorema de deducción obtenemos que

$$\delta_1, \dots, \delta_m, \alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n \vdash \gamma \rightarrow \delta,$$

conociendo además que en esta deducción se generaliza respecto de las mismas variables libres que en la anterior, luego tampoco se generaliza respecto a variables libres en  $\alpha$ . Podemos entonces añadir  $\gamma \rightarrow \delta$  a las fórmulas  $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  y continuar la deducción hasta obtener  $\beta$  (sin generalizar respecto a variables libres en  $\alpha$ ). Tenemos entonces que

$$\delta_1, \dots, \delta_m, \alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \gamma \rightarrow \delta \vdash \beta$$

y sabemos que en la deducción no se generaliza respecto a variables libres en  $\alpha$ . Como  $\delta_1, \dots, \delta_m$  se deducen de  $\Gamma$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  se deducen de  $\Gamma$  y  $\alpha$  y  $\gamma \rightarrow \delta$  se deduce de  $\delta_1, \dots, \delta_m, \alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ , luego de  $\alpha$  y  $\Gamma$ , concluimos que

$$\Gamma, \alpha \vdash \beta$$

sabiendo además que en la deducción no se generaliza respecto de variables libres en  $\alpha$ , con lo que por el teorema de deducción concluimos finalmente que  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ .

**Nota 2:** ... pero no oculta ningún uso de IG.

En el sentido de que las generalizaciones ocultas al deducir  $\alpha \rightarrow \beta$  a partir de  $\Gamma$  usando el teorema de deducción son respecto a las mismas variables que las no ocultas en la deducción de  $\beta$  a partir de  $\Gamma$  y  $\alpha$ .

## Página 59

**Nota 1:** ... más de un objeto ...

Por la **Nota 4** [pág. 46](#) sabemos que todo lenguaje formal admite modelos con dos o más elementos y, si es  $M$  uno de dichos modelos y tomamos  $a$  y  $b$  dos elementos distintos de  $M$ , se tiene que dada cualquier valoración  $v$  en  $M$  no se cumple que  $M \models (x = y)[v_{xy}^{ab}]$  (pues la satisfacción de dicha fórmula en  $M$  es equivalente a  $a \equiv b$ ), luego no se cumple que  $M \models \wedge xy(x = y)[v]$  y, por tanto, la fórmula  $\wedge xy(x = y)$  es falsa en  $M$ .

**Nota 2: Ejercicio ...**

Sea  $\delta_1, \dots, \delta_m$  una deducción con premisas en  $\Gamma$  de  $\alpha \rightarrow \beta$ , luego tal que  $\delta_m \equiv \alpha \rightarrow \beta$ . Entonces  $\delta_1, \dots, \delta_m, \alpha, \beta$  es una deducción de  $\beta$  con premisas en  $\Gamma$  y  $\alpha$  pues  $\beta$  se deduce por MP de  $\delta_m$  y  $\alpha$ . 

**Página 60****Nota 1: ... teorema de deducción ...**

Veamos con la demostración de la regla *modus barbara* un ejemplo concreto de como convertir un esquema de deducción (donde se utiliza el teorema de deducción) en una deducción real.

Como la primera fórmula es una premisa, la sustituimos por:

- |     |                                                                                          |         |
|-----|------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| (1) | $\alpha \rightarrow \beta$                                                               | Premisa |
| (2) | $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))$ | K1      |
| (3) | $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$                                          | MP 1, 2 |

Para la segunda fórmula, por ser una premisa, hacemos lo mismo:

- |     |                                                                                          |         |
|-----|------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| (4) | $\beta \rightarrow \gamma$                                                               | Premisa |
| (5) | $(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$ | K1      |
| (6) | $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$                                          | MP 4, 5 |

La tercera fórmula en la deducción es precisamente la fórmula  $\alpha$  que tomamos como hipótesis, con lo que la sustituimos por:

- |      |                                                                                                                                                                                |          |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| (7)  | $(\alpha \rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha))$ | K2       |
| (8)  | $\alpha \rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)$                                                                                                          | K1       |
| (9)  | $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$                                                                                     | MP 7, 8  |
| (10) | $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$                                                                                                                               | K1       |
| (11) | $\alpha \rightarrow \alpha$                                                                                                                                                    | MP 9, 10 |

La cuarta fórmula se deduce por MP de  $\alpha \rightarrow \beta$  y de  $\alpha$ , luego la sustituimos por:

- |      |                                                                                                                                    |           |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| (12) | $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))$ | K2        |
| (13) | $(\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$                                                               | MP 3, 12  |
| (14) | $\alpha \rightarrow \beta$                                                                                                         | MP 11, 13 |

Finalmente, la quinta fórmula se deduce por MP de  $\beta \rightarrow \gamma$  y de  $\beta$ , luego la sustituimos por:

- |      |                                                                                                                                    |           |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| (15) | $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$ | K2        |
| (16) | $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$                                                               | MP 6, 15  |
| (17) | $\alpha \rightarrow \gamma$                                                                                                        | MP 14, 16 |

## Página 61

### Nota 1: Teorema lógico

Observemos que en cualquier punto de una deducción en un sistema formal  $F$  podemos incluir un teorema de  $F$  (para  $K_{\mathcal{L}}$  un teorema lógico), pues nos da un esquema de deducción que podemos completar hasta una verdadera deducción sin más que sustituirlo por su demostración. Más aún, veamos que podemos incluirlos en cualquier contexto, incluso en aquellos donde tengamos “prohibido” generalizar respecto de alguna variable.

Supongamos que queremos ver que  $\Gamma \vdash_F \alpha$  para cierto conjunto de fórmulas  $\Gamma$  y cierta fórmula  $\alpha$  y que somos capaces de encontrar una deducción de  $\alpha$  con premisas en  $\Gamma$ , pero haciendo uso de algunos teoremas de  $F$  (teoremas lógicos en el caso de  $K_{\mathcal{L}}$ ), es decir, que podemos construir una deducción real de  $\alpha$  pero con premisas en  $\Gamma$  y en  $\delta_1, \dots, \delta_n$  donde cada  $\delta_i$  es un teorema de  $F$  (teorema lógico). Tenemos por tanto que  $\Gamma, \delta_1, \dots, \delta_n \vdash_F \alpha$  y, como para cada  $\delta_i$  se tiene que  $\Gamma \vdash_F \delta_i$  (pues de hecho se tiene que  $\vdash_F \delta_i$ ), por el Metateorema 2.1 concluimos que, en efecto,  $\Gamma \vdash_F \alpha$ .

En particular, podemos utilizar los teoremas lógicos que queramos en cualquier razonamiento que involucre el teorema de deducción sin preocupaciones sobre si se generaliza o no en sus demostraciones.

### Nota 2: ... teorema de deducción ...

En la deducción de  $\neg\neg\alpha$  a partir de  $\alpha$  no se generaliza respecto de ninguna variable luego es aplicable el teorema de deducción. En efecto, únicamente podría generalizarse respecto de alguna variable en la demostración del teorema lógico utilizado en (2), pero en la demostración de  $\neg\alpha$  a partir de  $\neg\neg\neg\alpha$  tampoco se generaliza respecto a ninguna variable (como se muestra en la página 60) y, por tanto, al aplicar el teorema de deducción para obtener el teorema lógico  $\neg\neg\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha$  también se obtiene una demostración en la que no se generaliza respecto a ninguna variable (ver Nota 9 pág 57).

A pesar de todo, por lo visto en la nota anterior no importa realmente si en el teorema lógico se generaliza o no respecto de que variables para poder aplicar el teorema de deducción.

### Nota 3: Reglas de la negación de la implicación

Podemos incluir también las siguientes reglas que podríamos denominar de “negación de la implicación”:

$$NI_1 : \neg(\alpha \rightarrow \beta) \vdash \alpha \wedge \neg\beta$$

$$NI_1 : \alpha \wedge \neg\beta \vdash \neg(\alpha \rightarrow \beta)$$

Las demostraciones de estas reglas precisan de algunas otras reglas demostradas más adelante (en las páginas 62 a 65), pero las presentaremos igualmente aquí y remitimos al lector a consultarlas tras leer dichas páginas.

Para la primera regla tenemos:

|     |                                  |                               |
|-----|----------------------------------|-------------------------------|
| (1) | $\neg(\alpha \rightarrow \beta)$ | Premisa                       |
| (2) | $\neg(\alpha \wedge \neg\beta)$  | Hipótesis (RA)                |
| (3) | $\neg\alpha \vee \neg\neg\beta$  | DM 2                          |
| (4) | $\alpha$                         | Hipótesis                     |
| (5) | $\neg\neg\alpha$                 | DN 4                          |
| (6) | $\neg\neg\beta$                  | MTP 3, 5                      |
| (7) | $\beta$                          | DN 6                          |
| (8) | $\alpha \rightarrow \beta$       | Tma. deducción (contr. con 1) |
| (9) | $\alpha \wedge \neg\beta$        | Red. absurdo                  |

Para la segunda regla tenemos:

|     |                                  |                     |
|-----|----------------------------------|---------------------|
| (1) | $\alpha \wedge \neg\beta$        | Premisa             |
| (2) | $\alpha \rightarrow \beta$       | Hipótesis (RA)      |
| (3) | $\alpha$                         | EC 1                |
| (4) | $\beta$                          | MP 2, 3             |
| (5) | $\neg\beta$                      | EC 1 (Contr. con 4) |
| (6) | $\neg(\alpha \rightarrow \beta)$ | Red. absurdo        |

Esto finaliza la demostración



**Nota 4:** Las otras variantes se prueban de forma similar.

Dos de las variantes se pueden demostrar utilizando la versión ya probada:

**Demostración de  $\alpha \rightarrow \neg\beta \vdash \beta \rightarrow \neg\alpha$**

|     |                                        |         |
|-----|----------------------------------------|---------|
| (1) | $\alpha \rightarrow \neg\beta$         | Premisa |
| (2) | $\neg\neg\beta \rightarrow \neg\alpha$ | NI 1    |
| (3) | $\beta \rightarrow \neg\neg\beta$      | DN      |
| (4) | $\beta \rightarrow \neg\alpha$         | MB 2, 3 |

**Demostración de  $\neg\alpha \rightarrow \beta \vdash \neg\beta \rightarrow \alpha$**

|     |                                        |         |
|-----|----------------------------------------|---------|
| (1) | $\neg\alpha \rightarrow \beta$         | Premisa |
| (2) | $\neg\beta \rightarrow \neg\neg\alpha$ | NI 1    |
| (3) | $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$    | DN      |
| (4) | $\neg\beta \rightarrow \alpha$         | MB 2, 3 |

Para la última variante utilizaremos la primera versión que hemos probado aquí:

**Demostración de  $\neg\beta \rightarrow \neg\alpha \vdash \alpha \rightarrow \beta$**

|     |                                    |         |
|-----|------------------------------------|---------|
| (1) | $\neg\beta \rightarrow \neg\alpha$ | Premisa |
| (2) | $\alpha \rightarrow \neg\neg\beta$ | NI 1    |
| (3) | $\neg\neg\beta \rightarrow \beta$  | DN      |
| (4) | $\alpha \rightarrow \beta$         | MB 2, 3 |

Esto finaliza la prueba de los tres casos que faltaban.



**Nota 5:** (Por NI y el recíproco del teorema de deducción.)

Para el primer caso tenemos:

- |     |                                    |         |
|-----|------------------------------------|---------|
| (1) | $\alpha \rightarrow \beta$         | Premisa |
| (2) | $\neg\beta$                        | Premisa |
| (3) | $\neg\beta \rightarrow \neg\alpha$ | NI 1    |
| (4) | $\neg\alpha$                       | MP 2, 3 |

Y para el segundo:

- |     |                                |         |
|-----|--------------------------------|---------|
| (1) | $\alpha \rightarrow \neg\beta$ | Premisa |
| (2) | $\beta$                        | Premisa |
| (3) | $\beta \rightarrow \neg\alpha$ | NI 1    |
| (4) | $\neg\alpha$                   | MP 2, 3 |

Esto finaliza la prueba de los dos casos



## Página 62

**Nota 1:** La otra es similar.

En efecto:

- |     |                                |         |
|-----|--------------------------------|---------|
| (1) | $\alpha \vee \beta$            | Premisa |
| (2) | $\neg\alpha \rightarrow \beta$ | EDI 1   |
| (3) | $\neg\beta \rightarrow \alpha$ | NI 2    |
| (4) | $\neg\beta$                    | Premisa |
| (5) | $\alpha$                       | MP 3, 4 |

Y esto finaliza la prueba del caso que faltaba.



### Nota 2: Regla del tertium non datur

También denotaremos por (TND) a la regla

$$\vdash \neg\alpha \vee \alpha$$

que no es más que un caso particular de (DN) pues  $\neg\alpha \vee \alpha \equiv \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ .

### Nota 3: Reglas de introducción del disyuntor

También denotaremos por (ID) a los teoremas lógicos

$$\begin{aligned} &\vdash \alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta), \\ &\vdash \alpha \rightarrow (\beta \vee \alpha). \end{aligned}$$

Como en la prueba de las dos reglas de (ID) no se generaliza (en la primera porque en la regla (C) no se generaliza y, por tanto, al aplicar el teorema de deducción tampoco se hace ninguna generalización) basta aplicar el teorema de deducción para obtener estos teoremas lógicos.



**Nota 4:** ... teorema de deducción ...

Por (C) tenemos que  $\alpha, \neg\alpha \vdash \beta$  y, como en la prueba de (C) no se generaliza, podemos aplicar el teorema de deducción para obtener que  $\alpha \vdash \neg\alpha \rightarrow \beta$ .

**Nota 5:** También llamaremos...

Veremos que en la deducción de (ED) no se generaliza y, por tanto, podemos aplicar el teorema de deducción para obtener que  $\vdash \alpha \vee \alpha \rightarrow \alpha$ .

## Página 63

**Nota 1:** ED 8

Como se ha dicho en la nota anterior, en la prueba de (ED) no se generaliza con lo que es válido utilizarla en cualquier contexto incluso aunque haya algún tipo de restricción sobre las variables respecto a las cuales se puede generalizar.

**Nota 2:** Las restantes se siguen fácilmente de estas

Para las **terceras** tenemos:

|     |                                       |         |     |                                       |         |
|-----|---------------------------------------|---------|-----|---------------------------------------|---------|
| (1) | $\neg(\alpha \wedge \beta)$           | Premisa | (1) | $\neg\alpha \vee \neg\beta$           | Premisa |
| (2) | $\neg\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$ | R 1     | (2) | $\neg\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$ | DN 1    |
| (3) | $\neg\alpha \vee \neg\beta$           | DN 2    | (3) | $\neg(\alpha \wedge \beta)$           | R 2     |

Para las **dos últimas** utilizaremos las segundas ya demostradas (teniendo en cuenta que en su prueba no se generaliza):

|     |                                                                     |                |
|-----|---------------------------------------------------------------------|----------------|
| (1) | $\neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$                                 | Hipótesis      |
| (2) | $\alpha \vee \beta$                                                 | DM 1           |
| (3) | $\neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow (\alpha \vee \beta)$ | Tma. deducción |
| (4) | $\neg(\alpha \vee \beta) \rightarrow (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$ | NI 3           |
| (5) | $\neg(\alpha \vee \beta)$                                           | Premisa        |
| (6) | $\neg\alpha \wedge \neg\beta$                                       | MP 4, 5        |
| (1) | $\alpha \vee \beta$                                                 | Hipótesis      |
| (2) | $\neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$                                 | DM 1           |
| (3) | $(\alpha \vee \beta) \rightarrow \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$ | Tma. deducción |
| (4) | $(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg(\alpha \vee \beta)$ | NI 3           |
| (5) | $\neg\alpha \wedge \neg\beta$                                       | Premisa        |
| (6) | $\neg(\alpha \vee \beta)$                                           | MP 4, 5        |

Esto finaliza las demostraciones de los casos restantes.



## Página 64

**Nota 1:** ... teorema de deducción ...

Por (MTP) tenemos que  $\neg\alpha \vee \neg\beta, \neg\neg\beta \vdash \neg\alpha$  y, como en la deducción no se generaliza, podemos aplicar el teorema de deducción y obtener (\*).

**Nota 2:** Análogamente se prueba la otra ...

En efecto:

- |     |                                                     |         |
|-----|-----------------------------------------------------|---------|
| (1) | $\neg\beta \rightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta)$ | ID      |
| (2) | $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \rightarrow \beta$ | NI 1    |
| (3) | $\alpha \wedge \beta$                               | Premisa |
| (4) | $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$                   | DM 3    |
| (5) | $\beta$                                             | MP 2, 4 |

Lo que concluye la demostración de la regla (EC).



**Nota 3:** IC

Por (IC) tenemos que  $\alpha \vdash \alpha \wedge \alpha$  y, como en la demostración no se generaliza (pues en la deducción de (\*) no se generaliza al no hacerse tampoco en la deducción de (MTP)), podemos aplicar el teorema de deducción y obtener

$$\vdash \alpha \rightarrow (\alpha \wedge \alpha).$$

En concreto, en la deducción tratada se usa este teorema lógico con la fórmula  $\neg\alpha$ .

## Página 65

**Nota 1:** ... Igualmente usando DN ...

Si suponemos  $\alpha$  la deducción tras la línea  $k$  continuaría como

- |         |                                               |                |
|---------|-----------------------------------------------|----------------|
| $(k+1)$ | $\alpha \rightarrow (\beta \wedge \neg\beta)$ | Tma. deducción |
| $(k+2)$ | $\neg(\beta \wedge \neg\beta)$                | NC             |
| $(k+3)$ | $\neg\alpha$                                  | MT $k+1, k+2$  |

Luego, en definitiva, se concluye con  $\neg\alpha$  como se había comentado.

**Nota 2:** ... la restricción sobre la generalización ...

Por lo dicho en la **Nota 1 pág. 61** tenemos que podemos utilizar los teoremas lógicos que queramos en cualquier razonamiento por reducción al absurdo sin preocupaciones sobre si se generaliza o no en sus demostraciones.

## Página 66

### Nota 1: ... Reglas relacionadas con el bicondicionador

Podemos dar tres reglas más relacionadas con el bicondicionador que resultan útiles:

■ **Modus Barbara para el bicondicionador (MBB):**

$$\alpha \leftrightarrow \beta, \beta \leftrightarrow \gamma \vdash \alpha \leftrightarrow \gamma$$

$$\alpha \leftrightarrow \beta, \gamma \leftrightarrow \beta \vdash \alpha \leftrightarrow \gamma$$

- (1)  $\alpha \leftrightarrow \beta$  Premisa
- (2)  $\beta \leftrightarrow \gamma$  Premisa
- (3)  $\alpha \rightarrow \beta$  EB 1
- (4)  $\beta \rightarrow \gamma$  EB 2
- (5)  $\alpha \rightarrow \gamma$  MB 3, 4
- (6)  $\beta \rightarrow \alpha$  EB 1
- (7)  $\gamma \rightarrow \beta$  EB 2
- (8)  $\gamma \rightarrow \alpha$  MB 6, 7
- (9)  $\alpha \leftrightarrow \gamma$  IB 5, 8

La segunda regla se prueba de forma completamente análoga.



■ **Sustitución por equivalencia (SE):**

$$\alpha \leftrightarrow \beta, \alpha \vdash \beta$$

|                                                                                                                                                                                                                                              |                                                     |                                                                                                                                                                                                                                              |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>(1) <math>\alpha \rightarrow \beta</math> Premisa</li> <li>(2) <math>\alpha \rightarrow \beta</math> EB 1</li> <li>(3) <math>\alpha</math> Premisa</li> <li>(4) <math>\beta</math> MP 2, 3</li> </ol> | $\alpha \leftrightarrow \beta, \beta \vdash \alpha$ | <ol style="list-style-type: none"> <li>(1) <math>\alpha \rightarrow \beta</math> Premisa</li> <li>(2) <math>\beta \rightarrow \alpha</math> EB 1</li> <li>(3) <math>\beta</math> Premisa</li> <li>(4) <math>\alpha</math> MP 2, 3</li> </ol> |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Esto prueba los dos casos.



Dos fórmulas  $\alpha, \beta$  que cumplen  $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta$  se dice que son **lógicamente equivalentes** y lo que la regla (SE) nos dice es que si dos fórmulas son lógicamente equivalentes entonces podemos “sustituir” una por otra en cualquier deducción.

■ **Regla de la contradicción bicondicional (CB):**

$$\alpha \leftrightarrow \neg\alpha \vdash \alpha \wedge \neg\alpha$$

$$\alpha \wedge \neg\alpha \vdash \alpha \leftrightarrow \neg\alpha$$

- |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>(1) <math>\alpha \leftrightarrow \neg\alpha</math> Premisa</li> <li>(2) <math>\neg\alpha \rightarrow \alpha</math> EB 1</li> <li>(3) <math>\alpha \vee \alpha</math> EDI 2</li> <li>(4) <math>\alpha</math> ED 3</li> <li>(5) <math>\alpha \rightarrow \neg\alpha</math> EB 1</li> <li>(6) <math>\neg\alpha</math> MP 4, 5</li> <li>(7) <math>\alpha \wedge \neg\alpha</math> IC 4, 6</li> </ol> | $\alpha \wedge \neg\alpha \vdash \alpha \leftrightarrow \neg\alpha$ | <ol style="list-style-type: none"> <li>(1) <math>\alpha \wedge \neg\alpha</math> Premisa</li> <li>(2) <math>\alpha</math> Hipótesis</li> <li>(3) <math>\neg\alpha</math> EC 1</li> <li>(4) <math>\alpha \rightarrow \neg\alpha</math> Tma. deducción</li> <li>(5) <math>\neg\alpha</math> Hipótesis</li> <li>(6) <math>\alpha</math> EC 1</li> <li>(7) <math>\neg\alpha \rightarrow \alpha</math> Tma. deducción</li> <li>(8) <math>\alpha \leftrightarrow \neg\alpha</math> IB 4, 7</li> </ol> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Esto prueba los dos casos. 

Observamos entonces que en la regla (C) podríamos tomar como premisa  $\alpha \leftrightarrow \neg\alpha$  y que para obtener una contradicción al utilizar reducción al absurdo podemos también concluir con  $\alpha \leftrightarrow \neg\alpha$ .

## Nota 2: Regla de eliminación del generalizador

Un caso particular de (EG) que se utiliza a menudo es:

$$\bigwedge x \alpha \vdash \alpha,$$

que no es más que (EG) tomando el término  $t \equiv x$  y utilizando el Teorema 1.13 1) para concluir que  $S_x^x \alpha \equiv \alpha$ .

**Nota 3:** Por el axioma (K4) ...

Como se dice en el texto, la deducción de (EG) es un uso inmediato de MP junto al axioma K4:

- |     |                                               |         |
|-----|-----------------------------------------------|---------|
| (1) | $\bigwedge x \alpha \rightarrow S_x^t \alpha$ | K4      |
| (2) | $\bigwedge x \alpha$                          | Premisa |
| (3) | $S_x^t \alpha$                                | MP 1, 2 |

**Nota 4:**  $\neg \bigwedge x \alpha \vdash \bigvee x \neg \alpha \quad \bigvee x \neg \alpha \vdash \neg \bigwedge x \alpha$

En las deducciones de estas dos reglas se generaliza respecto de  $x$ .

**Nota 5:** IG 6

Como se comenta en el texto, es posible generalizar respecto de la variable  $x$  puesto que dicha variable no está libre en  $\neg \bigvee x \neg \alpha$ .

**Nota 6:** IG 4

Es posible generalizar respecto de la variable  $x$  puesto que dicha variable no está libre en  $\bigwedge x \alpha$ .

## Página 67

**Nota 1:**  $\neg \bigvee x \neg \alpha \vdash \bigwedge x \alpha \quad \bigwedge x \alpha \vdash \neg \bigvee x \neg \alpha$

En las deducciones de estas dos reglas se generaliza respecto de  $x$ .

**Nota 2: Regla de introducción del particularizador**

Podemos introducir cuatro reglas más relacionadas con el generalizador y el particularizador que pueden resultar útiles:

- Regla de generalización del condicional (GC):

$$\alpha \rightarrow \beta \vdash \bigwedge x \alpha \rightarrow \bigwedge x \beta$$

|     |                                                    |                             |
|-----|----------------------------------------------------|-----------------------------|
| (1) | $\alpha \rightarrow \beta$                         | Premisa                     |
| (2) | $\bigwedge x \alpha$                               | Hipótesis                   |
| (3) | $\alpha$                                           | EG 2                        |
| (4) | $\beta$                                            | MP 1, 3                     |
| (5) | $\bigwedge x \beta$                                | IG 4 ( $x$ no libre en (2)) |
| (6) | $\bigwedge x \alpha \rightarrow \bigwedge x \beta$ | Tma. deducción              |

Esto prueba la regla.



- Regla de particularización del condicional (PC):

$$\alpha \rightarrow \beta \vdash \bigvee x \alpha \rightarrow \bigvee x \beta$$

|     |                                                                        |         |
|-----|------------------------------------------------------------------------|---------|
| (1) | $\alpha \rightarrow \beta$                                             | Premisa |
| (2) | $\neg \beta \rightarrow \neg \alpha$                                   | NI 1    |
| (3) | $\bigwedge x \neg \beta \rightarrow \bigwedge x \neg \alpha$           | GC 2    |
| (4) | $\neg \bigwedge x \neg \alpha \rightarrow \neg \bigwedge x \neg \beta$ | NI 3    |
| (5) | $\bigvee x \alpha \rightarrow \bigvee x \beta$                         | R 4     |

Esto prueba la regla.



- Regla de generalización del bicondicional (GB):

$$\alpha \leftrightarrow \beta \vdash \bigwedge x \alpha \leftrightarrow \bigwedge x \beta$$

|     |                                                        |         |
|-----|--------------------------------------------------------|---------|
| (1) | $\alpha \leftrightarrow \beta$                         | Premisa |
| (2) | $\alpha \rightarrow \beta$                             | EB 1    |
| (3) | $\bigwedge x \alpha \rightarrow \bigwedge x \beta$     | GC 2    |
| (4) | $\beta \rightarrow \alpha$                             | EB 1    |
| (5) | $\bigwedge x \beta \rightarrow \bigwedge x \alpha$     | GC 4    |
| (6) | $\bigwedge x \alpha \leftrightarrow \bigwedge x \beta$ | IB 3, 5 |

Esto prueba la regla.



- Regla de particularización del bicondicional (PB):

$$\alpha \leftrightarrow \beta \vdash \bigvee x \alpha \leftrightarrow \bigvee x \beta$$

|     |                                                    |         |
|-----|----------------------------------------------------|---------|
| (1) | $\alpha \leftrightarrow \beta$                     | Premisa |
| (2) | $\alpha \rightarrow \beta$                         | EB 1    |
| (3) | $\bigvee x \alpha \rightarrow \bigvee x \beta$     | PC 2    |
| (4) | $\beta \rightarrow \alpha$                         | EB 1    |
| (5) | $\bigvee x \beta \rightarrow \bigvee x \alpha$     | PC 4    |
| (6) | $\bigvee x \alpha \leftrightarrow \bigvee x \beta$ | IB 3, 5 |

Esto prueba la regla.



Observemos que en todas las reglas se generaliza respecto de  $x$ .

**Nota 3:** ... (IP) ...

Observemos que como por el Teorema 2.13 1) se tiene que  $S_x^x \alpha \equiv \alpha$  y por (IP) tenemos que  $S_x^x \alpha \vdash \forall x \alpha$ , un caso particular de (IP) será  $\alpha \vdash \forall x \alpha$ .

**Nota 4: Teorema 2.9**

En las demostraciones de los tres teoremas lógicos del Teorema 2.9 se generaliza respecto de  $x$  e  $y$ .

**Nota 5:** ... *Se cumplen los siguientes hechos* ...

Más aún, veamos que en los puntos 1) y 2) podemos relajar la condición de que  $y$  no esté en  $\alpha$  a exigir simplemente que  $y$  no esté libre en  $\alpha$ . Esto implica también que en el punto 3) podemos exigir únicamente que las variables  $y_1, \dots, y_n$  no estén libres en  $\alpha$  y sean distintas de  $x_1, \dots, x_n$ , pues basta repetir la demostración dada en la **Nota 1** **pág. 68** cambiando cada mención a que ciertas variables “no están” en cierta expresión por decir que “no están libres” en dicha expresión (salvo en la mención a la propia definición del cuantificador existencial con unicidad) y cada mención de 2) por la versión que daremos aquí.

Para probar lo dicho necesitaremos el siguiente resultado:

### Metateorema 2.2

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal,  $\alpha$  una fórmula de  $\mathcal{L}$  y  $x, y$  variables de modo que  $y$  no está libre en  $\alpha$ . Entonces se cumple que

$$\vdash \alpha \leftrightarrow S_y^x S_x^y \alpha.$$

Observemos que si  $y \equiv x$  entonces por el Teorema 1.13 1) se tiene que

$$S_y^x S_x^y \alpha \equiv S_x^x S_x^x \alpha \equiv \alpha$$

y el resultado es claro por el Teorema 2.7 (y la regla (IB)).

Por otra parte, si  $y \neq x$  entonces tenemos<sup>2</sup>:

|     |                                             |                                                      |
|-----|---------------------------------------------|------------------------------------------------------|
| (1) | $\alpha$                                    | Hipótesis                                            |
| (2) | $y = x$                                     | Hipótesis                                            |
| (3) | $S_x^y \alpha$                              | ETI 1, 2 (Tma. 1.13 1): $\alpha \equiv S_x^x \alpha$ |
| (4) | $y = x \rightarrow S_x^y \alpha$            | Tma. deducción                                       |
| (5) | $\wedge y (y = x \rightarrow S_x^y \alpha)$ | IG 4 ( $y$ no libre en 1)                            |

<sup>2</sup> En la demostración utilizaremos las reglas (II), (I), (SI) y (ETI) (ver págs. 70 y 71). Claramente, en la demostración de dichas reglas de inferencia no se utiliza el resultado que buscamos probar.

|      |                                            |                                           |
|------|--------------------------------------------|-------------------------------------------|
| (6)  | $S_y^x(y = x \rightarrow S_x^y\alpha)$     | EG 5                                      |
| (7)  | $x = x \rightarrow S_y^x S_x^y\alpha$      | R 6                                       |
| (8)  | $x = x$                                    | I                                         |
| (9)  | $S_y^x S_x^y\alpha$                        | MP 7, 8                                   |
| (10) | $\alpha \rightarrow S_y^x S_x^y\alpha$     | Tma. deducción                            |
| (11) | $S_y^x S_x^y\alpha$                        | Hipótesis                                 |
| (12) | $\wedge y(y = x \rightarrow S_x^y\alpha)$  | II 11 ( $y$ no libre en $x$ )             |
| (13) | $y = x \rightarrow S_x^y\alpha$            | EG 12                                     |
| (14) | $y = x$                                    | Hipótesis                                 |
| (15) | $S_x^y\alpha$                              | MP 13, 14                                 |
| (16) | $x = y$                                    | SI 14                                     |
| (17) | $S_x^x\alpha \equiv \alpha$                | ETI 15, 16 (Tma. 1.13 1)                  |
| (18) | $y = x \rightarrow \alpha$                 | Tma. deducción                            |
| (19) | $\wedge y(y = x \rightarrow \alpha)$       | IG 18 ( $y$ no libre en 11 [Tma. 1.13 3]) |
| (20) | $x = x \rightarrow S_y^x\alpha$            | EG 19                                     |
| (21) | $x = x$                                    | I                                         |
| (22) | $S_y^x\alpha$                              | MP 20, 21                                 |
| (22) | $\alpha$                                   | R 22 (Tma. 1.13 2))                       |
| (24) | $S_y^x S_x^y\alpha \rightarrow \alpha$     | Tma. deducción                            |
| (25) | $\alpha \leftrightarrow S_y^x S_x^y\alpha$ | IB 10, 24                                 |

Esto prueba lo deseado. 

Podemos ahora probar lo dicho respecto al Teorema 2.9:

La **demostración de 1)** es:

|      |                                                       |                                              |
|------|-------------------------------------------------------|----------------------------------------------|
| (1)  | $\wedge x\alpha$                                      | Hipótesis                                    |
| (2)  | $S_x^y\alpha$                                         | EG 1                                         |
| (3)  | $\wedge y S_x^y\alpha$                                | IG 2 ( $y$ no libre en 1)                    |
| (4)  | $\wedge x\alpha \rightarrow \wedge y S_x^y\alpha$     | Tma. deducción                               |
| (5)  | $\wedge y S_x^y\alpha$                                | Hipótesis                                    |
| (6)  | $S_y^x S_x^y\alpha$                                   | EG 5                                         |
| (7)  | $\alpha$                                              | SE 6, Mteo. 2.2 ( $y$ no libre en $\alpha$ ) |
| (8)  | $\wedge x\alpha$                                      | IG 7 ( $x$ no libre en 5 [Tma. 1.13 3])      |
| (9)  | $\wedge y S_x^y\alpha \rightarrow \wedge x\alpha$     | Tma. deducción                               |
| (10) | $\wedge x\alpha \leftrightarrow \wedge y S_x^y\alpha$ | IB 4, 9                                      |

Por otra parte, para **demostrar 2)** basta observar que si  $y$  no está libre en  $\alpha$ , entonces tampoco lo está en  $\neg\alpha$  y por 1) tenemos

$$\vdash \wedge x\neg\alpha \leftrightarrow \wedge y S_x^y\neg\alpha.$$

Con esto obtenemos

|     |                                                                     |             |
|-----|---------------------------------------------------------------------|-------------|
| (1) | $\wedge x\neg\alpha \leftrightarrow \wedge y S_x^y\neg\alpha$       | Tma. lógico |
| (2) | $\wedge x\neg\alpha \rightarrow \wedge y S_x^y\neg\alpha$           | EB 1        |
| (3) | $\neg \wedge y S_x^y\neg\alpha \rightarrow \neg \wedge x\neg\alpha$ | NI 2        |
| (4) | $\neg \wedge y\neg S_x^y\alpha \rightarrow \neg \wedge x\neg\alpha$ | R 3         |
| (5) | $\forall y S_x^y\alpha \rightarrow \forall x\alpha$                 | R 4         |

- (6)  $\wedge y S_x^y \neg \alpha \rightarrow \wedge x \neg \alpha$  EB 1
- (7)  $\neg \wedge x \neg \alpha \rightarrow \neg \wedge y S_x^y \neg \alpha$  NI 6
- (8)  $\neg \wedge x \neg \alpha \rightarrow \neg \wedge y \neg S_x^y \alpha$  R 7
- (9)  $\forall x \alpha \rightarrow \forall y S_x^y \alpha$  R 8
- (10)  $\forall x \alpha \leftrightarrow \forall y S_x^y \alpha$  IB 5, 9

que es justamente la demostración buscada. 

Por completitud enunciaremos y demostraremos la siguiente generalización del Metateorema 2.2:

### Metateorema 2.3

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal,  $\theta$  una expresión,  $t$  un término y  $x, y$  variables de modo que  $y$  no está libre en  $\theta$  ni en  $t$ . Entonces se cumple que

$$\vdash S_x^t \theta \leftrightarrow S_y^t S_x^y \theta$$

si  $\theta$  es una fórmula, y

$$\vdash S_x^t \theta = S_y^t S_x^y \theta$$

si  $\theta$  es un término.

Si  $y \equiv x$  entonces el resultado es inmediato (usando el Teorema 2.7 o la regla (I) en cada caso) puesto que por el Teorema 1.13 1) es

$$S_y^t S_x^y \theta \equiv S_x^t S_x^x \theta \equiv S_x^t \theta.$$

Por tanto, podemos suponer que  $y \not\equiv x$ .

Así, si  $\theta \equiv \alpha$  es una fórmula, la demostración es completamente análoga a la dada en la página 71 introduciendo lo siguiente entre las líneas 2 y 3:

- |       |                                                   |                         |
|-------|---------------------------------------------------|-------------------------|
| (1)   | $x = y$                                           | Hipótesis               |
| (2)   | $\alpha$                                          | Hipótesis               |
| (2.1) | $\alpha \leftrightarrow S_y^x S_x^y \alpha$       | Teo. lógico (Mteo. 2.2) |
| (2.2) | $S_y^x S_x^y \alpha$                              | SE 2, 2.1               |
| (3)   | $\wedge y (y = x \rightarrow S_y^x \alpha)$       | II 2.2                  |
| ...   |                                                   |                         |
| (19)  | $S_x^t \alpha \leftrightarrow S_y^t S_x^y \alpha$ | MP 17, 18               |

Por otra parte, si  $\theta \equiv t'$  es un término, por el Metateorema 1.8 basta ver que

$$\vdash w = S_x^t t' \leftrightarrow w = S_y^t S_x^y t' \quad (2.1)$$

donde  $w$  es una variable que no está en  $S_x^t t'$  ni en  $S_y^t S_x^y t'$  y que es distinta de  $x$  e  $y$ . Ahora bien, como  $w$  es distinta de  $x$  y de  $y$  se tiene que

$$w = S_x^t t' \equiv S_x^t (w = t')$$

y

$$w = S_y^t S_x^y t' \equiv S_y^t S_x^y (w = t'),$$

con lo que (2.1) queda demostrado por lo visto para el caso en el que  $\theta$  era una fórmula (teniendo en cuenta que  $y$  no está libre en  $w = t'$ ). 



## Página 68

**Nota 1:** DEMOSTRACIÓN ...

**Demostremos en primer lugar 1).**

En virtud de la regla (IB) basta demostrar cada implicación por separado.

Para la primera tenemos

|     |                                                           |                |
|-----|-----------------------------------------------------------|----------------|
| (1) | $\bigwedge x \alpha$                                      | Hipótesis      |
| (2) | $S_x^y \alpha$                                            | EG 1           |
| (3) | $\bigwedge y S_x^y \alpha$                                | IG 2           |
| (4) | $\bigwedge x \alpha \rightarrow \bigwedge y S_x^y \alpha$ | Tma. deducción |

donde el uso de (IG) en (3) es válido pues  $y$  no está libre en (1) ya que, por hipótesis, no está en  $\alpha$ .

Para la segunda tenemos

|     |                                                           |                                         |
|-----|-----------------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| (1) | $\bigwedge y S_x^y \alpha$                                | Hipótesis                               |
| (2) | $S_y^x S_x^y \alpha$                                      | EG 1                                    |
| (3) | $\alpha$                                                  | R 2 (Tma. 1.13 4); $y$ no en $\alpha$ ) |
| (4) | $\bigwedge x \alpha$                                      | IG 3                                    |
| (5) | $\bigwedge y S_x^y \alpha \rightarrow \bigwedge x \alpha$ | Tma. deducción                          |

donde, de nuevo, el uso de (IG) en (4) es válido pues  $x$  no está libre en (1) ya que no lo está en  $S_x^y \alpha$  (pues, por el Teorema 1.13 3), se tiene que  $x$  está libre en  $S_x^y \alpha$  syss  $x$  está libre en  $\alpha$  y  $x \equiv y$ , lo cual contradice que  $y$  no está en  $\alpha$ ).

**Demostremos ahora 2).**

Si  $y$  no está en  $\alpha$ , entonces tampoco está en  $\neg \alpha$  y por 1) tenemos

$$\vdash \bigwedge x \neg \alpha \leftrightarrow \bigwedge y S_x^y \neg \alpha.$$

Con esto obtenemos:

|      |                                                                               |             |
|------|-------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| (1)  | $\bigwedge x \neg \alpha \leftrightarrow \bigwedge y S_x^y \neg \alpha$       | Tma. lógico |
| (2)  | $\bigwedge x \neg \alpha \rightarrow \bigwedge y S_x^y \neg \alpha$           | EB 1        |
| (3)  | $\neg \bigwedge y S_x^y \neg \alpha \rightarrow \neg \bigwedge x \neg \alpha$ | NI 2        |
| (4)  | $\neg \bigwedge y \neg S_x^y \alpha \rightarrow \neg \bigwedge x \neg \alpha$ | R 3         |
| (5)  | $\bigvee y S_x^y \alpha \rightarrow \bigvee x \alpha$                         | R 4         |
| (6)  | $\bigwedge y S_x^y \neg \alpha \rightarrow \bigwedge x \neg \alpha$           | EB 1        |
| (7)  | $\neg \bigwedge x \neg \alpha \rightarrow \neg \bigwedge y S_x^y \neg \alpha$ | NI 6        |
| (8)  | $\neg \bigwedge x \neg \alpha \rightarrow \neg \bigwedge y \neg S_x^y \alpha$ | R 7         |
| (9)  | $\bigvee x \alpha \rightarrow \bigvee y S_x^y \alpha$                         | R 8         |
| (10) | $\bigvee x \alpha \leftrightarrow \bigvee y S_x^y \alpha$                     | IB 5, 9     |

Finalmente, **demostremos 3).**

Comencemos viendo que si  $z_1, \dots, z_n$  son variables que no están en  $\bigwedge x_1 \dots x_n \alpha$  y  $w_1, \dots, w_n$  variables que no están en  $\bigwedge x_1 \dots x_n \alpha$  y distintas de todos los  $z_1, \dots, z_n$ , en-

tonces se cumple que

$$\vdash \bigvee z_1 \cdots z_n \bigwedge x_1 \cdots x_n (\alpha \leftrightarrow z_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge z_n = x_n) \leftrightarrow \bigvee w_1 \cdots w_n \bigwedge x_1 \cdots x_n (\alpha \leftrightarrow w_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge w_n = x_n). \quad (2.2)$$

Denotando

$$\beta \equiv \bigwedge x_1 \cdots x_n (\alpha \leftrightarrow z_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge z_n = x_n),$$

como  $w_n$  no está en  $\beta$ , por 2) se tiene que

$$\vdash \bigvee z_n \beta \leftrightarrow \bigvee w_n S_{z_n}^{w_n} \beta. \quad (2.3)$$

Ahora, como  $w_{n-1}$  tampoco está en  $\bigvee w_n S_{z_n}^{w_n} \beta$ , tenemos nuevamente por 2) que

$$\vdash \bigvee z_{n-1} \bigvee w_n S_{z_n}^{w_n} \beta \leftrightarrow \bigvee w_{n-1} S_{z_{n-1}}^{w_{n-1}} \bigvee w_n S_{z_n}^{w_n} \beta, \quad (2.4)$$

y con ello

|                                                                                                                                             |                   |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|
| (1) $\bigvee z_n \beta \leftrightarrow \bigvee w_n S_{z_n}^{w_n} \beta$                                                                     | Tma. lógico (2.3) |
| (2) $\bigvee z_{n-1} \bigvee z_n \beta \leftrightarrow \bigvee z_{n-1} \bigvee w_n S_{z_n}^{w_n} \beta$                                     | PB 1              |
| (3) $\bigvee z_{n-1} \bigvee w_n S_{z_n}^{w_n} \beta \leftrightarrow \bigvee w_{n-1} S_{z_{n-1}}^{w_{n-1}} \bigvee w_n S_{z_n}^{w_n} \beta$ | Tma. lógico (2.4) |
| (4) $\bigvee z_{n-1} \bigvee w_n S_{z_n}^{w_n} \beta \leftrightarrow \bigvee w_{n-1} \bigvee w_n S_{z_{n-1}}^{w_{n-1}} S_{z_n}^{w_n} \beta$ | R 3               |
| (5) $\bigvee z_{n-1} \bigvee z_n \beta \leftrightarrow \bigvee w_{n-1} \bigvee w_n S_{z_{n-1}}^{w_{n-1}} S_{z_n}^{w_n} \beta$               | MBB 2, 4          |

donde hemos usado (1.37) en (4) para obtener que

$$S_{z_{n-1}}^{w_{n-1}} \bigvee w_n S_{z_n}^{w_n} \beta \equiv \bigvee w_n S_{z_{n-1}}^{w_{n-1}} S_{z_n}^{w_n} \beta.$$

Con todo obtenemos que

$$\vdash \bigvee z_{n-1} z_n \beta \leftrightarrow \bigvee w_{n-1} w_n S_{z_{n-1}}^{w_{n-1}} S_{z_n}^{w_n} \beta. \quad (2.5)$$

Nuevamente, como  $w_{n-2}$  no está en  $\bigvee w_{n-1} w_n S_{z_{n-1}}^{w_{n-1}} S_{z_n}^{w_n} \beta$  por 2) se obtiene que

$$\vdash \bigvee z_{n-2} \bigvee w_{n-1} w_n S_{z_{n-1}}^{w_{n-1}} S_{z_n}^{w_n} \beta \leftrightarrow \bigvee w_{n-2} S_{z_{n-2}}^{w_{n-2}} \bigvee w_{n-1} w_n S_{z_{n-1}}^{w_{n-1}} S_{z_n}^{w_n} \beta, \quad (2.6)$$

y con una demostración completamente análoga a la anterior se llega a que

$$\vdash \bigvee z_{n-2} z_{n-1} z_n \beta \leftrightarrow \bigvee w_{n-2} w_{n-1} w_n S_{z_{n-2}}^{w_{n-2}} S_{z_{n-1}}^{w_{n-1}} S_{z_n}^{w_n} \beta. \quad (2.7)$$

Repitiendo el mismo proceso  $(n-3)$  veces más se obtiene que

$$\vdash \bigvee z_1 \cdots z_n \beta \leftrightarrow \bigvee w_1 \cdots w_n S_{z_1}^{w_1} \cdots S_{z_n}^{w_n} \beta, \quad (2.8)$$

y como por (1.36) y el Teorema 1.13 2) es

$$S_{z_1}^{w_1} \cdots S_{z_n}^{w_n} \beta \equiv \underbrace{\bigwedge x_1 \cdots x_n (\alpha \leftrightarrow w_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge w_n = x_n)}_{\beta'}$$

---

<sup>3</sup> Por el Metateorema 1.1 y el Metateorema 1.10 3) y 6) teniendo en cuenta que  $w_n$  tampoco está en  $\beta$ .

concluimos que

$$\vdash \bigvee z_1 \cdots z_n \beta \leftrightarrow \bigvee w_1 \cdots w_n \beta' \quad (2.9)$$

lo que prueba (2.2).

Ahora, por definición tenemos que

$$\bigvee^1 x_1 \cdots x_n \alpha \equiv \bigvee z_1 \cdots z_n \bigwedge x_1 \cdots x_n (\alpha \leftrightarrow z_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge z_n = x_n)$$

donde  $z_1, \dots, z_n$  son las variables de menor índice que no están en  $\bigwedge x_1 \cdots x_n \alpha$ . Por tanto, si tomamos  $w_1, \dots, w_n$  variables que no estén en  $\bigwedge x_1 \cdots x_n \alpha$  y que sean distintas de todos los  $z_1, \dots, z_n$  e  $y_1, \dots, y_n$ , obtenemos por (2.2) que

$$\begin{aligned} \vdash \bigvee^1 x_1 \cdots x_n \alpha &\leftrightarrow \\ &\bigvee w_1 \cdots w_n \bigwedge x_1 \cdots x_n (\alpha \leftrightarrow w_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge w_n = x_n) \end{aligned} \quad (2.10)$$

y

$$\begin{aligned} \vdash \bigvee w_1 \cdots w_n \bigwedge x_1 \cdots x_n (\alpha \leftrightarrow w_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge w_n = x_n) &\leftrightarrow \\ \bigvee y_1 \cdots y_n \bigwedge x_1 \cdots x_n (\alpha \leftrightarrow y_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge y_n = x_n). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Aplicando (MBB) a (2.10) y (2.11) concluimos que

$$\vdash \bigvee^1 x_1 \cdots x_n \alpha \leftrightarrow \bigvee y_1 \cdots y_n \bigwedge x_1 \cdots x_n (\alpha \leftrightarrow y_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge y_n = x_n)$$

tal y como queríamos. 

## Nota 2: Regla de eliminación del particularizador ...

Observamos que por lo dicho en la **Nota 1** [pág. 61](#) podemos utilizar los teoremas lógicos que queramos en cualquier aplicación de (EP) sin preocupaciones sobre si se generaliza o no en sus demostraciones.

Ahora bien, al utilizar esta regla se debe tener en cuenta que se generaliza respecto a las mismas variables que en la deducción de  $\beta$  a partir de  $S_x^y \alpha$  (porque ya sabemos que al aplicar el teorema de deducción ocurre esto), pero además se generaliza también respecto a la variable  $y$ . Por tanto, es algo que siempre se debe tener presente si se desea utilizar (EP) en un contexto en el que tengamos prohibido generalizar respecto de ciertas variables pues, a diferencia de lo que pasa con el teorema de deducción que no oculta ninguna generalización, la regla (EP) si oculta esta generalización respecto de  $y$ .

Por lo demás, tenemos que formalmente (EP) es análogo al teorema de deducción pues de suponer una nueva premisa que no se deduce de las premisas originales<sup>4</sup> y utilizarla (con ciertas restricciones) para deducir una nueva fórmula, podemos concluir que dicha fórmula (bajo ciertas condiciones) se deduce realmente de las premisas originales. Sin embargo, a nivel semántico no estamos “suponiendo” nada, sino que estamos “tomando un ejemplo” de los que nos garantiza su existencia la línea  $k$ . Por tanto, para marcar esta diferencia semántica en las deducciones (y también para recordar que al usar (EP) se generaliza

respecto de  $y$  y que la fórmula deducida no puede tener libre a la variable  $y$ ) en este texto marcaremos el uso de (EP) con una línea vertical discontinua en lugar de la línea continua utilizada para el teorema de deducción.

Volviendo a la parte semántica de la regla (EP) observamos que el “ejemplo” debemos tomarlo con cierto cuidado:

- La variable que tomemos como “ejemplo concreto que satisface  $\alpha$ ” debe ser nueva para no “confundirla” con otras variables que también hayamos “fijado” en la demostración. Formalmente esto nos lo marca el exigir que si  $y \neq x$  entonces  $y$  no debe estar en  $\alpha$  (para no confundirla con otras variables de  $\alpha$  distintas de  $x$ ) y la restricción que en ciertas situaciones nos impone el hecho de que (EP) generaliza finalmente respecto a esta variable  $y$  (ver la discusión sobre esto en la página 69).
- Por otra parte, una vez “elegido el ejemplo”,  $y$  deja de ser una variable arbitraria para convertirse en un “objeto concreto”. Así pues, a partir de dicho momento debemos comprometernos a no generalizar respecto de  $y$ , porque aunque hemos tomado el convenio de considerar que una variable  $z$  significa “un  $z$  cualquiera” (y por eso podemos generalizar en cualquier momento), la variable  $y$  ha pasado a ser “un ejemplo particular” y, por tanto, no tiene sentido generalizar respecto a ella. Más aún, no podemos generalizar respecto a ninguna variable libre de  $\alpha$  pues al “fijar  $y$ ” el resto de variables de  $\alpha$  que tengan alguna dependencia con  $y$  también dejarán de ser variables arbitrarias. Por ejemplo, en el caso tratado al final de la página 69 tenemos que en la tercera línea, tras tomar la variable  $y$  como “ejemplo” de un natural que es mayor que  $x$ , resulta que  $x$  ya no es “un número natural cualquiera”, sino un natural que “está por debajo de  $y$ ”, luego tampoco tiene sentido generalizar respecto de esta variable.

### Nota 3: ... (EP) ...

Veamos una versión de la regla de eliminación del particularizador en la que se “entremezcla” con el teorema de deducción:

**Regla de eliminación del particularizador 2 (EP<sub>2</sub>):** En la siguiente situación

|       |                   |                                                                               |
|-------|-------------------|-------------------------------------------------------------------------------|
| (1)   | $\gamma_1$        |                                                                               |
|       | ...               | Deducción a partir de unas premisas $\alpha_1, \dots, \alpha_n$               |
| (m)   | $\gamma_m$        |                                                                               |
| (m+1) | $\gamma$          | Hipótesis                                                                     |
|       | ...               | Deducción (sin generalizar respecto a variables libres en $\gamma$ ) a partir |
|       | ...               | de las premisas, las líneas precedentes y $\gamma$                            |
| (k)   | $\forall x\alpha$ |                                                                               |
|       | ...               | Deducción (sin generalizar respecto a variables libres en $\gamma$ ) a partir |

<sup>4</sup> En general  $S_x^y\alpha$  no se puede deducir únicamente de  $\forall x\alpha$ .

En efecto, si a partir de  $\forall x\alpha$  se pudiera deducir  $S_x^y\alpha$ , a continuación podríamos generalizar para obtener  $\bigwedge y S_x^y\alpha$  (que si  $y$  no está en  $\alpha$  ya hemos visto en el Teorema 2.9 1) que es equivalente a  $\bigwedge x\alpha$ ) y estaríamos pues diciendo que de suponer que existe un  $x$  que satisface  $\alpha$  podemos obtener que todo  $x$  satisface  $\alpha$ , lo cual, en general, es absurdo.

|       |                            |                                                                                                 |
|-------|----------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
|       | ...                        | de las premisas, las líneas precedentes y $\gamma$                                              |
| (l)   | $\gamma_l$                 |                                                                                                 |
| (l+1) | $S_x^y \alpha$             | EP <sub>2</sub> $k$                                                                             |
|       | ...                        | Deducción (sin generalizar respecto a variables libres en $\gamma$ ni $S_x^y \alpha$ ) a partir |
|       | ...                        | de las premisas, las líneas precedentes y $S_x^y \alpha$                                        |
| (p)   | $\beta$                    |                                                                                                 |
| (p+1) | $\gamma \rightarrow \beta$ | EP <sub>2</sub> $l + 1, p$                                                                      |
| (p+2) | $\gamma_{p+2}$             |                                                                                                 |
|       | ...                        | Deducción (sin generalizar respecto a variables libres en $\gamma$ ni $S_x^y \alpha$ ) a partir |
|       | ...                        | de las premisas, las líneas 1, 2, ..., m y $\gamma \rightarrow \beta$                           |
| (o)   | $\delta$                   | Fórmula que no tiene a $y$ como variable libre                                                  |

donde  $y \equiv x$  e  $y$  no está libre en  $\gamma$  o bien  $y$  no está en  $\alpha$  e  $y$  no está libre en  $\gamma$ , podemos afirmar que

$$\alpha_1 \cdots, \alpha_n \vdash \delta. \quad (2.12)$$

Tenemos que podemos formar el siguiente esquema de deducción:

|       |                                                |                                                                                                 |
|-------|------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| (1)   | $\gamma_1$                                     |                                                                                                 |
|       | ...                                            | Deducción a partir de unas premisas $\alpha_1, \dots, \alpha_n$                                 |
| (m)   | $\gamma_m$                                     |                                                                                                 |
| (m+1) | $\gamma$                                       | Hipótesis                                                                                       |
|       | ...                                            | Deducción (sin generalizar respecto a variables libres en $\gamma$ ) a partir                   |
|       | ...                                            | de las premisas, las líneas precedentes y $\gamma$                                              |
| (k)   | $\forall x \alpha$                             |                                                                                                 |
|       | ...                                            | Deducción (sin generalizar respecto a variables libres en $\gamma$ ) a partir                   |
|       | ...                                            | de las premisas, las líneas precedentes y $\gamma$                                              |
| (l)   | $\gamma_l$                                     |                                                                                                 |
| (l+1) | $S_x^y \alpha$                                 | EP $k$ ( $y$ no libre en $\gamma$ )                                                             |
|       | ...                                            | Deducción (sin generalizar respecto a variables libres en $\gamma$ ni $S_x^y \alpha$ ) a partir |
|       | ...                                            | de las premisas, las líneas precedentes y $S_x^y \alpha$                                        |
| (p)   | $\beta$                                        |                                                                                                 |
| (p')  | $\beta \rightarrow (\gamma \rightarrow \beta)$ | K1                                                                                              |
| (p+1) | $\gamma \rightarrow \beta$                     | MP $p, p + 1$                                                                                   |
| (p+2) | $\gamma_{p+2}$                                 |                                                                                                 |
|       | ...                                            | Deducción (sin generalizar respecto a variables libres en $\gamma$ ni $S_x^y \alpha$ ) a partir |
|       | ...                                            | de las premisas, las líneas 1, 2, ..., m y $\gamma \rightarrow \beta$                           |
| (o)   | $\delta$                                       | Fórmula que no tiene a $y$ como variable libre                                                  |
| (o+1) | $\gamma \rightarrow \delta$                    | Tma. deducción                                                                                  |
| (o+2) | $\neg \gamma$                                  | Hipótesis                                                                                       |
| (o+3) | $\gamma$                                       | Hipótesis                                                                                       |
| (o+4) | $\beta$                                        | C $o + 2, o + 3$                                                                                |
| (o+5) | $\gamma \rightarrow \beta$                     | Tma. deducción                                                                                  |
| (o+6) | $\gamma_{p+2}$                                 |                                                                                                 |
|       | ...                                            | Deducción (sin generalizar respecto a variables libres en $\gamma$ ni $S_x^y \alpha$ ) a partir |
|       | ...                                            | de las premisas, las líneas 1, 2, ..., m y $\gamma \rightarrow \beta$                           |
| (r)   | $\delta$                                       |                                                                                                 |

|         |                                               |                |
|---------|-----------------------------------------------|----------------|
| $(r+1)$ | $\neg\gamma \rightarrow \delta$               | Tma. deducción |
| $(r+2)$ | $(\gamma \vee \neg\gamma) \rightarrow \delta$ | Dil $o+1, r+1$ |
| $(r+3)$ | $\gamma \vee \neg\gamma$                      | TND            |
| $(r+4)$ | $\delta$                                      | MP $r+2, r+3$  |

Como este es un esquema de deducción en los términos de las reglas de inferencia derivadas ya descritas sabemos que se puede extender a una verdadera deducción y nos permite concluir la demostración. 

Se debe tener en cuenta que al utilizar esta regla se generaliza respecto a las mismas variables que aparezcan en la deducción mostrada, pero también respecto de  $y$ .

**Nota 4:** ... variable  $y$  no está en  $\alpha$  ...

Observemos que el único punto de la demostración donde se utiliza que  $y$  no está en  $\alpha$  es para poder aplicar el Teorema 2.9 2) y como en la **Nota 5** pág. 67 hemos visto que dicho teorema es cierto si simplemente exigimos que  $y$  no esté libre en  $\alpha$ , podemos concluir que la regla (EP) sigue siendo válida también cuando simplemente exigimos que  $y$  no esté libre en  $\alpha$ .

Lo mismo ocurre para la regla (EP<sub>2</sub>) de la nota anterior.

**Nota 5:** ... por el teorema anterior ...

Si  $y$  no está en  $\alpha$  el Teorema 2.9 2) nos asegura que

$$\vdash \forall x\alpha \leftrightarrow \forall yS_x^y\alpha,$$

luego

|     |                                                        |             |
|-----|--------------------------------------------------------|-------------|
| (1) | $\forall x\alpha$                                      | Premisa     |
| (2) | $\forall x\alpha \leftrightarrow \forall yS_x^y\alpha$ | Tma. lógico |
| (3) | $\forall yS_x^y\alpha$                                 | SE 1, 2     |

Así, se tiene que  $\forall x\alpha \vdash \forall yS_x^y\alpha$ , luego si se cumple que  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \vdash \forall x\alpha$ , entonces se cumple también que  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \vdash \forall yS_x^y\alpha$ .

Por otra parte, si  $y \equiv x$ , entonces no hay nada que probar pues por el Teorema 1.13 1) es  $S_x^y\alpha \equiv \alpha$  y con ello  $\forall x\alpha \equiv \forall yS_x^y\alpha$ .

**Nota 6:** IG 4

Podemos generalizar respecto de  $y$  porque estamos suponiendo que  $y$  no está libre en  $\beta$ .

## Página 70

**Nota 1:** ... (K6) y (EB).

|                                                                       |         |                                                                       |         |
|-----------------------------------------------------------------------|---------|-----------------------------------------------------------------------|---------|
| (1) $S_x^t \alpha$                                                    | Premisa | (1) $\wedge x(x = t \rightarrow \alpha)$                              | Premisa |
| (2) $\wedge x(x = t \rightarrow \alpha) \leftrightarrow S_x^t \alpha$ | K6      | (2) $\wedge x(x = t \rightarrow \alpha) \leftrightarrow S_x^t \alpha$ | K6      |
| (3) $\wedge x(x = t \rightarrow \alpha)$                              | SE 1, 2 | (3) $S_x^t \alpha$                                                    | SE 1, 2 |

Esto prueba los dos casos.



### Nota 2: Regla de la identidad ...

En esta regla se generaliza respecto a una variable que no está en  $t$ .

### Nota 3: Teorema lógico

Es el Teorema 2.7.

### Nota 4: R 3

Dado que  $x$  no está en  $t$ , por el Teorema 1.13 2) se tiene que  $S_x^t(x = t) \equiv t = t$ .

### Nota 5: Regla de la simetría de la identidad ...

En esta regla se generaliza respecto a una variable que no está en  $t_2$  (al usar (I)).

### Nota 6: R 1

Dado que  $x$  no está en  $t_2$ , por el Teorema 1.13 2) se tiene que  $S_x^{t_2}(t_2 = x) \equiv t_2 = t_2$ .

### Nota 7: EG 3

De nuevo, como  $x$  no está en  $t_2$ , por el Teorema 1.13 2) se tiene que

$$S_x^{t_1}(x = t_2 \rightarrow t_2 = x) \equiv t_1 = t_2 \rightarrow t_2 = t_1$$

como se busca.

### Nota 8: II 1

Como  $x$  no está en  $t_3$ , por el Teorema 1.13 2) se tiene que  $S_x^{t_2}(x = t_3) \equiv t_2 = t_3$ .

### Nota 9: EG 2

De nuevo, como  $x$  no está en  $t_2$  ni en  $t_3$ , por el Teorema 1.13 2) se tiene que

$$S_x^{t_1}(x = t_2 \rightarrow x = t_3) \equiv t_1 = t_2 \rightarrow t_1 = t_3.$$

como se busca.

## Página 71

### Nota 1: Regla de equivalencia entre términos idénticos ...

En esta regla se generaliza respecto a diversas variables.

### Nota 2: ... probamos lo siguiente ...

Lo que realmente se prueba es que si  $y$  es una variable que no está en  $\alpha$  ni en  $t$ , entonces

$$\vdash S_x^t \alpha \leftrightarrow S_y^t S_x^y \alpha. \quad (2.13)$$

Observemos además que en la demostración podemos suponer que  $y \neq x$  pues si es  $y \equiv x$  entonces (por el Teorema 1.13 1))

$$S_y^t S_x^y \alpha \equiv S_x^t S_x^x \alpha \equiv S_x^t \alpha$$

y la demostración es una simple aplicación de la regla (IB) al Teorema 2.7.

### Nota 3: Hipótesis

Como  $y$  no está en  $\alpha$ , por el Teorema 1.13 4) se tiene la identidad.

### Nota 4: II 2

Como podemos suponer que  $y \neq x$  (ver **Nota 2** [pág. 71](#)) es claro que  $y$  no está libre en  $x$ .

### Nota 5: SI 1

Observemos que estamos en un contexto en el que tenemos prohibido generalizar respecto de ciertas variables, pero estamos usando una regla de inferencia derivada en cuya demostración se generaliza. Sin embargo, la única generalización de la regla (SI) proviene de la demostración del teorema lógico (I) donde se generaliza respecto a una variable que podemos suponer que no está en  $t_1$  ni en  $t_2$ , luego no está libre en  $t_1 = t_2$ , y podemos utilizar el teorema de deducción para obtener el teorema lógico

$$\vdash t_1 = t_2 \rightarrow t_2 = t_1.$$

Por la **Nota 1** [pág. 61](#) tenemos entonces que podemos utilizar esta versión de (SI) en cualquier contexto.

Por ejemplo, en el caso particular que tratamos, simplemente sustituiríamos la línea 5 por

$$\begin{array}{ll} (5') & x = y \rightarrow y = x \quad \text{Tma. lógico} \\ (5) & y = x \quad \text{MP 1, 5'} \end{array}$$

y ya no tenemos ningún problema con las generalizaciones pues sabemos que podemos utilizar los teoremas lógicos en cualquier contexto.



**Nota 6:** II 8

Como podemos suponer que  $y \neq x$  (ver **Nota 2** pág. 71) es claro que  $x$  no está libre en  $y$ .

**Nota 7:** IG 14

Se utiliza (IG) dos veces.

**Nota 8:** EG 15

Como  $y \neq x$  (ver **Nota 2** pág. 71) e  $y$  no está libre en  $t$ , por (1.36) obtenemos:

$$\begin{aligned} S_x^t \left( \bigwedge y (x = y \rightarrow (\alpha \leftrightarrow S_x^y \alpha)) \right) &\equiv \bigwedge y S_x^t (x = y \rightarrow (\alpha \leftrightarrow S_x^y \alpha)) \equiv \\ &\bigwedge y (t = y \rightarrow (S_x^t \alpha \leftrightarrow S_x^t S_x^y \alpha)) \equiv \\ &\bigwedge y (t = y \rightarrow (S_x^t \alpha \leftrightarrow S_x^y \alpha)) \end{aligned}$$

donde  $S_x^t S_x^y \alpha \equiv S_x^y \alpha$  pues  $x$  no está libre en  $S_x^y \alpha$  (por el Teorema 1.13 3)) y aplicamos el Teorema 1.13 2).

**Nota 9:** EG 16

Tenemos que como  $y$  no está libre en  $t$  ni en  $\alpha$  se cumple que  $y$  no está libre en  $S_x^t \alpha$  (por el Teorema 1.13 3)), luego aplicando el Teorema 1.13 2) obtenemos que  $S_y^t t \equiv t$  y que  $S_y^t S_x^t \alpha \equiv S_x^t \alpha$ , luego que

$$S_y^t (t = y \rightarrow (S_x^t \alpha \leftrightarrow S_x^y \alpha)) \equiv t = t \rightarrow (S_x^t \alpha \leftrightarrow S_y^t S_x^y \alpha)$$

como se buscaba.

**Nota 10:** ... cualquier variable ...

Se tiene que, por la elección de  $z$ , si  $y$  no está en  $t'$  ni en  $t$ , entonces  $y$  no está en  $z = t'$  ni en  $t$ , luego por (2.13) se obtiene

$$\vdash S_x^t (z = t') \leftrightarrow S_y^t S_x^y (z = t').$$

Usando entonces el Teorema 1.13 2) (y teniendo en cuenta que  $z$  es también distinta de  $x$  e  $y$ ) concluimos que

$$\vdash z = S_x^t t' \leftrightarrow z = S_y^t S_x^y t',$$

luego por (EB) que

$$\vdash z = S_x^t t' \rightarrow z = S_y^t S_x^y t'.$$

**Nota 11:** ... A su vez ...

Lo que realmente se prueba es que si  $y$  es una variable que no está en  $t$  ni en  $t'$ , entonces

$$\vdash S_x^t t' = S_y^t S_x^y t'. \quad (2.14)$$

**Nota 12:** EG 2

Observemos que como  $z$  no está en  $t, t'$  ni en  $y$ , por el Teorema 1.13 3),  $z$  no está libre en  $S_x^t t'$  ni en  $S_y^t S_x^y t'$ , luego por el Teorema 1.13 2) es

$$S_z^{S_x^t t'} (z = S_x^t t' \rightarrow z = S_y^t S_x^y t') \equiv S_x^t t' = S_x^t t' \rightarrow S_x^t t' = S_y^t S_x^y t'$$

tal como se busca.

**Nota 13:** Con esto ya podemos probar ETI ...

Recordemos que tomamos  $y$  como una variable que no está en  $\alpha, t, t_1$  ni en  $t_2$ .

**Nota 14:** Teorema

Es el teorema lógico obtenido de aplicar (EB) a (2.13) considerando  $t \equiv t_2$  (donde, por la elección de  $y$ , es claro que no está en  $\alpha$  ni en  $t_2$ ).

**Nota 15:** EG 4

Observemos que, como  $y$  no está en  $t_2$ , por el Teorema 1.13 2) se tiene que  $S_y^{t_1} t_2 \equiv t_2$  y con ello

$$S_y^{t_1} (y = t_2 \rightarrow S_x^y \alpha) \equiv t_1 = t_2 \rightarrow S_y^{t_1} S_x^y \alpha.$$

**Nota 16:** Teorema

Es el teorema lógico obtenido de aplicar (EB) a (2.13) considerando  $t \equiv t_1$  (donde, por la elección de  $y$ , es claro que no está en  $\alpha$  ni en  $t_1$ ).

**Nota 17:** Teorema

Es el teorema lógico obtenido de (2.14) considerando  $t \equiv t_2$  y  $t' \equiv t$  (donde, por la elección de  $y$ , es claro que no está en  $t_2$  ni en  $t$ ).

**Nota 18:** R 2 ... EG 4

Como  $y$  no está en  $t$  ni en  $t_2$ , por el Teorema 1.13 3) sabemos que  $y$  no está libre en  $S_x^{t_2} t$ . Utilizando entonces el Teorema 1.13 2) se obtiene que

$$S_y^{t_2} (S_x^y t = S_x^{t_2} t) \equiv S_y^{t_2} S_x^y t = S_x^{t_2} t$$

y

$$S_y^{t_1} (y = t_2 \rightarrow S_x^y t = S_x^{t_2} t) \equiv t_1 = t_2 \rightarrow S_y^{t_1} S_x^y t = S_x^{t_2} t.$$

**Nota 19:** Teorema

Es el teorema lógico obtenido de (2.14) considerando  $t \equiv t_1$  y  $t' \equiv t$  (donde, por la elección de  $y$ , es claro que no está en  $t_1$  ni en  $t$ ).

**Página 72**

**Nota 1:** Se siguen de (K7), (K8) ...

En efecto, para (DP) tenemos

- $$\begin{array}{ll} (1) & \bigvee^1 x\alpha \quad \text{Premisa} \\ (2) & \bigvee^1 x\alpha \rightarrow S_x^{x|\alpha}\alpha \quad \text{K7} \\ (3) & S_x^{x|\alpha}\alpha \quad \text{MP 1, 2} \end{array}$$

y para (DI)

- $$\begin{array}{ll} (1) & \neg \bigvee^1 x\alpha \quad \text{Premisa} \\ (2) & \neg \bigvee^1 x\alpha \rightarrow x|\alpha = y|(y = y) \quad \text{K8} \\ (3) & x|\alpha = y|(y = y) \quad \text{MP 1, 2} \end{array}$$

lo que prueba las dos reglas.



**Nota 2:** ... usadas incluso en contextos ...

Observemos que si tenemos dos fórmulas  $\phi, \psi$  para las cuales se cumple que

$$(*) \quad \vdash \phi \rightarrow \psi,$$

entonces podemos utilizar  $(*)$  en una deducción como si fuera la regla de inferencia derivada

$$(**) \quad \phi \vdash \psi.$$

En efecto, si tenemos una deducción de la forma

- $$\begin{array}{ll} \dots & \text{Líneas anteriores} \\ (k) & \phi \quad \text{Premisa o deducción de líneas anteriores} \\ (k+1) & \psi \quad (**) k \\ \dots & \end{array}$$

podemos sustituir la línea  $k+1$  del siguiente modo

- $$\begin{array}{ll} \dots & \text{Líneas anteriores} \\ (k) & \phi \quad \text{Premisa o deducción de líneas anteriores} \\ (k+1) & \phi \rightarrow \psi \quad \text{Tma. lógico } (**) \\ (k+2) & \psi \quad \text{MP } k, k+1 \\ \dots & \end{array}$$

La ventaja de la segunda deducción es que, como ya hemos dicho en la [Nota 1 pág. 61](#), los teoremas lógicos podemos utilizarlos en cualquier contexto, incluso en aquellos donde haya alguna prohibición de generalizar respecto a alguna variable, por lo con la segunda deducción nunca tendremos que preocuparnos por si se generaliza o no en la demostración del teorema lógico, mientras que en la primera sí podríamos tener problemas si en la deducción de la regla de inferencia hubieran generalizaciones.

Lo mismo es aplicable si la deducción tuviera dos premisas, es decir, si son  $\phi, \psi, \chi$  fórmulas para las cuales se cumple que

$$(+) \quad \vdash (\phi \wedge \chi) \rightarrow \psi,$$

entonces podemos utilizar  $(+)$  en una deducción como si fuera la regla de inferencia derivada

$$(++) \quad \phi, \chi \vdash \psi,$$

pues si tenemos una deducción de la forma

$$\begin{array}{lll} \dots & \text{Líneas anteriores} & \\ (k) & \phi & \text{Premisa o deducción de líneas anteriores} \\ (k+1) & \chi & \text{Premisa o deducción de líneas anteriores} \\ (k+2) & \psi & (++) k, k+1 \\ \dots & & \end{array}$$

podemos sustituir la línea  $k+2$  del siguiente modo

$$\begin{array}{lll} \dots & \text{Líneas anteriores} & \\ (k) & \phi & \text{Premisa o deducción de líneas anteriores} \\ (k+1) & \chi & \text{Premisa o deducción de líneas anteriores} \\ (k+2) & (\phi \wedge \chi) \rightarrow \psi & \text{Tma. lógico } (+) \\ (k+3) & \phi \wedge \chi & \text{IC } k, k+1 \\ (k+4) & \psi & \text{MP } k+2, k+3 \\ \dots & & \end{array}$$

La ventaja es la misma que se ha mencionado en el caso anterior pues en la deducción de la regla (IC) no se generaliza.

Veamos entonces que usando el teorema de deducción podemos expresar todas las reglas de inferencia presentadas (salvo las reglas (GC), (GB), (PC), (PB) donde la generalización respecto a la variable  $x$  es inevitable; y la regla (IC), pero esto no supone un problema pues, como hemos dicho, en la deducción de esta regla no se generaliza) como teoremas lógicos:

$$\begin{array}{ll} \text{(R)} \quad \vdash \alpha \rightarrow \alpha & \text{(MB)} \quad \vdash ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma) \\ \text{(DN)} \quad \vdash \alpha \rightarrow \neg\neg\alpha & \text{(DN)} \quad \vdash \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha \\ \text{(NI)} \quad \vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) & \text{(NI)} \quad \vdash (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \\ \text{(NI)} \quad \vdash (\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \neg\alpha) & \text{(NI)} \quad \vdash (\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \alpha) \\ \text{(NI}_1\text{)} \quad \vdash \neg(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \wedge \neg\beta) & \text{(NI}_1\text{)} \quad \vdash (\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \beta) \\ \text{(MT)} \quad \vdash ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha & \text{(MT)} \quad \vdash ((\alpha \rightarrow \neg\beta) \wedge \beta) \rightarrow \neg\alpha \\ \text{(C)} \quad \vdash (\alpha \wedge \neg\alpha) \rightarrow \beta & \text{(C)} \quad \vdash (\alpha \leftrightarrow \neg\alpha) \rightarrow \beta \\ \text{(EDI)} \quad \vdash (\alpha \vee \beta) \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta) & \text{(EDI)} \quad \vdash (\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \vee \beta) \end{array}$$

|                                                                                                                                        |                                                                                                                                        |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| (MTP) $\vdash ((\alpha \vee \beta) \wedge \neg\alpha) \rightarrow \beta$                                                               | (MTP) $\vdash ((\alpha \vee \beta) \wedge \neg\beta) \rightarrow \alpha$                                                               |
| (TND) $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$                                                                                                  | (TND) $\vdash \neg\alpha \vee \alpha$                                                                                                  |
| (ID) $\vdash \alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$                                                                                   | (ID) $\vdash \alpha \rightarrow (\beta \vee \alpha)$                                                                                   |
| (ED) $\vdash (\alpha \vee \alpha) \rightarrow \alpha$                                                                                  | Dil $\vdash ((\alpha \rightarrow \gamma) \wedge (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow$<br>$(\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma)$   |
| (DM) $\vdash (\alpha \wedge \beta) \rightarrow \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$                                                        | (DM) $\vdash \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \rightarrow (\alpha \wedge \beta)$                                                        |
| (DM) $\vdash (\alpha \vee \beta) \rightarrow \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$                                                        | (DM) $\vdash \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow (\alpha \vee \beta)$                                                        |
| (DM) $\vdash \neg(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta)$                                                        | (DM) $\vdash (\neg\alpha \vee \neg\beta) \rightarrow \neg(\alpha \wedge \beta)$                                                        |
| (DM) $\vdash \neg(\alpha \vee \beta) \rightarrow (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$                                                        | (DM) $\vdash (\neg\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg(\alpha \vee \beta)$                                                        |
| (NC) $\vdash \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$                                                                                           |                                                                                                                                        |
| (EC) $\vdash (\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$                                                                                 | (EC) $\vdash (\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta$                                                                                  |
| (IB) $\vdash ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)) \rightarrow$<br>$(\alpha \leftrightarrow \beta)$           | (IB) $\vdash ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)) \rightarrow$<br>$(\beta \leftrightarrow \alpha)$           |
| (EB) $\vdash (\alpha \leftrightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$                                                    | (EB) $\vdash (\alpha \leftrightarrow \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$                                                    |
| (MBB) $\vdash ((\alpha \leftrightarrow \beta) \wedge (\beta \leftrightarrow \gamma)) \rightarrow$<br>$(\alpha \leftrightarrow \gamma)$ | (MBB) $\vdash ((\alpha \leftrightarrow \beta) \wedge (\gamma \leftrightarrow \beta)) \rightarrow$<br>$(\alpha \leftrightarrow \gamma)$ |
| (SE) $\vdash ((\alpha \leftrightarrow \beta) \wedge \alpha) \rightarrow \beta$                                                         | (SE) $\vdash ((\alpha \leftrightarrow \beta) \wedge \beta) \rightarrow \alpha$                                                         |
| (EG) $\vdash \wedge x\alpha \rightarrow S_x^t\alpha$                                                                                   | (EG) $\vdash \wedge x\alpha \rightarrow \alpha$                                                                                        |
| (NG) $\vdash \neg(\wedge x\neg\alpha) \rightarrow \vee x\alpha$                                                                        | (NG) $\vdash \vee x\alpha \rightarrow \neg(\wedge x\neg\alpha)$                                                                        |
| (NG) $\vdash \neg(\wedge x\alpha) \rightarrow \vee x\neg\alpha$                                                                        | (NG) $\vdash \vee x\neg\alpha \rightarrow \neg(\wedge x\alpha)$                                                                        |
| (NP) $\vdash \neg(\vee x\alpha) \rightarrow \wedge x\neg\alpha$                                                                        | (NP) $\vdash \wedge x\neg\alpha \rightarrow \neg(\vee x\alpha)$                                                                        |
| (NP) $\vdash \neg(\vee x\neg\alpha) \rightarrow \wedge x\alpha$                                                                        | (NP) $\vdash \wedge x\alpha \rightarrow \neg(\vee x\neg\alpha)$                                                                        |
| (IP) $\vdash S_x^t\alpha \rightarrow \vee x\alpha$                                                                                     |                                                                                                                                        |
| (II) $\vdash S_x^t\alpha \rightarrow \wedge x(x = t \rightarrow \alpha)$ <sup>5</sup>                                                  | (EI) $\vdash \wedge x(x = t \rightarrow \alpha) \rightarrow S_x^t\alpha$ <sup>6</sup>                                                  |
| (I) $\vdash t = t$                                                                                                                     | (SI) $\vdash t_1 = t_2 \rightarrow t_2 = t_1$                                                                                          |
| (TI) $\vdash (t_1 = t_2 \wedge t_2 = t_3) \rightarrow$<br>$t_1 = t_3$                                                                  |                                                                                                                                        |
| (ETI) $\vdash (t_1 = t_2 \wedge S_x^{t_2}\alpha) \rightarrow S_x^{t_1}\alpha$                                                          | (ETI) $\vdash t_1 = t_2 \rightarrow S_x^{t_1}t = S_x^{t_2}t$                                                                           |
| (DP) $\vdash \vee x\alpha \rightarrow S_x^{x \alpha}\alpha$                                                                            | (DI) $\vdash \neg(\vee x\alpha) \rightarrow x \alpha = y (y = y)$                                                                      |

En efecto, salvo en dos de las reglas de (NG), en dos de las reglas de (NP), en (SI) y en (ETI) no se generaliza en la deducción de ninguna regla con lo que, salvo en estas excepciones, tenemos:

- Si la regla tiene únicamente una premisa una simple aplicación del teorema de deducción nos da la regla expresada como teorema lógico.
- Si la regla tiene dos premisas será de la forma

$$(*) \quad \phi, \chi \vdash \psi$$

y, como no se generaliza en dicha deducción y tampoco en la deducción de la regla (EC), tenemos:

<sup>5</sup> Si  $x$  no está libre en  $t$ .

<sup>6</sup> Si  $x$  no está libre en  $t$ .

|     |                                     |                |
|-----|-------------------------------------|----------------|
| (1) | $\phi \wedge \chi$                  | Hipótesis      |
| (2) | $\phi$                              | EC 1           |
| (3) | $\chi$                              | EC 1           |
| (4) | $\psi$                              | (*) 2, 3       |
| (5) | $\phi \wedge \chi \rightarrow \psi$ | Tma. deducción |

Por otra parte, para las reglas donde si se generaliza tenemos:

- En la dos reglas de (NG) y en las dos de (NP) donde se generaliza se hace respecto a variables que no están libres en las premisas, luego podemos igualmente aplicar el teorema de deducción como en los casos anteriores.
- En (SI) la generalización se da al usar el teorema lógico (I), pero como sabemos que los teoremas lógicos podemos utilizarlos en cualquier contexto, podemos igualmente aplicar el teorema de deducción como en los casos anteriores.
- En (ETI) las únicas generalizaciones se dan dentro de teoremas lógicos o en el uso de la regla (SI), pero como ya hemos visto que (SI) podemos transformarla en un teorema lógico, podemos igualmente aplicar el teorema de deducción como en los casos anteriores.

En definitiva, todo lo dicho prueba que todas las reglas de inferencia presentadas (salvo (GC), (GB), (PC) y (PB)) pueden utilizarse en cualquier contexto incluso aunque no sea lícito generalizar respecto de alguna variable.

**Nota 3:** ... no pongamos paréntesis ...

Veamos que, en efecto, cualquier colocación de paréntesis en una fórmula de la forma  $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$  (o  $\alpha_1 \vee \cdots \vee \alpha_n$ ) proporciona fórmulas equivalentes. Lo veremos únicamente para la conjunción pues ambas pruebas son análogas.

Si definimos la **forma estándar** de una conjunción de  $n$  fórmulas  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  como<sup>7</sup>

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \cdots \wedge \alpha_{n-1} \wedge \alpha_n, \quad (2.15)$$

es claro que, por la simetría y transitividad del bicondicional, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- Todas las formas de agrupar las fórmulas  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  utilizando únicamente la conjunción son equivalentes.
- Cualquier agrupación de las fórmulas  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  utilizando únicamente la conjunción es equivalente a (2.15).

Para obtener lo deseado basta entonces con demostrar esto último por inducción en el número de fórmulas involucradas en la conjunción. Con más detalle, si  $\mathcal{L}$  es un lenguaje formal definimos la propiedad:

<sup>7</sup> Para denotar las conjunciones utilizaremos la notación que se dio en la Definición 1.5 donde los operadores preceden a los operandos y, por tanto, no es necesario el uso de paréntesis. Esta notación se conoce como “notación polaca” pues fue inventada por el lógico polaco Jan Łukasiewicz.

$P(n) \equiv$  Dadas cualesquiera  $n$  fórmulas de  $\mathcal{L}$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , y cualquier agrupación  $\chi$  de éstas utilizando únicamente la conjunción se cumple que  $\chi$  es equivalente a (2.15).

Esta propiedad está bien definida pues ya sabemos que podemos enumerar las  $n$ -tuplas de fórmulas (ver Nota 2 pág. 36, pág. 37 y Nota 1 pág. 37) y, fijada una de estas  $n$ -tuplas, solo hay una cantidad finita de formas de agruparlas utilizando únicamente la conjunción<sup>8</sup>. Por tanto, tiene sentido probar su veracidad por inducción (metamatemática).

Supongamos pues que para cada  $k < n$  se cumple  $P(k)$ , es decir, que dada cualquier  $k$ -tupla de fórmulas y cualquier agrupación  $\chi$  de éstas utilizando únicamente la conjunción se cumple que  $\chi$  es equivalente a su forma estándar, y veamos que entonces esto también se cumple para cualquier  $n$ -tupla de fórmulas.

Fijemos pues  $n$  fórmulas  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  y sea  $\chi$  una agrupación de éstas utilizando únicamente la conjunción. Tenemos entonces que  $\chi \equiv \wedge \phi \psi$  para ciertas fórmulas  $\phi$  y  $\psi$  que serán a su vez agrupaciones de las fórmulas  $\alpha_1, \dots, \alpha_i$  y  $\alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n$  (respectivamente y para cierto  $1 \leq i < n$ ) utilizando únicamente la conjunción. Tenemos entonces dos opciones:

- Si  $i = 1$ , entonces  $\phi \equiv \alpha_1$  y, por hipótesis de inducción, tenemos que

$$\vdash \psi \leftrightarrow \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \dots \wedge \alpha_{n-1} \alpha_n.$$

Como por el Teorema 2.7 (y la regla (IB)) es claro que  $\vdash \phi \leftrightarrow \alpha_1$ , utilizando el Teorema 2.11 4) obtenemos que

$$\vdash \wedge \phi \psi \leftrightarrow \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \dots \wedge \alpha_{n-1} \alpha_n,$$

es decir, que  $\chi \equiv \wedge \phi \psi$  es equivalente a la forma estándar.

- Si  $i > 1$ , entonces por hipótesis de inducción se tiene que

$$\vdash \phi \leftrightarrow \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_{i-1} \alpha_i,$$

luego por el Teorema 2.11 4) (usando el Teorema 2.7 para obtener que  $\vdash \psi \leftrightarrow \psi$ ) obtenemos que

$$\vdash \wedge \phi \psi \leftrightarrow \wedge \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_{i-1} \alpha_i \psi. \quad (2.16)$$

Por el Teorema 2.10 2) también tenemos que

$$\vdash \wedge \wedge \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_{i-1} \alpha_i \psi \leftrightarrow \wedge \alpha_1 \wedge \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_{i-1} \alpha_i \psi, \quad (2.17)$$

luego usando (MBB) con (2.16) y (2.17) obtenemos que

$$\vdash \wedge \phi \psi \leftrightarrow \wedge \alpha_1 \wedge \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_{i-1} \alpha_i \psi. \quad (2.18)$$

Por otro lado, utilizando de nuevo la hipótesis de inducción se tiene que

$$\vdash \wedge \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_{i-1} \alpha_i \psi \leftrightarrow \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \dots \wedge \alpha_{n-1} \alpha_n,$$

---

<sup>8</sup> El número distinto de formas de realizar estas agrupaciones es  $C_{n-1}$ , el  $(n-1)$ -ésimo número de Catalan, aunque aquí lo único que importa es que dicha cantidad sea finita.

con lo que usando una última vez el Teorema 2.11 4) (junto al Teorema 2.7 que nos garantiza que  $\vdash \alpha_1 \leftrightarrow \alpha_1$ ) obtenemos que

$$\vdash \wedge \alpha_1 \wedge \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_{i-1} \alpha_i \psi \leftrightarrow \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \cdots \wedge \alpha_{n-1} \alpha_n. \quad (2.19)$$

Finalmente, usando (MBB) con (2.18) y (2.19) concluimos que

$$\vdash \wedge \phi \psi \leftrightarrow \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \cdots \wedge \alpha_{n-1} \alpha_n,$$

es decir, que  $\chi$  es equivalente a la forma estándar.

En cualquier caso se tiene que  $\chi$  es equivalente a la forma estándar y esto finaliza la inducción.

## Página 73

**Nota 1:** ... como ejercicio al lector ...

Comencemos demostrando la **primera fórmula en 1)**.

|      |                                                               |                |
|------|---------------------------------------------------------------|----------------|
| (1)  | $\alpha \wedge \beta$                                         | Hipótesis      |
| (2)  | $\beta$                                                       | EC 1           |
| (3)  | $\alpha$                                                      | EC 1           |
| (4)  | $\beta \wedge \alpha$                                         | IC 2, 3        |
| (5)  | $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\beta \wedge \alpha)$     | Tma. deducción |
| (6)  | $\beta \wedge \alpha$                                         | Hipótesis      |
| (7)  | $\alpha$                                                      | EC 6           |
| (8)  | $\beta$                                                       | EC 6           |
| (9)  | $\alpha \wedge \beta$                                         | IC 7, 8        |
| (10) | $(\beta \wedge \alpha) \rightarrow (\alpha \wedge \beta)$     | Tma. deducción |
| (11) | $(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\beta \wedge \alpha)$ | IB 5, 10       |

Veamos ahora la **segunda fórmula de 1)**.

|     |                                                                               |                       |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| (1) | $\alpha \vee \beta$                                                           | Hipótesis             |
| (2) | $\neg(\beta \vee \alpha)$                                                     | Hipótesis (Red. abs.) |
| (3) | $\neg\beta \wedge \neg\alpha$                                                 | DM 2                  |
| (4) | $(\neg\beta \wedge \neg\alpha) \leftrightarrow (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$ | Tma. lógico           |
| (5) | $\neg\alpha \wedge \neg\beta$                                                 | SE 3, 4               |
| (6) | $\neg(\alpha \vee \beta)$                                                     | DM 5 (contr. 1)       |
| (7) | $\beta \vee \alpha$                                                           | Red. absurdo          |
| (8) | $(\alpha \vee \beta) \rightarrow (\beta \vee \alpha)$                         | Tma. deducción        |

Intercambiando los papeles de  $\alpha$  y  $\beta$  en la demostración anterior obtenemos la implicación recíproca y por (IB) el resultado buscado.

Veamos ahora la **primera fórmula de 2)**.

En virtud de la regla (IB) basta demostrar cada implicación por separado:



|                                                                                                |                |                                                                                                |                |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| (1) $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$                                                      | Hipótesis      | (1) $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$                                                      | Hipótesis      |
| (2) $\alpha \wedge \beta$                                                                      | EC 1           | (2) $\alpha$                                                                                   | EC 1           |
| (3) $\alpha$                                                                                   | EC 2           | (3) $\beta \wedge \gamma$                                                                      | EC 1           |
| (4) $\beta$                                                                                    | EC 2           | (4) $\beta$                                                                                    | EC 3           |
| (5) $\gamma$                                                                                   | EC 1           | (5) $\gamma$                                                                                   | EC 3           |
| (6) $\beta \wedge \gamma$                                                                      | IC 4, 5        | (6) $\alpha \wedge \beta$                                                                      | IC 2, 4        |
| (7) $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$                                                      | IC 3, 6        | (7) $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$                                                      | IC 5, 6        |
| (8) $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \rightarrow$<br>$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$ | Tma. deducción | (8) $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \rightarrow$<br>$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$ | Tma. deducción |

Para la **segunda fórmula de 2)** tenemos que una implicación está demostrada en la página 73 con lo que veamos la otra:

|                                                                                        |                       |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| (1) $\alpha \vee (\beta \vee \gamma)$                                                  | Hipótesis             |
| (2) $\neg((\alpha \vee \beta) \vee \gamma)$                                            | Hipótesis (Red. abs.) |
| (3) $\neg(\alpha \vee \beta) \wedge \neg\gamma$                                        | DM 2                  |
| (4) $\neg(\alpha \vee \beta)$                                                          | EC 3                  |
| (5) $\neg\alpha \wedge \neg\beta$                                                      | DM 4                  |
| (6) $\neg\alpha$                                                                       | EC 5                  |
| (7) $\neg\beta$                                                                        | EC 5                  |
| (8) $\neg\gamma$                                                                       | EC 3                  |
| (9) $\neg\beta \wedge \neg\gamma$                                                      | IC 7, 8               |
| (10) $\neg(\beta \vee \gamma)$                                                         | DM 9                  |
| (11) $\neg\alpha \wedge \neg(\beta \vee \gamma)$                                       | IC 6, 10              |
| (12) $\neg(\alpha \vee (\beta \vee \gamma))$                                           | DM 11 (contr. 1)      |
| (13) $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma$                                                 | Red. absurdo          |
| (14) $(\alpha \vee (\beta \vee \gamma)) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \vee \gamma)$ | Tma. deducción        |

Demostremos ahora la **primera fórmula de 3)** para lo cual, nuevamente apoyándonos en (IB), probaremos cada implicación por separado:

|                                                 |                |                                                 |                |
|-------------------------------------------------|----------------|-------------------------------------------------|----------------|
| (1) $\alpha \wedge \alpha$                      | Hipótesis      | (1) $\alpha$                                    | Hipótesis      |
| (2) $\alpha$                                    | EC 1           | (2) $\alpha$                                    | R 1            |
| (3) $(\alpha \wedge \alpha) \rightarrow \alpha$ | Tma. deducción | (3) $\alpha \wedge \alpha$                      | IC 1, 2        |
|                                                 |                | (4) $\alpha \rightarrow (\alpha \wedge \alpha)$ | Tma. deducción |

Similarmente obtenemos la **segunda fórmula de 3)**:

|                                               |                |                                               |                |
|-----------------------------------------------|----------------|-----------------------------------------------|----------------|
| (1) $\alpha \vee \alpha$                      | Hipótesis      | (1) $\alpha$                                  | Hipótesis      |
| (2) $\alpha$                                  | ED 1           | (2) $\alpha \vee \alpha$                      | ID 1           |
| (3) $(\alpha \vee \alpha) \rightarrow \alpha$ | Tma. deducción | (3) $\alpha \rightarrow (\alpha \vee \alpha)$ | Tma. deducción |

Finalmente, demostraremos la **segunda fórmula de 4)** pues la primera está demostrada en la página 73.

|                                         |                       |
|-----------------------------------------|-----------------------|
| (1) $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$ | Hipótesis             |
| (2) $\neg(\alpha \vee \beta)$           | Hipótesis (Red. abs.) |

|      |                                                                                                         |                       |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| (3)  | $\neg\alpha \wedge \neg\beta$                                                                           | DM 2                  |
| (4)  | $\neg\alpha$                                                                                            | EC 3                  |
| (5)  | $\neg\beta$                                                                                             | EC 3                  |
| (6)  | $\neg\beta \vee \neg\gamma$                                                                             | ID 5                  |
| (7)  | $\neg(\beta \wedge \gamma)$                                                                             | DM 6                  |
| (8)  | $\alpha$                                                                                                | MTP 1, 7 (contr. 4)   |
| (9)  | $\alpha \vee \beta$                                                                                     | Red. absurdo          |
| (10) | $\neg(\alpha \vee \gamma)$                                                                              | Hipótesis (Red. abs.) |
| (11) | $\neg\alpha \wedge \neg\gamma$                                                                          | DM 10                 |
| (12) | $\neg\alpha$                                                                                            | EC 11                 |
| (13) | $\neg\gamma$                                                                                            | EC 11                 |
| (14) | $\neg\beta \vee \neg\gamma$                                                                             | ID 13                 |
| (15) | $\neg(\beta \wedge \gamma)$                                                                             | DM 14                 |
| (16) | $\alpha$                                                                                                | MTP 1, 15 (contr. 12) |
| (17) | $\alpha \vee \gamma$                                                                                    | Red. absurdo          |
| (18) | $(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$                                                       | IC 9, 17              |
| (19) | $(\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma))$     | Tma. deducción        |
| (20) | $(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$                                                       | Hipótesis             |
| (21) | $\neg\alpha$                                                                                            | Hipótesis             |
| (22) | $\alpha \vee \beta$                                                                                     | EC 20                 |
| (23) | $\beta$                                                                                                 | MTP 21, 22            |
| (24) | $\alpha \vee \gamma$                                                                                    | EC 20                 |
| (25) | $\gamma$                                                                                                | MTP 21, 24            |
| (26) | $\beta \wedge \gamma$                                                                                   | IC 23, 25             |
| (27) | $\neg\alpha \rightarrow (\beta \wedge \gamma)$                                                          | Tma. deducción        |
| (28) | $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$                                                                     | EDI 27                |
| (29) | $((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)) \rightarrow (\alpha \vee (\beta \wedge \gamma))$     | Tma. deducción        |
| (30) | $(\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma))$ | IB 19, 29             |

Esto finaliza la demostración.



**Nota 2:** MTP 3, 4 (omitiendo DN)

Es decir, la línea anterior debería haber sido

$$(4') \quad \neg\neg\alpha \quad \text{DN 4}$$

para entonces aplicar (MTP) a las líneas 3 y 4'.

**Nota 3:** Hipótesis

Por reducción al absurdo.

## Página 74

**Nota 1:** ... en virtud del teorema siguiente ...

Un primer ejemplo de aplicación de este teorema podemos verlo en la definición de  $\bigvee^1 x\alpha$ . En dicha definición (o en la equivalencia dada en el Teorema 2.9 3)) aparece una subexpresión de la forma

$$y_1 = x_1 \wedge y_2 = x_2 \wedge \cdots \wedge y_n = x_n \quad (2.20)$$

y ya hemos dicho al final de la **Nota 8 pág. 26** que, de momento, debíamos entenderla como una forma de abreviar la fórmula

$$y_1 = x_1 \wedge (y_2 = x_2 \wedge (\cdots (y_{n-2} = x_{n-2} \wedge (y_{n-1} = x_{n-1} \wedge y_n = x_n) \cdots)).$$

Sin embargo, por la **Nota 3 pág. 72** y el Teorema 2.11 podemos ahora justificar que dadas dos colocaciones cualesquiera de paréntesis en (2.20), digamos  $\beta_1$  y  $\beta_2$ , se tiene que

$$\vdash \bigvee y_1 \cdots y_n \bigwedge x_1 \cdots x_n (\alpha \leftrightarrow \beta_1) \leftrightarrow \bigvee y_1 \cdots y_n \bigwedge x_1 \cdots x_n (\alpha \leftrightarrow \beta_2). \quad (2.21)$$

En efecto, por la **Nota 3 pág. 72** tenemos que

$$\vdash \beta_1 \leftrightarrow \beta_2 \quad (2.22)$$

y así obtenemos:

|          |                                                                                                                                                                                          |                         |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
| (1)      | $\alpha \leftrightarrow \alpha$                                                                                                                                                          | Tma. lógico             |
| (2)      | $\beta_1 \leftrightarrow \beta_2$                                                                                                                                                        | Tma. lógico (2.22)      |
| (3)      | $(\alpha \leftrightarrow \alpha) \wedge (\beta_1 \leftrightarrow \beta_2)$                                                                                                               | IC 1, 2                 |
| (4)      | $(\alpha \leftrightarrow \beta_1) \leftrightarrow (\alpha \leftrightarrow \beta_2)$                                                                                                      | MP 3, Tma. 2.11 5)      |
| (5)      | $\bigwedge x_n ((\alpha \leftrightarrow \beta_1) \leftrightarrow (\alpha \leftrightarrow \beta_2))$                                                                                      | IG 4                    |
| (6)      | $\bigwedge x_n (\alpha \leftrightarrow \beta_1) \leftrightarrow \bigwedge x_n (\alpha \leftrightarrow \beta_2)$                                                                          | MP 5, Tma. 2.11 6)      |
| (7)      | $\bigwedge x_{n-1} (\bigwedge x_n (\alpha \leftrightarrow \beta_1) \leftrightarrow \bigwedge x_n (\alpha \leftrightarrow \beta_2))$                                                      | IG 6                    |
| (8)      | $\bigwedge x_{n-1} x_n (\alpha \leftrightarrow \beta_1) \leftrightarrow \bigwedge x_{n-1} x_n (\alpha \leftrightarrow \beta_2)$                                                          | MP 7, Tma. 2.11 6)      |
| ...      |                                                                                                                                                                                          |                         |
| (2n + 4) | $\bigwedge x_1 \cdots x_n (\alpha \leftrightarrow \beta_1) \leftrightarrow \bigwedge x_1 \cdots x_n (\alpha \leftrightarrow \beta_2)$                                                    | MP 2n + 3, Tma. 2.11 6) |
| (2n + 5) | $\bigwedge y_n (\bigwedge x_1 \cdots x_n (\alpha \leftrightarrow \beta_1) \leftrightarrow \bigwedge x_1 \cdots x_n (\alpha \leftrightarrow \beta_2))$                                    | IG 2n + 4               |
| (2n + 6) | $\bigvee y_n \bigwedge x_1 \cdots x_n (\alpha \leftrightarrow \beta_1) \leftrightarrow$<br>$\bigvee y_n \bigwedge x_1 \cdots x_n (\alpha \leftrightarrow \beta_2)$                       | MP 2n + 5, Tma. 2.11 7) |
| ...      |                                                                                                                                                                                          |                         |
| (4n + 4) | $\bigvee y_1 \cdots y_n \bigwedge x_1 \cdots x_n (\alpha \leftrightarrow \beta_1) \leftrightarrow$<br>$\bigvee y_1 \cdots y_n \bigwedge x_1 \cdots x_n (\alpha \leftrightarrow \beta_2)$ | MP 4n + 3, Tma. 2.11 7) |

**Nota 2:** ... Veamos, por ejemplo, 6) ...

Demostremos el resto.

Comencemos **demostrando 1)** y, como siempre, en virtud de la regla (IB) bastará de-

mostrar cada implicación por separado:

|                                                                                                  |                |                                                                                                  |                |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| (1) $\alpha \leftrightarrow \alpha'$                                                             | Hipótesis      | (1) $\neg\alpha \leftrightarrow \neg\alpha'$                                                     | Hipótesis      |
| (2) $\alpha \rightarrow \alpha'$                                                                 | EB 1           | (2) $\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha'$                                                         | EB 1           |
| (3) $\neg\alpha' \rightarrow \neg\alpha$                                                         | NI 2           | (3) $\alpha' \rightarrow \alpha$                                                                 | NI 2           |
| (4) $\alpha' \rightarrow \alpha$                                                                 | EB 1           | (4) $\neg\alpha' \rightarrow \neg\alpha$                                                         | EB 1           |
| (5) $\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha'$                                                         | NI 4           | (5) $\alpha \rightarrow \alpha'$                                                                 | NI 4           |
| (6) $\neg\alpha \leftrightarrow \neg\alpha'$                                                     | IB 3, 5        | (6) $\alpha \leftrightarrow \alpha'$                                                             | IB 3, 5        |
| (7) $(\alpha \leftrightarrow \alpha') \rightarrow$<br>$(\neg\alpha \leftrightarrow \neg\alpha')$ | Tma. deducción | (7) $(\neg\alpha \leftrightarrow \neg\alpha') \rightarrow$<br>$(\alpha \leftrightarrow \alpha')$ | Tma. deducción |

Para **demostrar el resto**, veamos en primer lugar que

$$\vdash ((\alpha \leftrightarrow \alpha') \wedge (\beta \leftrightarrow \beta')) \rightarrow ((\alpha' \leftrightarrow \alpha) \wedge (\beta' \leftrightarrow \beta)). \quad (2.23)$$

En efecto, tenemos que

|                                                                                                                                                                       |                |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| (1) $(\alpha \leftrightarrow \alpha') \wedge (\beta \leftrightarrow \beta')$                                                                                          | Hipótesis      |
| (2) $\alpha \leftrightarrow \alpha'$                                                                                                                                  | EC 1           |
| (3) $\alpha \rightarrow \alpha'$                                                                                                                                      | EB 2           |
| (4) $\alpha' \rightarrow \alpha$                                                                                                                                      | EB 2           |
| (5) $\alpha' \leftrightarrow \alpha$                                                                                                                                  | IB 3, 4        |
| (6) $\beta \leftrightarrow \beta'$                                                                                                                                    | EC 1           |
| (7) $\beta \rightarrow \beta'$                                                                                                                                        | EB 6           |
| (8) $\beta' \rightarrow \beta$                                                                                                                                        | EB 6           |
| (9) $\beta' \leftrightarrow \beta$                                                                                                                                    | IB 7, 8        |
| (10) $(\alpha' \leftrightarrow \alpha) \wedge (\beta' \leftrightarrow \beta)$                                                                                         | IC 5, 9        |
| (11) $(\alpha \leftrightarrow \alpha') \wedge (\beta \leftrightarrow \beta') \rightarrow$<br>$(\alpha' \leftrightarrow \alpha) \wedge (\beta' \leftrightarrow \beta)$ | Tma. deducción |

Observemos entonces que para demostrar 2), 3), 4) y 5) basta con demostrar en cada caso

$$\vdash ((\phi \leftrightarrow \phi') \wedge (\psi \leftrightarrow \psi')) \rightarrow ((\phi \triangle \psi) \rightarrow (\phi' \triangle \psi')) \quad (2.24)$$

donde  $\triangle$  será  $\rightarrow, \vee, \wedge$  y  $\leftrightarrow$  respectivamente.

En efecto, tomando  $\phi \equiv \alpha$ ,  $\phi' \equiv \alpha'$ ,  $\psi \equiv \beta$  y  $\psi' \equiv \beta'$  en (2.24) obtenemos

$$\vdash ((\alpha \leftrightarrow \alpha') \wedge (\beta \leftrightarrow \beta')) \rightarrow ((\alpha \triangle \beta) \rightarrow (\alpha' \triangle \beta')), \quad (2.25)$$

mientras que si tomamos  $\phi \equiv \alpha'$ ,  $\phi' \equiv \alpha$ ,  $\psi \equiv \beta'$  y  $\psi' \equiv \beta$  se obtiene que

$$\vdash ((\alpha' \leftrightarrow \alpha) \wedge (\beta' \leftrightarrow \beta)) \rightarrow ((\alpha' \triangle \beta') \rightarrow (\alpha \triangle \beta)),$$

luego usando (2.23) (y la regla (MB)) concluimos que

$$\vdash ((\alpha \leftrightarrow \alpha') \wedge (\beta \leftrightarrow \beta')) \rightarrow ((\alpha' \triangle \beta') \rightarrow (\alpha \triangle \beta)). \quad (2.26)$$

Finalmente se tiene

|     |                                                                                                                                                              |                    |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|
| (1) | $(\alpha \leftrightarrow \alpha') \wedge (\beta \leftrightarrow \beta')$                                                                                     | Hipótesis          |
| (2) | $((\alpha \leftrightarrow \alpha') \wedge (\beta \leftrightarrow \beta')) \rightarrow ((\alpha \triangle \beta) \rightarrow (\alpha' \triangle \beta'))$     | Tma. lógico (2.25) |
| (3) | $(\alpha \triangle \beta) \rightarrow (\alpha' \triangle \beta')$                                                                                            | MP 1, 2            |
| (4) | $((\alpha \leftrightarrow \alpha') \wedge (\beta \leftrightarrow \beta')) \rightarrow ((\alpha' \triangle \beta') \rightarrow (\alpha \triangle \beta))$     | Tma. lógico (2.26) |
| (5) | $(\alpha' \triangle \beta') \rightarrow (\alpha \triangle \beta)$                                                                                            | MP 1, 4            |
| (6) | $(\alpha \triangle \beta) \leftrightarrow (\alpha' \triangle \beta')$                                                                                        | IB 3, 5            |
| (7) | $((\alpha \leftrightarrow \alpha') \wedge (\beta \leftrightarrow \beta')) \rightarrow ((\alpha \triangle \beta) \leftrightarrow (\alpha' \triangle \beta'))$ | Tma. deducción     |

lo que prueba lo deseado.

**Demostremos ahora 2)** teniendo en cuenta lo dicho, es decir, basta con demostrar:

|     |                                                                                                                                              |                |
|-----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| (1) | $(\phi \leftrightarrow \phi') \wedge (\psi \leftrightarrow \psi')$                                                                           | Hipótesis      |
| (2) | $\phi \rightarrow \psi$                                                                                                                      | Hipótesis      |
| (3) | $\phi' \rightarrow \phi$                                                                                                                     | EB (EC 1)      |
| (4) | $\phi' \rightarrow \psi$                                                                                                                     | MB 2, 3        |
| (5) | $\psi \rightarrow \psi'$                                                                                                                     | EB (EC 1)      |
| (6) | $\phi' \rightarrow \psi'$                                                                                                                    | MB 4, 5        |
| (7) | $(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi' \rightarrow \psi')$                                                                              | Tma. deducción |
| (8) | $(\phi \leftrightarrow \phi') \wedge (\psi \leftrightarrow \psi') \rightarrow (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi' \rightarrow \psi')$ | Tma. deducción |

Para **demostrar 3)** hacemos lo mismo:

|      |                                                                                                                                |                    |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|
| (1)  | $(\phi \leftrightarrow \phi') \wedge (\psi \leftrightarrow \psi')$                                                             | Hipótesis          |
| (2)  | $\phi \vee \psi$                                                                                                               | Hipótesis          |
| (3)  | $\neg \phi \rightarrow \psi$                                                                                                   | EDI 2              |
| (4)  | $\psi \rightarrow \psi'$                                                                                                       | EB (EC 1)          |
| (5)  | $\neg \phi \rightarrow \psi'$                                                                                                  | MB 3, 4            |
| (6)  | $\phi \leftrightarrow \phi'$                                                                                                   | EC 1               |
| (7)  | $\neg \phi \leftrightarrow \neg \phi'$                                                                                         | SE 6, Tma. 2.11 1) |
| (8)  | $\neg \phi' \rightarrow \neg \phi$                                                                                             | EB 7               |
| (9)  | $\neg \phi' \rightarrow \psi'$                                                                                                 | MB 5, 8            |
| (10) | $\phi' \vee \psi'$                                                                                                             | EDI 9              |
| (11) | $(\phi \vee \psi) \rightarrow (\phi' \vee \psi')$                                                                              | Tma. deducción     |
| (12) | $(\phi \leftrightarrow \phi') \wedge (\psi \leftrightarrow \psi') \rightarrow (\phi \vee \psi) \rightarrow (\phi' \vee \psi')$ | Tma. deducción     |

Análogamente para **demostrar 4)**:

|     |                                                                                        |                    |
|-----|----------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|
| (1) | $(\phi \leftrightarrow \phi') \wedge (\psi \leftrightarrow \psi')$                     | Hipótesis          |
| (2) | $\phi \leftrightarrow \phi'$                                                           | EC 1               |
| (3) | $\neg \phi \leftrightarrow \neg \phi'$                                                 | SE 2, Tma. 2.11 1) |
| (4) | $\psi \leftrightarrow \psi'$                                                           | EC 1               |
| (5) | $\neg \psi \leftrightarrow \neg \psi'$                                                 | SE 3, Tma. 2.11 1) |
| (6) | $(\neg \phi \leftrightarrow \neg \phi') \wedge (\neg \psi \leftrightarrow \neg \psi')$ | IC 3, 5            |
| (7) | $(\neg \phi \vee \neg \psi) \leftrightarrow (\neg \phi' \vee \neg \psi')$              | MP 6, Tma. 2.11 3) |
| (8) | $\neg(\neg \phi \vee \neg \psi) \leftrightarrow \neg(\neg \phi' \vee \neg \psi')$      | SE 7, Tma. 2.11 1) |

|      |                                                                                                                                         |                |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| (9)  | $\phi \wedge \psi$                                                                                                                      | Hipótesis      |
| (10) | $\neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$                                                                                                          | DM 9           |
| (11) | $\neg(\neg\phi' \vee \neg\psi')$                                                                                                        | SE 8, 10       |
| (12) | $\phi' \wedge \psi'$                                                                                                                    | DM 11          |
| (13) | $(\phi \wedge \psi) \rightarrow (\phi' \wedge \psi')$                                                                                   | Tma. deducción |
| (14) | $(\phi \leftrightarrow \phi') \wedge (\psi \leftrightarrow \psi') \rightarrow$<br>$(\phi \wedge \psi) \rightarrow (\phi' \wedge \psi')$ | Tma. deducción |

Y también para **demostrar 5)**:

|      |                                                                                                                                                           |                    |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|
| (1)  | $(\phi \leftrightarrow \phi') \wedge (\psi \leftrightarrow \psi')$                                                                                        | Hipótesis          |
| (2)  | $(\phi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\phi' \rightarrow \psi')$                                                                                       | MP 1, Tma. 2.11 2) |
| (3)  | $(\psi \leftrightarrow \psi') \wedge (\phi \leftrightarrow \phi')$                                                                                        | SE 1, Tma. 2.10 1) |
| (4)  | $(\psi \rightarrow \phi) \leftrightarrow (\psi' \rightarrow \phi')$                                                                                       | MP 3, Tma. 2.11 2) |
| (5)  | $\phi \leftrightarrow \psi$                                                                                                                               | Hipótesis          |
| (6)  | $\phi \rightarrow \psi$                                                                                                                                   | EB 5               |
| (7)  | $\phi' \rightarrow \psi'$                                                                                                                                 | SE 2, 6            |
| (8)  | $\psi \rightarrow \phi$                                                                                                                                   | EB 5               |
| (9)  | $\psi' \rightarrow \phi'$                                                                                                                                 | SE 4, 8            |
| (10) | $\phi' \leftrightarrow \psi'$                                                                                                                             | IB 7, 9            |
| (11) | $(\phi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\phi' \leftrightarrow \psi')$                                                                                   | Tma. deducción     |
| (12) | $(\phi \leftrightarrow \phi') \wedge (\psi \leftrightarrow \psi') \rightarrow$<br>$(\phi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\phi' \leftrightarrow \psi')$ | Tma. deducción     |

Pasemos ahora a **demostrar 7)**:

|     |                                                                                                       |                           |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| (1) | $\wedge x(\alpha \leftrightarrow \beta)$                                                              | Hipótesis                 |
| (2) | $\alpha \leftrightarrow \beta$                                                                        | EG 1                      |
| (3) | $\neg\alpha \leftrightarrow \neg\beta$                                                                | SE 2, Tma. 2.11 1)        |
| (4) | $\wedge x(\neg\alpha \leftrightarrow \neg\beta)$                                                      | IG 3 ( $x$ no libre en 1) |
| (5) | $\wedge x\neg\alpha \leftrightarrow \wedge x\neg\beta$                                                | MP 4, Tma. 2.11 6)        |
| (6) | $\neg(\wedge x\neg\alpha) \leftrightarrow \neg(\wedge x\neg\beta)$                                    | SE 5, Tma. 2.11 1)        |
| (7) | $\forall x\alpha \leftrightarrow \forall x\beta$                                                      | R 6                       |
| (8) | $\wedge x(\alpha \leftrightarrow \beta) \rightarrow (\forall x\alpha \leftrightarrow \forall x\beta)$ | Tma. deducción            |

Finalmente **demostraremos 8)**.

Para ello, en primer lugar observemos que

$$\vdash \wedge x(\phi \leftrightarrow \psi) \rightarrow \wedge x(\psi \leftrightarrow \phi). \quad (2.27)$$

En efecto:

|     |                                                                                       |                           |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| (1) | $\wedge x(\phi \leftrightarrow \psi)$                                                 | Hipótesis                 |
| (2) | $\phi \leftrightarrow \psi$                                                           | EG 1                      |
| (3) | $\phi \rightarrow \psi$                                                               | EB 2                      |
| (4) | $\psi \rightarrow \phi$                                                               | EB 2                      |
| (5) | $\psi \leftrightarrow \phi$                                                           | IB 3, 4                   |
| (6) | $\wedge x(\psi \leftrightarrow \phi)$                                                 | IG 3 ( $x$ no libre en 1) |
| (7) | $\wedge x(\phi \leftrightarrow \psi) \rightarrow \wedge x(\psi \leftrightarrow \phi)$ | Tma. deducción            |

Con esto, tenemos que para demostrar 8) bastará ver que

$$\vdash \bigwedge x(\phi \leftrightarrow \psi) \rightarrow \left( \bigvee^1 x\phi \rightarrow \bigvee^1 x\psi \right). \quad (2.28)$$

En efecto, tomando  $\phi \equiv \alpha$  y  $\psi \equiv \beta$  en (2.28) obtenemos que

$$\vdash \bigwedge x(\alpha \leftrightarrow \beta) \rightarrow \left( \bigvee^1 x\alpha \rightarrow \bigvee^1 x\beta \right), \quad (2.29)$$

mientras que si tomamos  $\phi \equiv \beta$  y  $\psi \equiv \alpha$  entonces se obtiene

$$\vdash \bigwedge x(\beta \leftrightarrow \alpha) \rightarrow \left( \bigvee^1 x\beta \rightarrow \bigvee^1 x\alpha \right),$$

luego usando (2.27) (y la regla (MB)) concluimos que

$$\vdash \bigwedge x(\alpha \leftrightarrow \beta) \rightarrow \left( \bigvee^1 x\beta \rightarrow \bigvee^1 x\alpha \right). \quad (2.30)$$

De (2.29) y (2.30) obtenemos lo deseado de forma análoga a lo que hicimos al comienzo de la demostración.

Finalmente, para (2.28) consideraremos  $y_1, y_2$  las variables de menor índice que no están en  $\bigvee x\phi$  y  $\bigvee x\psi$  respectivamente e  $y$  una variable distinta de  $x, y_1$  e  $y_2$  que no esté en  $\phi$  ni en  $\psi$ . Con esto obtenemos:

|      |                                                                                                                 |                                   |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|
| (1)  | $\bigwedge x(\phi \leftrightarrow \psi)$                                                                        | Hipótesis                         |
| (2)  | $\bigwedge x(\psi \leftrightarrow \phi)$                                                                        | MP 1, Tma. lógico (2.27)          |
| (3)  | $\psi \leftrightarrow \phi$                                                                                     | EG 2                              |
| (4)  | $\bigvee^1 x\phi$                                                                                               | Hipótesis                         |
| (5)  | $\bigvee y_1 \bigwedge x(\phi \leftrightarrow y_1 = x)$                                                         | R 4                               |
| (6)  | $S_{y_1}^y (\bigwedge x(\phi \leftrightarrow y_1 = x))$                                                         | EP 5 ( $y$ no en 1 ni en 5)       |
| (7)  | $\bigwedge x(\phi \leftrightarrow y = x)$                                                                       | R 6 ((1.36) y Tma. 1.13 2))       |
| (8)  | $\phi \leftrightarrow y = x$                                                                                    | EG 7                              |
| (9)  | $\psi \leftrightarrow y = x$                                                                                    | MBB 3, 8                          |
| (10) | $\bigwedge x(\psi \leftrightarrow y = x)$                                                                       | IG 9 ( $x$ no libre en 1, 4 ni 6) |
| (11) | $\bigvee y \bigwedge x(\psi \leftrightarrow y = x)$                                                             | IP 10 ( $y$ no libre)             |
| (12) | $\bigvee^1 x\psi$                                                                                               | SE 11, Tma. 2.9 3)                |
| (13) | $\bigvee^1 x\phi \rightarrow \bigvee^1 x\psi$                                                                   | Tma. deducción                    |
| (14) | $\bigwedge x(\phi \leftrightarrow \psi) \rightarrow \left( \bigvee^1 x\phi \rightarrow \bigvee^1 x\psi \right)$ | Tma. deducción                    |

que prueba justamente lo deseado y nos permite concluir la demostración. 

**Nota 3:** MP 2, 5 (omitendo EB)

Es decir, la línea anterior debería haber sido

$$(4') \quad \alpha \rightarrow \beta \quad \text{EB 2}$$

para entonces aplicar (MP) a las líneas 4 y 4'.

**Nota 4:** IG 5 (generalización legal)

En efecto, podemos generalizar respecto de  $x$  porque no está libre en (3).

**Nota 5:** Se prueba análogamente

En efecto, la línea 8 se sustituye por

|      |                                              |                |
|------|----------------------------------------------|----------------|
| (8)  | $\wedge x \beta$                             | Hipótesis      |
| (9)  | $\beta$                                      | EG 8           |
| (10) | $\beta \rightarrow \alpha$                   | EB 2           |
| (11) | $\alpha$                                     | MP 9, 10       |
| (12) | $\wedge x \alpha$                            | IG 11          |
| (13) | $\wedge x \beta \rightarrow \wedge x \alpha$ | Tma. deducción |

donde la generalización en la línea 12 es válida pues  $x$  no está libre en (8).

**Nota 6:** ... Hemos definido ...

Veamos otro ejemplo de como utilizar el Teorema 2.11 para ver que

$$\begin{aligned} & \bigvee y_1 \cdots y_n \bigwedge x_1 \cdots x_n (\alpha \leftrightarrow y_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge y_n = x_n) \leftrightarrow \\ & \bigvee y_1 \cdots y_n \bigwedge x_1 \cdots x_n (\alpha \leftrightarrow x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Basta ver que

$$\vdash \underbrace{y_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge y_n = x_n}_{\beta_1} \leftrightarrow \underbrace{x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n}_{\beta_2}. \quad (2.32)$$

pues, teniendo esta equivalencia, podemos obtener (2.31) con la misma demostración dada en la **Nota 1** pág. 74.

Sin más, la demostración de (2.32) es la siguiente:

|         |                                                                                                       |                           |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| (1)     | $y_1 = x_1 \leftrightarrow x_1 = y_1$                                                                 | Tma. lógico (por SI)      |
|         | $\dots$                                                                                               |                           |
| (n)     | $y_n = x_n \leftrightarrow x_n = y_n$                                                                 | Tma. lógico (por SI)      |
| (n + 1) | $y_{n-1} = x_{n-1} \leftrightarrow x_{n-1} = y_{n-1} \wedge$<br>$y_n = x_n \leftrightarrow x_n = y_n$ | IC $n - 1, n$             |
| (n + 2) | $y_{n-1} = x_{n-1} \wedge y_n = x_n \leftrightarrow$<br>$x_{n-1} = y_{n-1} \wedge x_n = y_n$          | MP $n + 1$ , Tma. 2.11 4) |



$$\begin{array}{ll}
(n+3) & (y_{n-2} = x_{n-2} \leftrightarrow x_{n-2} = y_{n-2}) \wedge (n+2) \quad \text{IC } n-2, n+2 \\
(n+4) & y_{n-2} = x_{n-2} \wedge y_{n-1} = x_{n-1} \wedge y_n = x_n \leftrightarrow \text{MP } n+3, \text{Tma. 2.11 4)} \\
& x_{n-2} = y_{n-2} \wedge x_{n-1} = y_{n-1} \wedge x_n = y_n \\
& \dots \\
(3n-3) & y_1 = x_1 \leftrightarrow x_1 = y_1 \wedge \text{IC } 1, 3n-4 \\
& y_2 = x_2 \wedge \dots \wedge y_n = x_n \leftrightarrow \\
& x_2 = y_2 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \\
(3n-2) & y_1 = x_1 \wedge \dots \wedge y_n = x_n \leftrightarrow \text{MP } 3n-3, \text{Tma. 2.11 4)} \\
& x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n
\end{array}$$

**Nota 7: Teorema 2.12 ...**

Lo que afirma el teorema es que

$$\vdash \bigvee^1 x_1 \dots x_n \alpha(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \left( \bigvee x_1 \dots x_n \alpha(x_1, \dots, x_n) \wedge \left( \bigwedge x_1 \dots x_n y_1 \dots y_n ((\alpha(x_1, \dots, x_n) \wedge \alpha(y_1, \dots, y_n)) \rightarrow y_1 = x_1 \wedge \dots \wedge y_n = x_n) \right) \right).$$

NO confundir con la fórmula

$$\bigvee^1 x_1 \dots x_n \alpha(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \left( \bigvee x_1 \dots x_n \alpha(x_1, \dots, x_n) \wedge \left( \bigwedge x_1 \dots x_n y_1 \dots y_n (\alpha(x_1, \dots, x_n) \wedge (\alpha(y_1, \dots, y_n) \rightarrow y_1 = x_1 \wedge \dots \wedge y_n = x_n)) \right) \right)$$

que no tiene nada que ver con el teorema.

Además, nos permite probar el siguiente resultado:

**Metateorema 2.4**

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal,  $\alpha$  una fórmula,  $x$  una variable y  $t_1, t_2$  dos términos. Se tiene que

$$\vdash \bigvee^1 x \alpha \wedge S_x^{t_1} \alpha \wedge S_x^{t_2} \alpha \rightarrow t_1 = t_2.$$

Tomando  $y$  una variable distinta de  $x$  y que no esté en  $t_1, t_2$  ni  $\alpha$  tenemos la siguiente demostración:

|      |                                                                                                                                                           |                             |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------|
| (1)  | $\bigvee^1 x \alpha \wedge S_x^{t_1} \alpha \wedge S_x^{t_2} \alpha$                                                                                      | Hipótesis                   |
| (2)  | $\bigvee^1 x \alpha$                                                                                                                                      | EC 1                        |
| (3)  | $\bigvee x \alpha \wedge \bigwedge xy (\alpha \wedge S_x^y \alpha \rightarrow y = x)$                                                                     | SE 2, Teo. 2.12             |
| (4)  | $\bigwedge xy (\alpha \wedge S_x^y \alpha \rightarrow y = x)$                                                                                             | EC 3                        |
| (5)  | $\bigwedge y (S_x^{t_2} \alpha \wedge S_x^y \alpha \rightarrow y = t_2)$                                                                                  | EG 4 [Tma. 1.13 2), (1.36)] |
| (6)  | $S_x^{t_2} \alpha \wedge S_y^{t_1} S_x^y \alpha \rightarrow t_1 = t_2$                                                                                    | EG 5                        |
| (7)  | $S_x^{t_1} \alpha \leftrightarrow S_y^{t_1} S_x^y \alpha$                                                                                                 | Mteo. 2.3                   |
| (8)  | $(S_x^{t_2} \alpha \wedge S_y^{t_1} S_x^y \alpha \rightarrow t_1 = t_2) \leftrightarrow (S_x^{t_2} \alpha \wedge S_x^{t_1} \alpha \rightarrow t_1 = t_2)$ | Tma. 2.11 4) 7              |
| (9)  | $S_x^{t_2} \alpha \wedge S_x^{t_1} \alpha \rightarrow t_1 = t_2$                                                                                          | Tma. 2.11 2)                |
| (10) | $S_x^{t_2} \alpha \wedge S_x^{t_1} \alpha$                                                                                                                | SE 6, 8                     |
|      |                                                                                                                                                           | EC 1                        |

|      |                                            |                     |
|------|--------------------------------------------|---------------------|
| (11) | $S_x^{t_2} \alpha \wedge S_x^{t_1} \alpha$ | SE Tma. 2.10 1), 10 |
| (12) | $t_1 = t_2$                                | MP 9, 11            |
| (13) | $(1) \rightarrow t_1 = t_2$                | Tma. deducción      |

Esto prueba lo deseado.



## Página 75

**Nota 1:** ... última parte del teorema se escribe ...

Realmente se tiene que

$$\alpha(y_1, \dots, y_n) \equiv S_{z_1}^{y_1} \dots S_{z_n}^{y_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha$$

donde  $z_1, \dots, z_n$  son las variables de menor índice que no están en  $\wedge x_1 \dots x_n \alpha$  ni en  $y_1, \dots, y_n$ , pero el siguiente resultado nos garantiza que

$$\vdash \alpha(y_1, \dots, y_n) \leftrightarrow S_{x_1}^{y_1} \dots S_{x_n}^{y_n} \alpha. \quad (2.33)$$

### Metateorema 2.5

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal,  $x_1, \dots, x_n$  variables y  $\theta$  una expresión en  $\mathcal{L}$ . Si  $y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n$  son variables que no están en  $\theta$  ni en  $x_1, \dots, x_n$  y que son distintas entre sí, entonces se cumple que

$$\vdash S_{z_1}^{y_1} \dots S_{z_n}^{y_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta \leftrightarrow S_{x_1}^{y_1} \dots S_{x_n}^{y_n} \theta$$

si  $\theta$  es una fórmula y

$$\vdash S_{z_1}^{y_1} \dots S_{z_n}^{y_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta = S_{x_1}^{y_1} \dots S_{x_n}^{y_n} \theta$$

si  $\theta$  es un término.

Comencemos viéndolo en el caso en que  $\theta$  es una fórmula.

Como  $z_1, \dots, z_n$  son variables que no están en  $y_1, \dots, y_n, \theta$  ni en  $x_1, \dots, x_n$ , por las reglas (IB) y (MB) y por (1.53) y (1.54) basta probar

$$\vdash S_{x_1}^{y_1} \dots S_{x_n}^{y_n} \theta \rightarrow \bigwedge z_1 \dots z_n \left( (z_1 = y_1 \wedge \dots \wedge z_n = y_n) \rightarrow S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta \right) \quad (2.34)$$

y

$$\vdash \bigvee z_1 \dots z_n \left( z_1 = y_1 \wedge \dots \wedge z_n = y_n \wedge S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta \right) \rightarrow S_{x_1}^{y_1} \dots S_{x_n}^{y_n} \theta. \quad (2.35)$$

Para (2.34) tenemos

|     |                                                                                                     |            |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| (1) | $S_{x_1}^{y_1} \dots S_{x_n}^{y_n} \theta$                                                          | Hipótesis  |
| (2) | $z_1 = y_1 \wedge \dots \wedge z_n = y_n$                                                           | Hipótesis  |
| (3) | $S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta \leftrightarrow S_{x_1}^{y_1} \dots S_{x_n}^{y_n} \theta$ | Mteo. 1.17 |
| (4) | $S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta$                                                          | SE 1, 3    |

|     |                                                                                                                                                                                       |                     |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|
| (5) | $(z_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge z_n = y_n) \rightarrow S_{x_1}^{z_1} \cdots S_{x_n}^{z_n} \theta$                                                                                    | Tma. deducción      |
| (6) | $\wedge z_1 \cdots z_n ((z_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge z_n = y_n) \rightarrow S_{x_1}^{z_1} \cdots S_{x_n}^{z_n} \theta)$                                                            | IG 5 ( $\times n$ ) |
| (7) | $S_{x_1}^{y_1} \cdots S_{x_n}^{y_n} \theta \rightarrow$<br>$\wedge z_1 \cdots z_n ((z_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge z_n = y_n) \rightarrow S_{x_1}^{z_1} \cdots S_{x_n}^{z_n} \theta)$ | Tma. deducción      |

Observemos que en la línea 3 utilizamos el Metateorema 1.17 junto a la línea 2 y el teorema lógico  $\theta \leftrightarrow \theta$ , siendo válida su aplicación pues en la deducción de este resultado se generaliza únicamente respecto a  $x_1, \dots, x_n$  y, por el Teorema 1.13 3), estas variables no están libres en (1) ni en (2). También, las generalizaciones en la línea 6 son correctas puesto que  $z_1, \dots, z_n$  tampoco están libres en (1).

Por otro lado, para (2.35) tenemos

|     |                                                                                                                                                                                 |                                       |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------|
| (1) | $\forall z_1 \cdots z_n (z_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge z_n = y_n \wedge S_{x_1}^{z_1} \cdots S_{x_n}^{z_n} \theta)$                                                            | Hipótesis                             |
| (2) | $(z_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge z_n = y_n) \wedge S_{x_1}^{z_1} \cdots S_{x_n}^{z_n} \theta$                                                                                   | EP 1 ( $\times n$ ) <sup>9</sup>      |
| (3) | $z_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge z_n = y_n$                                                                                                                                      | EC 2                                  |
| (4) | $S_{x_1}^{z_1} \cdots S_{x_n}^{z_n} \theta \leftrightarrow S_{x_1}^{y_1} \cdots S_{x_n}^{y_n} \theta$                                                                           | Mteo. 1.17                            |
| (5) | $S_{x_1}^{z_1} \cdots S_{x_n}^{z_n} \theta$                                                                                                                                     | EC 2                                  |
| (6) | $S_{x_1}^{y_1} \cdots S_{x_n}^{y_n} \theta$                                                                                                                                     | SE 4, 5 ( $z_1, \dots, z_n$ no libre) |
| (7) | $\forall z_1 \cdots z_n (z_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge z_n = y_n \wedge S_{x_1}^{z_1} \cdots S_{x_n}^{z_n} \theta) \rightarrow$<br>$S_{x_1}^{y_1} \cdots S_{x_n}^{y_n} \theta$ | Tma. deducción                        |

Observemos que  $z_1, \dots, z_n$  no están libres en (1) con lo que podemos aplicar la regla (EP) sin ningún problema. También, en la línea 4 utilizamos el Metateorema 1.17 junto a la línea 3 y el teorema lógico  $\theta \leftrightarrow \theta$ , siendo válida su aplicación pues en la deducción de este resultado se generaliza únicamente respecto a  $x_1, \dots, x_n$  y, por el Teorema 1.13 3), estas variables no están libres en (1) ni en (2).

Para el caso en el que  $\theta$  es un término, por el Metateorema 1.8, basta ver que

$$\vdash w = S_{z_1}^{y_1} \cdots S_{z_n}^{y_n} S_{x_1}^{z_1} \cdots S_{x_n}^{z_n} \theta \leftrightarrow w = S_{x_1}^{y_1} \cdots S_{x_n}^{y_n} \theta \quad (2.36)$$

donde  $w$  es una variable que no está en  $S_{z_1}^{y_1} \cdots S_{z_n}^{y_n} S_{x_1}^{z_1} \cdots S_{x_n}^{z_n} \theta$  ni en  $S_{x_1}^{y_1} \cdots S_{x_n}^{y_n} \theta$  y es distinta de  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n$ .

Ahora bien, si definimos la fórmula

$$\alpha \equiv w = \theta$$

se tiene que

$$S_{z_1}^{y_1} \cdots S_{z_n}^{y_n} S_{x_1}^{z_1} \cdots S_{x_n}^{z_n} \alpha \equiv w = S_{z_1}^{y_1} \cdots S_{z_n}^{y_n} S_{x_1}^{z_1} \cdots S_{x_n}^{z_n} \theta$$

<sup>9</sup> Esta línea realmente debería ser

$$z_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge z_n = y_n \wedge S_{x_1}^{z_1} \cdots S_{x_n}^{z_n} \theta,$$

pero por la Nota 3 pág. 72 sabemos que

$$\vdash (z_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge z_n = y_n \wedge S_{x_1}^{z_1} \cdots S_{x_n}^{z_n} \theta) \leftrightarrow ((z_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge z_n = y_n) \wedge S_{x_1}^{z_1} \cdots S_{x_n}^{z_n} \theta)$$

y, por la regla (SE), se obtiene entonces (2).

y

$$S_{x_1}^{y_1} \dots S_{x_n}^{y_n} \alpha \equiv w = S_{x_1}^{y_1} \dots S_{x_n}^{y_n} \theta,$$

luego por la parte ya demostrada para fórmulas tenemos que

$$\vdash S_{z_1}^{y_1} \dots S_{z_n}^{y_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \alpha \leftrightarrow S_{x_1}^{y_1} \dots S_{x_n}^{y_n} \alpha$$

que, por lo visto, es justamente (2.36). 

Por tanto, utilizando (2.33) y el Teorema 2.11 de forma parecida a lo visto en la **Nota 1** **pág. 74** se obtiene que

$$\begin{aligned} \vdash & \left( \bigvee x_1 \dots x_n \alpha \wedge \bigwedge x_1 \dots x_n y_1 \dots y_n \left( \alpha \wedge S_{x_1}^{y_1} \dots S_{x_n}^{y_n} \alpha \rightarrow y_1 = x_1 \wedge \dots \wedge y_n = x_n \right) \right) \leftrightarrow \\ & \left( \bigvee x_1 \dots x_n \alpha(x_1, \dots, x_n) \wedge \bigwedge x_1 \dots x_n y_1 \dots y_n (\alpha(x_1, \dots, x_n) \wedge \alpha(y_1, \dots, y_n) \rightarrow \right. \\ & \left. y_1 = x_1 \wedge \dots \wedge y_n = x_n) \right). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Así pues, basta probar que  $\bigvee^1 x_1 \dots x_n \alpha$  es equivalente a la primera fórmula de (2.37) (que es lo que se hace en la página 75 y en la siguiente nota) y utilizar la regla (MBB) para obtener la demostración buscada en el Teorema 2.12.

## Nota 2: DEMOSTRACIÓN

Veamos la demostración del caso general con detalle, para lo cual, en virtud de la regla (IB), bastará demostrar cada implicación por separado.

Denotaremos

$$\begin{aligned} \beta &\equiv \bigwedge x_1 \dots x_n y_1 \dots y_n \left( \alpha \wedge S_{x_1}^{y_1} \dots S_{x_n}^{y_n} \alpha \rightarrow y_1 = x_1 \wedge \dots \wedge y_n = x_n \right), \\ \gamma &\equiv \left( \bigvee x_1 \dots x_n \alpha \right) \wedge \beta. \end{aligned}$$

Para la primera tenemos:

|       |                                                                                                                                                           |                                                                                                                                       |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| (1)   | $\gamma$                                                                                                                                                  | Hipótesis                                                                                                                             |
| (2)   | $\bigvee x_1 \dots x_n \alpha$                                                                                                                            | EC 1                                                                                                                                  |
| (3)   | $\bigvee x_n \dots x_1 \alpha$                                                                                                                            | SE 2, Tma. lógico <sup>10</sup>                                                                                                       |
| (4)   | $S_{x_n}^{y_n} (\bigvee x_{n-1} \dots x_1 \alpha) \equiv$<br>$\bigvee x_{n-1} \dots x_1 S_{x_n}^{y_n} \alpha$                                             | EP 3 ( $y_n$ no libre en 1)<br>(1.37) ( $y_n$ no en $\bigvee x_{n-1} \dots x_1 \alpha$ )                                              |
| (5)   | $S_{x_{n-1}}^{y_{n-1}} (\bigvee x_{n-2} \dots x_1 S_{x_n}^{y_n} \alpha) \equiv$<br>$\bigvee x_{n-2} \dots x_1 S_{x_{n-1}}^{y_{n-1}} S_{x_n}^{y_n} \alpha$ | EP 4 ( $y_{n-1}$ no libre en 1, 4)<br>(1.37) ( $y_{n-1}$ no en $\bigvee x_{n-2} \dots x_1 S_{x_n}^{y_n} \alpha$ )                     |
| ...   |                                                                                                                                                           |                                                                                                                                       |
| (n+2) | $S_{x_2}^{y_2} (\bigvee x_1 S_{x_3}^{y_3} \dots S_{x_n}^{y_n} \alpha) \equiv$<br>$\bigvee x_1 S_{x_2}^{y_2} \dots S_{x_n}^{y_n} \alpha$                   | EP $n+1$ ( $y_2$ no libre en 1, 4, $\dots$ , $n+1$ )<br>(1.37) ( $y_2$ no en $\bigvee x_1 S_{x_3}^{y_3} \dots S_{x_n}^{y_n} \alpha$ ) |
| (n+3) | $S_{x_1}^{y_1} \dots S_{x_n}^{y_n} \alpha$                                                                                                                | EP $n+2$ ( $y_1$ no libre en 1, 4, $\dots$ , $n+2$ )<br>( $y_1$ no en $S_{x_2}^{y_2} \dots S_{x_n}^{y_n} \alpha$ )                    |
| (n+4) | $\alpha$                                                                                                                                                  | Hipótesis                                                                                                                             |
| (n+5) | $\beta$                                                                                                                                                   | EC 1                                                                                                                                  |
| (n+6) | $\alpha \wedge S_{x_1}^{y_1} \dots S_{x_n}^{y_n} \alpha \rightarrow$<br>$y_1 = x_1 \wedge \dots \wedge y_n = x_n$                                         | EG $n+5$ ( $\times 2n$ )                                                                                                              |

|         |                                                                                                                        |                                                                                    |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| (n+7)   | $\alpha \wedge S_{x_1}^{y_1} \cdots S_{x_n}^{y_n} \alpha$                                                              | IC $n + 3, n + 4$                                                                  |
| (n+8)   | $y_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge y_n = x_n$                                                                             | MP $n + 6, n + 7$                                                                  |
| (n+9)   | $\alpha \rightarrow y_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge y_n = x_n$                                                          | Tma. deducción                                                                     |
| (n+10)  | $y_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge y_n = x_n$                                                                             | Hipótesis                                                                          |
| (n+11)  | $y_1 = x_1$                                                                                                            | EC $n + 10$ (asoc. y conmut. conjunción)                                           |
| (n+12)  | $x_1 = y_1$                                                                                                            | SI $n + 11$                                                                        |
| (n+13)  | $S_{x_1}^{y_1} S_{x_2}^{y_2} \cdots S_{x_n}^{y_n} \alpha \equiv$<br>$S_{x_2}^{y_2} \cdots S_{x_n}^{y_n} \alpha$        | ETI $n + 3, n + 12$<br>Tma. 1.13 1)                                                |
| (n+14)  | $y_2 = x_2$                                                                                                            | EC $n + 10$ (asoc. y conmut. conjunción)                                           |
| (n+15)  | $x_2 = y_2$                                                                                                            | SI $n + 14$                                                                        |
| (n+16)  | $S_{x_2}^{y_2} S_{x_3}^{y_3} \cdots S_{x_n}^{y_n} \alpha \equiv$<br>$S_{x_3}^{y_3} \cdots S_{x_n}^{y_n} \alpha$<br>... | ETI $n + 13, n + 15$<br>Tma. 1.13 1)                                               |
| (4n+11) | $y_n = x_n$                                                                                                            | EC $n + 10$ (asoc. y conmut. conjunción)                                           |
| (4n+12) | $x_n = y_n$                                                                                                            | SI $4n + 11$                                                                       |
| (4n+13) | $S_{x_n}^{y_n} \alpha \equiv \alpha$                                                                                   | ETI $4n + 10, 4n + 12$                                                             |
| (4n+14) | $y_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge y_n = x_n \rightarrow \alpha$                                                          | Tma. deducción                                                                     |
| (4n+15) | $\alpha \leftrightarrow y_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge y_n = x_n$                                                      | IB $n + 9, 4n + 14$                                                                |
| (4n+16) | $\bigwedge x_1 \cdots x_n (4n + 15)$                                                                                   | IG $4n + 15$ ( $\times n$ )<br>$x_1, \dots, x_n$ no libres en $1, 4, \dots, n + 3$ |
| (4n+17) | $\bigvee y_1 \cdots y_n \bigwedge x_1 \cdots x_n (4n + 15)$                                                            | IP $4n + 16$ ( $\times n$ )<br>$y_1, \dots, y_n$ no libres                         |
| (4n+18) | $\bigvee_{x_1}^1 \cdots x_n \alpha$                                                                                    | SE $4n + 17$ , Tma. 2.9 3)                                                         |
| (4n+19) | $\gamma \rightarrow \bigvee_{x_1}^1 \cdots x_n \alpha$                                                                 | Tma. deducción                                                                     |

Para la segunda implicación tenemos que, por el Teorema 2.9 3) y la regla (MB), bastará ver que

$$\vdash \left( \bigvee y_1 \cdots y_n \bigwedge x_1 \cdots x_n (\alpha \leftrightarrow y_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge y_n = x_n) \right) \rightarrow \gamma. \quad (2.38)$$

Tomemos pues variables  $z_1, \dots, z_n$  que no estén en  $\alpha$  y que sean distintas de  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$  y denotemos por

$$\delta \equiv \alpha \leftrightarrow y_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge y_n = x_n.$$

Tenemos entonces:

|     |                                                                                                                                                           |                                                                                                                        |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| (1) | $\bigvee y_1 \cdots y_n \bigwedge x_1 \cdots x_n \delta$                                                                                                  | Hipótesis                                                                                                              |
| (2) | $S_{y_1}^{z_1} (\bigvee y_2 \cdots y_n \bigwedge x_1 \cdots x_n \delta) \equiv$<br>$\bigvee y_2 \cdots y_n \bigwedge x_1 \cdots x_n S_{y_1}^{z_1} \delta$ | EP 1 ( $z_1$ no libre en 1)<br>(1.37) y (1.36)<br>$z_1$ no en $\bigvee y_2 \cdots y_n \bigwedge x_1 \cdots x_n \delta$ |

<sup>10</sup> Es claro que

$$\vdash \bigvee x_1 \cdots x_n \alpha \leftrightarrow \bigvee x_n \cdots x_1 \alpha$$

pues para cada implicación basta eliminar todos los particularizadores (sin considerar variables nuevas, lo cual puede hacerse en el contexto de aplicación del teorema de deducción pues  $x_1, \dots, x_n$  no están libres en  $\bigvee x_1 \cdots x_n \alpha$  ni en  $\bigvee x_n \cdots x_1 \alpha$ ) y después volver a introducirlos en el orden deseado.

|        |                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                  |
|--------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| (3)    | $S_{y_2}^{z_2} (\forall y_3 \cdots y_n \wedge x_1 \cdots x_n S_{y_1}^{z_1} \delta) \equiv$<br>$\forall y_3 \cdots y_n \wedge x_1 \cdots x_n S_{y_2}^{z_2} S_{y_1}^{z_1} \delta$ | EP 2 ( $z_2$ no libre en 1, 2)<br>(1.37) y (1.36)<br>$z_2$ no en $\forall y_3 \cdots y_n \wedge x_1 \cdots x_n S_{y_1}^{z_1} \delta$             |
| ...    |                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                  |
| (n+1)  | $S_{y_n}^{z_n} (\wedge x_1 \cdots x_n S_{y_{n-1}}^{z_{n-1}} \cdots S_{y_1}^{z_1} \delta) \equiv$<br>$\wedge x_1 \cdots x_n S_{y_n}^{z_n} \cdots S_{y_1}^{z_1} \delta$           | EP $n$ ( $z_n$ no libre en 1, $\dots$ , $n$ )<br>(1.36)<br>$z_n$ no en $\wedge x_1 \cdots x_n S_{y_{n-1}}^{z_{n-1}} \cdots S_{y_1}^{z_1} \delta$ |
| (n+2)  | $\wedge x_1 \cdots x_n (\alpha \leftrightarrow$<br>$z_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge z_n = x_n)$                                                                                  | R $n + 1$ (Tma. 1.13 2))                                                                                                                         |
| (n+3)  | $S_{x_n}^{z_n} \cdots S_{x_1}^{z_1} \alpha \leftrightarrow$<br>$z_1 = z_1 \wedge \cdots \wedge z_n = z_n$                                                                       | EG $n + 2$ ( $\times n$ ) (1.36)                                                                                                                 |
| (n+4)  | $z_1 = z_1 \wedge \cdots \wedge z_n = z_n$                                                                                                                                      | I ( $\times n$ ); IC ( $\times n - 1$ )                                                                                                          |
| (n+5)  | $S_{x_n}^{z_n} \cdots S_{x_1}^{z_1} \alpha$                                                                                                                                     | SE $n + 3, n + 4$                                                                                                                                |
| (n+6)  | $\forall x_1 \cdots x_n \alpha$                                                                                                                                                 | IP $n + 5$ ( $\times n$ ) (1.37)                                                                                                                 |
| (n+7)  | $\alpha \wedge S_{x_n}^{y_n} \cdots S_{x_1}^{y_1} \alpha$                                                                                                                       | Hipótesis                                                                                                                                        |
| (n+8)  | $S_{x_n}^{y_n} \cdots S_{x_1}^{y_1} \alpha \leftrightarrow$<br>$z_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge z_n = y_n$                                                                       | EG $n + 2$ ( $\times n$ ) (1.36)                                                                                                                 |
| (n+9)  | $\alpha \leftrightarrow z_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge z_n = x_n$                                                                                                               | EG $n + 2$ ( $\times n$ )                                                                                                                        |
| (n+10) | $S_{x_n}^{y_n} \cdots S_{x_1}^{y_1} \alpha$                                                                                                                                     | EC $n + 7$                                                                                                                                       |
| (n+11) | $z_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge z_n = y_n$                                                                                                                                      | SE $n + 8, n + 10$                                                                                                                               |
| (n+12) | $\alpha$                                                                                                                                                                        | EC $n + 7$                                                                                                                                       |
| (n+13) | $z_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge z_n = x_n$                                                                                                                                      | SE $n + 9, n + 12$                                                                                                                               |
| (n+14) | $y_1 = z_1 \wedge \cdots \wedge y_n = z_n$                                                                                                                                      | EC, SI, IC $n + 11$                                                                                                                              |
| (n+15) | $y_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge y_n = x_n$                                                                                                                                      | EC, TI, IC $n + 13, n + 14$                                                                                                                      |
| (n+16) | $(\alpha \wedge S_{x_n}^{y_n} \cdots S_{x_1}^{y_1} \alpha) \rightarrow$<br>$y_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge y_n = x_n$                                                           | Tma. deducción                                                                                                                                   |
| (n+17) | $(n + 6) \wedge (n + 16)$                                                                                                                                                       | IC $n + 6, n + 16$<br>$z_1, \dots, z_n$ no libres                                                                                                |
| (n+18) | $(n + 16)$                                                                                                                                                                      | EC $n + 17$                                                                                                                                      |
| (n+19) | $\wedge y_1 \cdots y_n (n + 16)$                                                                                                                                                | IG $n + 18$ ( $\times n$ )<br>$y_1, \dots, y_n$ no libres en 1                                                                                   |
| (n+20) | $\wedge x_1 \cdots x_n y_1 \cdots y_n (n + 16) \equiv \beta$                                                                                                                    | IG $n + 19$ ( $\times n$ )<br>$x_1, \dots, x_n$ no libres en 1                                                                                   |
| (n+21) | $\forall x_1 \cdots x_n \alpha$                                                                                                                                                 | EC $n + 17$                                                                                                                                      |
| (n+22) | $(\forall x_1 \cdots x_n \alpha) \wedge \beta$                                                                                                                                  | IC $n + 20, n + 21$                                                                                                                              |
| (n+23) | $\forall y_1 \cdots y_n \wedge x_1 \cdots x_n \delta \rightarrow \gamma$                                                                                                        | Tma. deducción                                                                                                                                   |

Lo anterior prueba (2.38) y, por lo dicho, con esto concluye la demostración. 

### Nota 3: EP 1

$y$  no está en  $\alpha$  y tampoco está libre en (1), luego podemos aplicar la regla (EP) aunque estemos en un contexto en el que hay prohibiciones respecto a la generalización.

**Nota 4:** ETI 2, 7

Previo a aplicar la regla (ETI) aplicamos la regla (SI) a la línea 7. Con ello la regla (ETI) nos da  $S_x^x \alpha$ , pero por el Teorema 1.13 1) sabemos que  $S_x^x \alpha \equiv \alpha$ .

**Nota 5:** IG 10

La generalización es válida pues claramente  $x$  no está libre en (1) y tampoco lo está en (2) pues, por el Teorema 1.13 3),  $x$  está libre en  $S_x^y \alpha$  syss  $x$  está libre en  $\alpha$  e  $y \equiv x$ , y esto último no se da.

**Nota 6:** IP 11

$y$  no está libre en (12) luego sabemos que, por la regla (EP), esta fórmula se deduce realmente de (1).

**Nota 7:** Teorema 2.9

Por el Teorema 2.9 3) sabemos que, como  $y$  no está en  $\alpha$  y es distinta de  $x$ , se cumple que

$$\vdash \bigvee^1 x \alpha \leftrightarrow \bigvee y \bigwedge x (\alpha \leftrightarrow y = x).$$

Por tanto, aplicando la regla (SE) a este teorema lógico y a la línea 12 se obtiene lo deseado.

**Nota 8:** Teorema 2.9

Completamente análogo a lo dicho en la nota anterior.

**Nota 9:** EP 2

Tomando  $z$  una variable que no esté en  $\bigwedge x (\alpha \leftrightarrow y = x)$  al aplicar (EP) a la línea 2 se obtiene

$$S_y^z \left( \bigwedge x (\alpha \leftrightarrow y = x) \right).$$

Ahora bien, por (1.36) (teniendo en cuenta que  $x \neq y$  por hipótesis y que  $x$  no está libre en  $z$  pues  $z$  no está en  $\bigwedge x (\alpha \leftrightarrow y = x)$ ) y el Teorema 1.13 2) (teniendo en cuenta que  $y$  no está en  $\alpha$  ni en  $x$ ) se tiene que

$$S_y^z \left( \bigwedge x (\alpha \leftrightarrow y = x) \right) \equiv \bigwedge x (\alpha \leftrightarrow z = x),$$

que es la línea 3.

**Nota 10: IG 11**

Observemos que  $z$  no está libre en la línea 11 (pues  $z$  no está en  $\alpha$ ,  $x$  ni en  $y$  al no estar en  $\wedge x(\alpha \leftrightarrow y = x)$  y, por el Teorema 1.13 3), no puede estar tampoco libre en  $S_x^y \alpha$ , luego por la regla (EP) tenemos que dicha línea se deduce de (1) y (2) y podemos ya olvidar las restricciones sobre no generalizar respecto a variables libres en (3).

Por otra parte, sabemos que

$$\bigvee^1 x \alpha \equiv \bigvee w \wedge x(\alpha \leftrightarrow w = x)$$

donde  $w$  es la variable de menor índice que no está en  $\bigvee x \alpha$ , luego está claro que  $x$  no está libre en  $\bigvee^1 x \alpha$ . Además,  $y$  tampoco lo está pues si  $y \equiv w$  está claro que no estará libre en  $\bigvee^1 x \alpha$  y si  $y \not\equiv w$ , como  $y$  no está en  $\bigvee x \alpha$ , concluimos que  $y$  ni siquiera está en  $\bigvee^1 x \alpha$ .

Con todo, se tiene que  $x$  e  $y$  no están libres en (1) y con ello que la generalización es válida.

**Nota 11: Ejercicio ...**

Resuelto en las notas anteriores.

**Página 76****Nota 1: ... dejamos como ejercicio ...**

En virtud de la regla (IB) sabemos que basta con demostrar cada implicación por separado.

**Demostremos la primera equivalencia.**

Para la primera implicación tenemos:

|     |                                                                                      |                           |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| (1) | $\alpha \rightarrow \wedge x \beta$                                                  | Hipótesis                 |
| (2) | $\alpha$                                                                             | Hipótesis                 |
| (3) | $\wedge x \beta$                                                                     | MP 1, 2                   |
| (4) | $\beta$                                                                              | EG 3                      |
| (5) | $\alpha \rightarrow \beta$                                                           | Tma. deducción            |
| (6) | $\wedge x(\alpha \rightarrow \beta)$                                                 | IG 5 ( $x$ no libre en 1) |
| (7) | $(\alpha \rightarrow \wedge x \beta) \rightarrow \wedge x(\alpha \rightarrow \beta)$ | Tma. deducción            |

Mientras que para la segunda tenemos:

|     |                                                                                      |                                |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|
| (1) | $\wedge x(\alpha \rightarrow \beta)$                                                 | Hipótesis                      |
| (2) | $\alpha$                                                                             | Hipótesis                      |
| (3) | $\alpha \rightarrow \beta$                                                           | EG 1                           |
| (4) | $\beta$                                                                              | MP 2, 3                        |
| (5) | $\wedge x \beta$                                                                     | IG 5 ( $x$ no libre en 1 ni 2) |
| (6) | $\alpha \rightarrow \wedge x \beta$                                                  | Tma. deducción                 |
| (7) | $\wedge x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \wedge x \beta)$ | Tma. deducción                 |



**Demostremos la segunda equivalencia.**

Para la primera implicación tenemos:

|     |                                                                                       |                                             |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|
| (1) | $\alpha \rightarrow \forall x\beta$                                                   | Hipótesis                                   |
| (2) | $\alpha$                                                                              | Hipótesis                                   |
| (3) | $\forall x\beta$                                                                      | MP 1, 2                                     |
| (4) | $\beta$                                                                               | EP <sub>2</sub> 3 ( $x$ no libre en 1 ni 2) |
| (5) | $\alpha \rightarrow \beta$                                                            | EP <sub>2</sub> 4, 4                        |
| (6) | $\forall x(\alpha \rightarrow \beta)$                                                 | IP 5 ( $x$ no libre)                        |
| (7) | $(\alpha \rightarrow \forall x\beta) \rightarrow \forall x(\alpha \rightarrow \beta)$ | Tma. deducción                              |

Mientras que para la segunda tenemos:

|     |                                                                                       |                                |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|
| (1) | $\forall x(\alpha \rightarrow \beta)$                                                 | Hipótesis                      |
| (2) | $\alpha \rightarrow \beta$                                                            | EP 1 ( $x$ no libre en 1)      |
| (3) | $\alpha$                                                                              | Hipótesis                      |
| (4) | $\beta$                                                                               | MP 2, 3                        |
| (5) | $\forall x\beta$                                                                      | IP 4                           |
| (6) | $\alpha \rightarrow \forall x\beta$                                                   | Tma. deducción ( $x$ no libre) |
| (7) | $\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \forall x\beta)$ | Tma. deducción                 |

**Demostremos la tercera equivalencia.**

Para la primera implicación tenemos:

|      |                                                                                                           |                                                     |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| (1)  | $\wedge x\alpha \rightarrow \beta$                                                                        | Hipótesis                                           |
| (2)  | $\neg\beta \rightarrow \neg\wedge x\alpha$                                                                | NI 1                                                |
| (3)  | $\neg\beta \leftrightarrow \neg\beta$                                                                     | Tma. lógico 2.7 (IB)                                |
| (4)  | $\neg\wedge x\alpha \leftrightarrow \forall x\neg\alpha$                                                  | Tma. lógico (NG)                                    |
| (5)  | $(\neg\beta \leftrightarrow \neg\beta) \wedge (\neg\wedge x\alpha \leftrightarrow \forall x\neg\alpha)$   | IC 3, 4                                             |
| (6)  | $(\neg\beta \rightarrow \neg\wedge x\alpha) \leftrightarrow (\neg\beta \rightarrow \forall x\neg\alpha)$  | MP 5, Tma. lógico 2.11 2)                           |
| (7)  | $\neg\beta \rightarrow \forall x\neg\alpha$                                                               | SE 2, 6                                             |
| (8)  | $(\neg\beta \rightarrow \forall x\neg\alpha) \leftrightarrow \forall x(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$ | Tma. lógico 2.14 2) ( $x$ no libre en $\neg\beta$ ) |
| (9)  | $\forall x(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$                                                             | SE 7, 8                                             |
| (10) | $(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \leftrightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$                           | Tma. lógico (NI, IB)                                |
| (11) | $\wedge x((\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \leftrightarrow (\alpha \rightarrow \beta))$                 | IG 10 ( $x$ no libre en 1)                          |
| (12) | $\forall x(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \leftrightarrow \forall x(\alpha \rightarrow \beta)$         | MP 11, Tma. lógico 2.11 7)                          |
| (13) | $\forall x(\alpha \rightarrow \beta)$                                                                     | SE 9, 12                                            |
| (14) | $(\wedge x\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \forall x(\alpha \rightarrow \beta)$                      | Tma. deducción                                      |

Mientras que para la segunda tenemos:

|     |                                                                                      |                                |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|
| (1) | $\forall x(\alpha \rightarrow \beta)$                                                | Hipótesis                      |
| (2) | $\alpha \rightarrow \beta$                                                           | EP 1 ( $x$ no libre en 1)      |
| (3) | $\wedge x\alpha$                                                                     | Hipótesis                      |
| (4) | $\alpha$                                                                             | EG 3                           |
| (5) | $\beta$                                                                              | MP 2, 4                        |
| (6) | $\wedge x\alpha \rightarrow \beta$                                                   | Tma. deducción ( $x$ no libre) |
| (7) | $\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\wedge x\alpha \rightarrow \beta)$ | Tma. deducción                 |

**Demostremos la cuarta equivalencia.**

Para la primera implicación tenemos:

|     |                                                                                      |                           |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| (1) | $\forall x\alpha \rightarrow \beta$                                                  | Hipótesis                 |
| (2) | $\alpha$                                                                             | Hipótesis                 |
| (3) | $\forall x\alpha$                                                                    | IP 2                      |
| (4) | $\beta$                                                                              | MP 1, 3                   |
| (5) | $\alpha \rightarrow \beta$                                                           | Tma. deducción            |
| (6) | $\wedge x(\alpha \rightarrow \beta)$                                                 | IG 5 ( $x$ no libre en 1) |
| (7) | $(\forall x\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \wedge x(\alpha \rightarrow \beta)$ | Tma. deducción            |

Mientras que para la segunda tenemos:

|     |                                                                                      |                                |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|
| (1) | $\wedge x(\alpha \rightarrow \beta)$                                                 | Hipótesis                      |
| (2) | $\alpha \rightarrow \beta$                                                           | EG 1                           |
| (3) | $\forall x\alpha$                                                                    | Hipótesis                      |
| (4) | $\alpha$                                                                             | EP 3 ( $x$ no libre en 1 ni 3) |
| (5) | $\beta$                                                                              | MP 2, 4 ( $x$ no libre)        |
| (6) | $\forall x\alpha \rightarrow \beta$                                                  | Tma. deducción                 |
| (7) | $\wedge x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x\alpha \rightarrow \beta)$ | Tma. deducción                 |

**Demostremos la quinta equivalencia.**

Para la primera implicación tenemos:

|     |                                                                       |                           |
|-----|-----------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| (1) | $\alpha \vee \wedge x\beta$                                           | Hipótesis                 |
| (2) | $\neg\alpha$                                                          | Hipótesis                 |
| (3) | $\wedge x\beta$                                                       | MTP 1, 2                  |
| (4) | $\beta$                                                               | EG 3                      |
| (5) | $\neg\alpha \rightarrow \beta$                                        | Tma. deducción            |
| (6) | $\alpha \vee \beta$                                                   | EDI 5                     |
| (7) | $\wedge x(\alpha \vee \beta)$                                         | IG 6 ( $x$ no libre en 1) |
| (8) | $(\alpha \vee \wedge x\beta) \rightarrow \wedge x(\alpha \vee \beta)$ | Tma. deducción            |

Mientras que para la segunda tenemos:

|     |                                                                       |                                |
|-----|-----------------------------------------------------------------------|--------------------------------|
| (1) | $\wedge x(\alpha \vee \beta)$                                         | Hipótesis                      |
| (2) | $\alpha \vee \beta$                                                   | EG 1                           |
| (3) | $\neg\alpha$                                                          | Hipótesis                      |
| (4) | $\beta$                                                               | MTP 2, 3                       |
| (5) | $\wedge x\beta$                                                       | IG 4 ( $x$ no libre en 1 ni 3) |
| (6) | $\neg\alpha \rightarrow \wedge x\beta$                                | Tma. deducción                 |
| (7) | $\alpha \vee \wedge x\beta$                                           | EDI 6                          |
| (8) | $\wedge x(\alpha \vee \beta) \rightarrow (\alpha \vee \wedge x\beta)$ | Tma. deducción                 |

**Demostremos la sexta equivalencia.**

Para la primera implicación tenemos:

|     |                                                                                                   |                                                      |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|
| (1) | $\alpha \vee \forall x\beta$                                                                      | Hipótesis                                            |
| (2) | $\neg\alpha \rightarrow \forall x\beta$                                                           | EDI 1                                                |
| (3) | $(\neg\alpha \rightarrow \forall x\beta) \leftrightarrow \forall x(\neg\alpha \rightarrow \beta)$ | Tma. lógico 2.14 2) ( $x$ no libre en $\neg\alpha$ ) |

|     |                                                                                        |                           |
|-----|----------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| (4) | $\forall x(\neg\alpha \rightarrow \beta)$                                              | SE 2, 3                   |
| (5) | $(\neg\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\alpha \vee \beta)$                   | Tma. lógico (EDI, IB)     |
| (6) | $\wedge x((\neg\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\alpha \vee \beta))$         | IG 5 ( $x$ no libre en 1) |
| (7) | $\forall x(\neg\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow \forall x(\alpha \vee \beta)$ | MP 6, Tma. lógico 2.11 7) |
| (8) | $\forall x(\alpha \vee \beta)$                                                         | SE 4, 7                   |
| (9) | $(\alpha \vee \forall x\beta) \rightarrow \forall x(\alpha \vee \beta)$                | Tma. deducción            |

Mientras que para la segunda tenemos:

|     |                                                                         |                           |
|-----|-------------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| (1) | $\forall x(\alpha \vee \beta)$                                          | Hipótesis                 |
| (2) | $\alpha \vee \beta$                                                     | EP 1 ( $x$ no libre en 1) |
| (3) | $\neg\alpha$                                                            | Hipótesis                 |
| (4) | $\beta$                                                                 | MTP 2, 3                  |
| (5) | $\forall x\beta$                                                        | IP 4                      |
| (6) | $\neg\alpha \rightarrow \forall x\beta$                                 | Tma. deducción            |
| (7) | $\alpha \vee \forall x\beta$                                            | EDI 6 ( $x$ no libre)     |
| (8) | $\forall x(\alpha \vee \beta) \rightarrow (\alpha \vee \forall x\beta)$ | Tma. deducción            |

### Demostremos la séptima equivalencia.

Para la primera implicación tenemos:

|     |                                                                           |                           |
|-----|---------------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| (1) | $\wedge x\alpha \wedge \beta$                                             | Hipótesis                 |
| (2) | $\wedge x\alpha$                                                          | EC 1                      |
| (3) | $\alpha$                                                                  | EG 2                      |
| (4) | $\beta$                                                                   | EC 1                      |
| (5) | $\alpha \wedge \beta$                                                     | IC 3, 4                   |
| (6) | $\wedge x(\alpha \wedge \beta)$                                           | IG 5 ( $x$ no libre en 1) |
| (7) | $(\wedge x\alpha \wedge \beta) \rightarrow \wedge x(\alpha \wedge \beta)$ | Tma. deducción            |

Mientras que para la segunda tenemos:

|     |                                                                           |                           |
|-----|---------------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| (1) | $\wedge x(\alpha \wedge \beta)$                                           | Hipótesis                 |
| (2) | $\alpha \wedge \beta$                                                     | EG 1                      |
| (3) | $\alpha$                                                                  | EC 2                      |
| (4) | $\wedge x\alpha$                                                          | IG 3 ( $x$ no libre en 1) |
| (5) | $\beta$                                                                   | EC 2                      |
| (6) | $\wedge x\alpha \wedge \beta$                                             | IC 4, 5                   |
| (7) | $\wedge x(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\wedge x\alpha \wedge \beta)$ | Tma. deducción            |

### Demostremos la octava equivalencia.

Para la primera implicación tenemos:

|     |                                                                             |                           |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| (1) | $\forall x\alpha \wedge \beta$                                              | Hipótesis                 |
| (2) | $\beta$                                                                     | EC 1                      |
| (3) | $\forall x\alpha$                                                           | EC 1                      |
| (4) | $\alpha$                                                                    | EP 3 ( $x$ no libre en 1) |
| (5) | $\alpha \wedge \beta$                                                       | IC 2, 4                   |
| (6) | $\forall x(\alpha \wedge \beta)$                                            | IP 5 ( $x$ no libre)      |
| (7) | $(\forall x\alpha \wedge \beta) \rightarrow \forall x(\alpha \wedge \beta)$ | Tma. deducción            |

Mientras que para la segunda tenemos:

|     |                                                                             |                           |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| (1) | $\forall x(\alpha \wedge \beta)$                                            | Hipótesis                 |
| (2) | $\alpha \wedge \beta$                                                       | EP 1 ( $x$ no libre en 1) |
| (3) | $\beta$                                                                     | EC 2                      |
| (4) | $\alpha$                                                                    | EC 2                      |
| (5) | $\forall x\alpha$                                                           | IP 4                      |
| (6) | $\forall x\alpha \wedge \beta$                                              | IC 3, 5 ( $x$ no libre)   |
| (7) | $\forall x(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\forall x\alpha \wedge \beta)$ | Tma. deducción            |

Con esto finalizamos la demostración. 

## Página 77

**Nota 1:** ... teorema 2.11 ...

Basta aplicar el Teorema 2.11 1) y la regla (SE).

**Nota 2:** ... podemos “meter” el negador ...

El siguiente resultado justifica lo dicho en el texto:

### Metateorema 2.6

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal,  $\pi$  una sucesión finita de cuantificadores y  $\alpha$  una fórmula de  $\mathcal{L}$ . Entonces se cumple que

$$\vdash \neg\pi\alpha \leftrightarrow \pi'\neg\alpha$$

donde  $\pi'$  es la sucesión finita de cuantificadores resultante de cambiar cada cuantificador universal en  $\pi$  por uno existencial y viceversa.

Además, las variables libres en la fórmula  $\pi'\neg\alpha$  son las mismas que en la fórmula  $\pi\alpha$ .

Lo demostraremos por inducción en el número de cuantificadores de  $\pi$ .

Si  $\pi \equiv \bigwedge x$  ( $\pi \equiv \bigvee x$ ) entonces por las reglas (NG) (las reglas (NP)) e (IB) se obtiene que

$$\underbrace{\vdash \neg \bigwedge x \alpha}_{\neg\pi\alpha} \leftrightarrow \underbrace{\bigvee x \neg\alpha}_{\pi'\neg\alpha} \quad \left( \underbrace{\vdash \neg \bigvee x \alpha}_{\neg\pi\alpha} \leftrightarrow \underbrace{\bigwedge x \neg\alpha}_{\pi'\neg\alpha} \right)$$

que es justamente lo deseado. Además, una variable  $y$  estará libre en  $\pi\alpha$  syss  $y \neq x$  e  $y$  está libre en  $\alpha$ , mientras que  $y$  está libre en  $\pi'\neg\alpha$  syss  $y \neq x$  e  $y$  está libre en  $\neg\alpha$ , luego como  $y$  está libre en  $\neg\alpha$  syss  $y$  está libre en  $\alpha$ , concluimos que  $\pi\alpha$  y  $\pi'\neg\alpha$  tienen las mismas variables libres.

Supongamos ahora que el resultado es cierto para cualquier cadena de menos de  $n > 1$  cuantificadores y sea  $\pi$  una cadena de  $n$  cuantificadores. Tenemos entonces que  $\pi \equiv \bigwedge x \epsilon$

o  $\pi \equiv \forall x\epsilon$  con  $\epsilon$  una sucesión finita de  $n - 1$  cuantificadores y basta con ver que

$$\vdash \neg \bigwedge x\epsilon\alpha \leftrightarrow \bigvee x\epsilon'\neg\alpha$$

en el primer caso, y que

$$\vdash \neg \bigvee x\epsilon\alpha \leftrightarrow \bigwedge x\epsilon'\neg\alpha$$

en el segundo.

Para el primer caso tenemos gracias a la hipótesis de inducción (HI):

|      |                                                                               |                    |
|------|-------------------------------------------------------------------------------|--------------------|
| (1)  | $\neg\epsilon\alpha \leftrightarrow \epsilon'\neg\alpha$                      | Tma. lógico (HI)   |
| (2)  | $\bigwedge x (\neg\epsilon\alpha \leftrightarrow \epsilon'\neg\alpha)$        | IG 1               |
| (3)  | $\bigvee x\neg\epsilon\alpha \leftrightarrow \bigvee x\epsilon'\neg\alpha$    | MP 2, Tma. 2.11 7) |
| (4)  | $\neg \bigwedge x\epsilon\alpha$                                              | Hipótesis          |
| (5)  | $\bigvee x\neg\epsilon\alpha$                                                 | NG 4               |
| (6)  | $\bigvee x\epsilon'\neg\alpha$                                                | SE 3, 5            |
| (7)  | $\neg \bigwedge x\epsilon\alpha \rightarrow \bigvee x\epsilon'\neg\alpha$     | Tma. deducción     |
| (8)  | $\bigvee x\epsilon'\neg\alpha$                                                | Hipótesis          |
| (9)  | $\bigvee x\neg\epsilon\alpha$                                                 | SE 3, 8            |
| (10) | $\neg \bigwedge x\epsilon\alpha$                                              | NG 9               |
| (11) | $\bigvee x\epsilon'\neg\alpha \rightarrow \neg \bigwedge x\epsilon\alpha$     | Tma. deducción     |
| (12) | $\neg \bigwedge x\epsilon\alpha \leftrightarrow \bigvee x\epsilon'\neg\alpha$ | IB 7, 11           |

Mientras que para el segundo tenemos por la hipótesis de inducción (HI):

|      |                                                                                |                    |
|------|--------------------------------------------------------------------------------|--------------------|
| (1)  | $\neg\epsilon\alpha \leftrightarrow \epsilon'\neg\alpha$                       | Tma. lógico (HI)   |
| (2)  | $\bigwedge x (\neg\epsilon\alpha \leftrightarrow \epsilon'\neg\alpha)$         | IG 1               |
| (3)  | $\bigwedge x\neg\epsilon\alpha \leftrightarrow \bigwedge x\epsilon'\neg\alpha$ | MP 2, Tma. 2.11 6) |
| (4)  | $\neg \bigvee x\epsilon\alpha$                                                 | Hipótesis          |
| (5)  | $\bigwedge x\neg\epsilon\alpha$                                                | NP 4               |
| (6)  | $\bigwedge x\epsilon'\neg\alpha$                                               | SE 3, 5            |
| (7)  | $\neg \bigvee x\epsilon\alpha \rightarrow \bigwedge x\epsilon'\neg\alpha$      | Tma. deducción     |
| (8)  | $\bigwedge x\epsilon'\neg\alpha$                                               | Hipótesis          |
| (9)  | $\bigwedge x\neg\epsilon\alpha$                                                | SE 3, 8            |
| (10) | $\neg \bigvee x\epsilon\alpha$                                                 | NP 9               |
| (11) | $\bigwedge x\epsilon'\neg\alpha \rightarrow \neg \bigvee x\epsilon\alpha$      | Tma. deducción     |
| (12) | $\neg \bigvee x\epsilon\alpha \leftrightarrow \bigwedge x\epsilon'\neg\alpha$  | IB 7, 11           |

Vemos entonces que en cualquier caso se obtiene lo deseado.

Finalmente, tenemos que una variable  $y$  está libre en  $\bigwedge x\epsilon\alpha$  ( $\bigvee x\epsilon\alpha$ ) syss  $y \neq x$  e  $y$  está libre en  $\epsilon\alpha$ . Igualmente,  $y$  está libre en  $\bigvee x\epsilon'\neg\alpha$  ( $\bigwedge x\epsilon'\neg\alpha$ ) syss  $y \neq x$  e  $y$  está libre en  $\epsilon'\neg\alpha$ . Ahora bien, por hipótesis de inducción tenemos que  $y$  está libre en  $\epsilon\alpha$  syss lo está en  $\epsilon'\neg\alpha$ , luego podemos concluir que  $y$  está libre en  $\bigwedge x\epsilon\alpha$  ( $\bigvee x\epsilon\alpha$ ) syss lo está en  $\bigvee x\epsilon'\neg\alpha$  ( $\bigwedge x\epsilon'\neg\alpha$ ) y que por tanto tienen las mismas variables libres tal y como queríamos ver. 

**Nota 3:** ... teorema 2.9 ...

El siguiente resultado justifica el poder suponer que las variables que liga  $\pi$  no están en  $\pi'\eta$  y viceversa:

### Metateorema 2.7

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal,  $\pi$  una sucesión finita de cuantificadores de modo que las variables que liga son  $x_1, \dots, x_m$ <sup>a</sup>,  $\alpha$  una fórmula de  $\mathcal{L}$  e  $y_1, \dots, y_m$  variables distintas dos a dos que no están en  $\pi\alpha$ . Sea además  $\pi_Y$  la sucesión finita de cuantificadores obtenida de sustituir cada  $x_i$  en  $\pi$  por  $y_i$ . Entonces, existe una fórmula  $\alpha_Y$  para la cual se cumple que

$$\vdash \pi\alpha \leftrightarrow \pi_Y\alpha_Y$$

y de modo que las variables libres de  $\pi_Y\alpha_Y$  son las mismas que las de  $\pi\alpha$ .

Más aún, si  $\alpha$  no tiene cuantificadores y/o descriptores, entonces podemos tomar  $\alpha_Y$  de modo que tampoco los tenga.

<sup>a</sup> Teniendo en cuenta que pueden aparecer varias veces cada una. Por ejemplo, si es  $\pi \equiv \bigwedge x \bigvee y \bigwedge x$  tenemos que las variables que liga  $\pi$  son  $x$  e  $y$ , pero la variable  $x$  aparece ligada dos veces.

Supongamos que  $x_1, \dots, x_m$  son las variables que liga  $\pi$ ,  $z_1, \dots, z_n$  las que liga  $\pi'$  y tomemos  $y_1, \dots, y_m$ ,  $w_1, \dots, w_n$  variables distintas dos a dos que no están en  $\pi\epsilon$  ni en  $\pi'\eta$ . El resultado anterior nos garantiza entonces la existencia de dos fórmulas  $\epsilon_Y$  y  $\eta_W$  que no tendrán cuantificadores ni descriptores (pues  $\epsilon$  y  $\eta$  no los tienen) y de modo que se cumple que

$$\vdash \pi\epsilon \leftrightarrow \pi_Y\epsilon_Y$$

teniendo  $\pi\epsilon$  y  $\pi_Y\epsilon_Y$  las mismas variables libres, y

$$\vdash \pi'\eta \leftrightarrow \pi'_W\eta_W$$

teniendo  $\pi'\eta$  y  $\pi'_W\eta_W$  las mismas variables libres. Tenemos entonces que por la regla (MBB) se cumple que

$$\vdash \gamma \leftrightarrow \pi_Y\epsilon_Y$$

y

$$\vdash \delta \leftrightarrow \pi'_W\eta_W,$$

teniendo además  $\gamma$  las mismas variables libres que  $\pi_Y\epsilon_Y$  y  $\delta$  las mismas que  $\pi'_W\eta_W$  (pues por hipótesis  $\gamma$  tiene las mismas variables libres que  $\pi\epsilon$  y  $\delta$  las mismas que  $\pi'\eta$ ).

Así pues, como  $\pi_Y\epsilon_Y$  y  $\pi'_W\eta_W$  también está en forma prenexa, podemos sustituir en la demostración las fórmulas  $\pi\epsilon$  y  $\pi'\eta$  por  $\pi_Y\epsilon_Y$  y  $\pi'_W\eta_W$  respectivamente, pero la ventaja que tenemos ahora es que, tal y como queríamos, las variables que liga  $\pi_Y$  no están en  $\pi'_W\eta_W$  y viceversa. En efecto, las variables que liga  $\pi_Y$  ( $\pi'_W$ ) son  $y_1, \dots, y_m$  ( $w_1, \dots, w_n$ ) y se tiene que:

- Ningún  $y_i$  ( $w_i$ ) está ligado en  $\pi'_W\eta_W$  ( $\pi_Y\epsilon_Y$ ) pues no están en  $\pi'_W$  ( $\pi_Y$ ) y  $\eta_W$  ( $\epsilon_Y$ ) no tiene variables ligadas al no tener cuantificadores ni descriptores<sup>11</sup>.

- Ningún  $y_i$  ( $w_i$ ) está libre en  $\pi'_W \eta_W$  ( $\pi_Y \epsilon_Y$ ) pues, de ser así, tendríamos que estaría libre en  $\pi' \eta$  ( $\pi \epsilon$ ), pero hemos elegido los  $y_i$  ( $w_i$ ) de modo que no estén en esta fórmula.

Demostremos pues, para finalizar, el Metateorema 2.7.

Lo demostraremos por inducción en el número de cuantificadores de  $\pi$ .

Si  $\pi \equiv \bigwedge x$  ( $\pi \equiv \bigvee x$ ), entonces si  $y$  no está en  $\pi\alpha$ , por el Teorema 2.9 1) (Teorema 2.9 2)) se tiene que basta tomar  $\alpha_Y \equiv S_x^y \alpha$ . En efecto, el Teorema 2.9 garantiza que se cumple la equivalencia buscada, si  $\alpha$  no tiene cuantificadores y/o descriptores entonces  $\alpha_Y$  tampoco los tiene<sup>12</sup> y ambas fórmulas tienen las mismas variables libres pues:

- Una variable  $z$  está libre en  $\pi\alpha$  syss  $z \neq x$  y  $z$  está libre en  $\alpha$ .
- Una variable  $z$  está libre en  $\pi_Y \alpha_Y$  syss  $z \neq y$  y  $z$  está libre en  $S_x^y \alpha$ , lo cual, por el Teorema 1.13 3) (y teniendo en cuenta que  $z \neq y$ ), ocurre syss  $z \neq x$ ,  $z \neq y$  y  $z$  está libre en  $\alpha$ .

Así, si  $z$  está libre en  $\pi\alpha$  se tiene que  $z \neq x$  y  $z$  está libre en  $\alpha$ , luego también  $z \neq y$  (pues  $y$  no está en  $\alpha$ ) y, por lo dicho,  $z$  está libre en  $\pi_Y \alpha_Y$ . Recíprocamente, si  $z$  está libre en  $\pi_Y \alpha_Y$ , por lo dicho se tiene que  $z \neq x$  y que está libre en  $\alpha$ , luego que está libre en  $\pi\alpha$ . Con todo, concluimos que, efectivamente,  $\pi\alpha$  y  $\pi_Y \alpha_Y$  tienen las mismas variables libres.

Supongamos ahora que el resultado es cierto para sucesiones finitas de  $1 \leq k < n$  cuantificadores y veamos que entonces también lo es para sucesiones finitas de  $n$  cuantificadores.

Sea pues  $\pi$  una sucesión de  $n$  cuantificadores que liga las variables  $x_1, \dots, x_m$  e  $y_1, \dots, y_m$  variables distintas dos a dos que no están en  $\pi\alpha$ . Entonces, podemos expresar  $\pi \equiv \Delta x_i \pi'$  con  $\Delta$  el cuantificador universal o existencial,  $i = 1, \dots, m$  y  $\pi'$  una sucesión de  $n - 1$  cuantificadores. Por hipótesis de inducción, tenemos que existe una fórmula  $\alpha'_Y$  de modo que

$$\vdash \pi' \alpha \leftrightarrow \pi'_Y \alpha'_Y \quad (2.39)$$

teniendo  $\pi' \alpha$  y  $\pi'_Y \alpha'_Y$  las mismas variables libres.

Así, por una parte, si aplicamos (IG) a (2.39) y usamos el Teorema 2.11 6)/7) obtenemos que

$$\vdash \Delta x_i \pi' \alpha \leftrightarrow \Delta x_i \pi'_Y \alpha'_Y, \quad (2.40)$$

mientras que, por otra parte, como  $y_i$  no está libre en  $\pi'_Y \alpha'_Y$  (pues no lo está en  $\pi' \alpha$  al no estar en  $\pi\alpha$ ) podemos aplicar el Teorema 2.9 1)/2) (ver Nota 5 pág. 67) y obtener que

$$\vdash \Delta x_i \pi'_Y \alpha'_Y \leftrightarrow \Delta y_i S_{x_i}^{y_i} \pi'_Y \alpha'_Y. \quad (2.41)$$

Distinguiamos entonces dos casos:

<sup>11</sup> En general, una expresión sin descriptores ni cuantificadores no tiene variables ligadas. Esto se ve de manera inmediata por inducción en la longitud de la expresión al no tener las variables ni las constantes variables ligadas.

<sup>12</sup> En general, si una expresión  $\theta$  no tiene cuantificador y/o descriptor, entonces  $S_x^y \theta$  tampoco los tiene. Esto se prueba de forma inmediata por inducción en la longitud de  $\theta$ .

1. Si  $x_i$  no es una variable ligada por  $\pi'$ , entonces  $y_i$  no es una variable ligada por  $\pi'_Y$  y por (1.36) y (1.37) obtenemos que (teniendo en cuenta que  $x_i$  es distinto de cada  $y_j$  pues los  $y_j$  no están en  $\pi\alpha$ )

$$\Delta y_i S_{x_i}^{y_i} \pi'_Y \alpha'_Y \equiv \Delta y_i \pi'_Y S_{x_i}^{y_i} \alpha'_Y \equiv \pi_Y S_{x_i}^{y_i} \alpha'_Y. \quad (2.42)$$

Por tanto, si tomamos  $\alpha_Y \equiv S_{x_i}^{y_i} \alpha'_Y$  se cumplen:

- Teniendo en cuenta que  $\pi\alpha \equiv \Delta x_i \pi' \alpha$  y usando (2.40), (2.41) y (2.42) se concluye que

$$\vdash \pi\alpha \leftrightarrow \pi_Y \alpha_Y.$$

- Si  $z$  es una variable libre de  $\pi\alpha$ , entonces  $z$  es distinta de  $x_i$  y está libre en  $\pi' \alpha$ . Así pues,  $z$  estará libre en  $\pi'_Y \alpha'_Y$ , luego en  $\alpha'_Y$  y al ser  $z \neq x_i$  se tiene que  $z$  está libre en  $\alpha_Y$  (por el Teorema 1.13 3)). Además, también tenemos que por estar  $z$  libre en  $\pi\alpha$  se cumple que  $z$  está libre en  $\alpha$  y esto implica que es también distinta de cada  $y_j$  (pues ningún  $y_j$  está en  $\alpha$ ). Con todo,  $z$  es distinta de cada  $y_j$  y está libre en  $\alpha_Y$ , lo que implica que está libre en  $\pi_Y \alpha_Y$ .
- Si  $z$  es una variable libre de  $\pi_Y \alpha_Y$ , entonces  $z$  es distinta de cada  $y_j$  y está libre en  $\alpha_Y$ . En particular, como  $z$  es distinta de  $y_i$  se tiene que (por el Teorema 1.13 3))  $z \neq x_i$  y está libre en  $\alpha'_Y$ . Esto prueba que  $z$  está libre en  $\pi'_Y \alpha'_Y$ , luego en  $\pi' \alpha$  y, como también es distinta de  $x_i$ , concluimos que  $z$  está libre en  $\pi\alpha$ .
- Si  $\alpha$  no tiene cuantificadores y/o descriptores, por hipótesis de inducción tampoco los tendrá  $\alpha'_Y$  y, por tanto, no los tiene  $\alpha_Y$  (ver la nota al pie 12).

Estos cuatro puntos prueban que  $\alpha_Y$  es la fórmula buscada.

2. Si  $x_i$  es una variable ligada por  $\pi'$ , entonces  $x_i$  no está libre en  $\pi' \alpha$ , luego no lo está en  $\pi'_Y \alpha'_Y$  y se tiene entonces que, por el Teorema 1.13 2),

$$\Delta y_i S_{x_i}^{y_i} \pi'_Y \alpha'_Y \equiv \Delta y_i \pi'_Y \alpha'_Y \equiv \pi_Y \alpha'_Y. \quad (2.43)$$

Por tanto, si tomamos  $\alpha_Y \equiv \alpha'_Y$  se cumplen:

- Teniendo en cuenta que  $\pi\alpha \equiv \Delta x_i \pi' \alpha$  y usando (2.40), (2.41) y (2.43) se concluye que

$$\vdash \pi\alpha \leftrightarrow \pi_Y \alpha_Y.$$

- Si  $z$  es una variable libre de  $\pi\alpha$ , entonces  $z$  es distinta de  $x_i$  y está libre en  $\pi' \alpha$ . Así pues,  $z$  estará libre en  $\pi'_Y \alpha'_Y$ , luego en  $\alpha'_Y \equiv \alpha_Y$ . Además, también tenemos que por estar  $z$  libre en  $\pi\alpha$  se cumple que  $z$  está libre en  $\alpha$  y esto implica que es también distinta de cada  $y_j$  (pues ningún  $y_j$  está en  $\alpha$ ). Con todo,  $z$  es distinta de cada  $y_j$  y está libre en  $\alpha_Y$ , lo que implica que está libre en  $\pi_Y \alpha_Y$ .
- Si  $z$  es una variable libre de  $\pi_Y \alpha_Y$ , entonces  $z$  es distinta de cada  $y_j$  y está libre en  $\alpha_Y \equiv \alpha'_Y$ , luego estará libre en  $\pi'_Y \alpha'_Y$  y, por tanto, en  $\pi' \alpha$ . Así,  $z$  es distinta de cada  $x_j$  (pues  $x_i$  está ligada por  $\pi'$ ) y está libre en  $\alpha$ , lo que implica que está libre en  $\pi\alpha$ .
- Si  $\alpha$  no tiene cuantificadores y/o descriptores, por hipótesis de inducción tampoco los tendrá  $\alpha'_Y \equiv \alpha_Y$ .



Estos cuatro puntos prueban que  $\alpha_Y$  es la fórmula buscada.

En cualquier caso hemos visto que existe la fórmula  $\alpha_Y$  buscada y con ello concluye la inducción y la demostración. 

**Nota 4:** ... teorema 2.11 ...

Basta aplicar la regla (MP) a la conjunción de  $\gamma \leftrightarrow \pi\epsilon$  y  $\delta \leftrightarrow \pi'\neg\delta$  y al Teorema 2.11 2).

**Nota 5:** ... teorema anterior ...

Tenemos las siguientes generalizaciones del Teorema 2.14:

### Metateorema 2.8

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal,  $\alpha, \beta$  fórmulas y  $\pi$  una sucesión finita de cuantificadores de modo que las variables que liga no están libres en  $\alpha$ . Entonces se cumple que

$$\vdash (\alpha \rightarrow \pi\beta) \leftrightarrow \pi(\alpha \rightarrow \beta).$$

### Metateorema 2.9

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal,  $\alpha, \beta$  fórmulas y  $\pi$  una sucesión finita de cuantificadores de modo que las variables que liga no están libres en  $\beta$ . Entonces se cumple que

$$\vdash (\pi\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow \pi'(\alpha \rightarrow \beta)$$

donde  $\pi'$  es la sucesión finita de cuantificadores resultante de cambiar cada cuantificador universal en  $\pi$  por uno existencial y viceversa.

Como las variables que liga  $\pi'$  no están en  $\pi\epsilon$  podemos aplicar el Metateorema 2.8 y obtener que

$$\vdash (\pi\epsilon \rightarrow \pi'\eta) \leftrightarrow \pi'(\pi\epsilon \rightarrow \eta),$$

luego usando la regla (MBB) obtenemos que, en efecto,

$$\vdash \alpha \leftrightarrow \pi'(\pi\epsilon \rightarrow \eta).$$

Por otra parte, como las variables que liga  $\pi$  no están en  $\eta$  podemos aplicar el Metateorema 2.9 y obtener que

$$\vdash (\pi\epsilon \rightarrow \eta) \leftrightarrow \pi''(\epsilon \rightarrow \eta)$$

donde  $\pi''$  es la sucesión finita de cuantificadores resultante de cambiar cada cuantificador universal en  $\pi$  por uno existencial y viceversa.

Demostremos pues el Metateorema 2.8.

Lo demostraremos por inducción en el número de cuantificadores en  $\pi$ .

Si es  $\pi \equiv \bigwedge x$  ( $\pi \equiv \bigvee x$ ), entonces el resultado no es más que el Teorema 2.14 1) (Teorema 2.14 2)).

Supongamos pues que es cierto para cada sucesión de  $1 \leq k < n$  cuantificadores y veamos que entonces también lo es para cualquier sucesión de  $n$  cuantificadores.

Sea pues  $\pi$  una sucesión de  $n$  cuantificadores de modo que las variables que liga no están libres en  $\alpha$ . Podemos entonces expresarla como  $\pi \equiv \Delta x \epsilon$  con  $\Delta$  el cuantificador existencial o universal y  $\epsilon$  una sucesión de  $n - 1$  cuantificadores.

Así, como  $x$  no está libre en  $\alpha$ , por el Teorema 2.14 1)/2) tenemos que

$$\vdash (\alpha \rightarrow \pi\beta) \leftrightarrow \Delta x (\alpha \rightarrow \epsilon\beta). \quad (2.44)$$

Por otra parte, como las variables que liga  $\epsilon$  tampoco estarán libres en  $\alpha$ , por hipótesis de inducción obtenemos que

$$\vdash (\alpha \rightarrow \epsilon\beta) \leftrightarrow \epsilon(\alpha \rightarrow \beta). \quad (2.45)$$

Aplicando (IG) a (2.45) y usando el Teorema 2.11 6)/7) se tiene que

$$\vdash \Delta x (\alpha \rightarrow \epsilon\beta) \leftrightarrow \pi (\alpha \rightarrow \beta), \quad (2.46)$$

y usando la regla (MBB) con (2.44) y (2.46) concluimos que

$$\vdash (\alpha \rightarrow \pi\beta) \leftrightarrow \pi (\alpha \rightarrow \beta)$$

tal como buscábamos demostrar.

Esto concluye la inducción y con ello la demostración. 

Finalmente, demostremos el Metateorema 2.9.

Lo demostraremos por inducción en el número de cuantificadores en  $\pi$ .

Si es  $\pi \equiv \bigwedge x (\pi \equiv \bigvee x)$ , entonces el resultado no es más que el Teorema 2.14 3) (Teorema 2.14 4)).

Supongamos pues que es cierto para cada sucesión de  $1 \leq k < n$  cuantificadores y veamos que entonces también lo es para cualquier sucesión de  $n$  cuantificadores.

Sea pues  $\pi$  una sucesión de  $n$  cuantificadores de modo que las variables que liga no están libres en  $\beta$ . Podemos entonces expresarla como  $\pi \equiv \Delta x \epsilon$  con  $\Delta$  el cuantificador existencial o universal y  $\epsilon$  una sucesión de  $n - 1$  cuantificadores.

Así, como  $x$  no está libre en  $\beta$ , por el Teorema 2.14 3)/4) tenemos que

$$\vdash (\pi\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow \Delta' x (\epsilon\alpha \rightarrow \beta) \quad (2.47)$$

siendo  $\Delta'$  el cuantificador “contrario” a  $\Delta$ .

Por otra parte, como las variables que liga  $\epsilon$  tampoco estarán libres en  $\beta$ , por hipótesis de inducción obtenemos que

$$\vdash (\epsilon\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow \epsilon' (\alpha \rightarrow \beta) \quad (2.48)$$

siendo  $\epsilon'$  la sucesión finita de cuantificadores resultante de cambiar cada cuantificador universal en  $\epsilon$  por uno existencial y viceversa.

Aplicando (IG) a (2.48) y usando el Teorema 2.11 6)/7) se tiene que (teniendo también en cuenta que  $\pi' \equiv \Delta' x \epsilon'$ )

$$\vdash \Delta' x (\epsilon\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow \pi' (\alpha \rightarrow \beta), \quad (2.49)$$

y usando la regla (MBB) con (2.47) y (2.49) concluimos que

$$\vdash (\pi\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow \pi'(\alpha \rightarrow \beta)$$

tal como buscábamos demostrar.

Esto concluye la inducción y con ello la demostración. 

**Nota 6:** Por (IG) y 2.11 ...

El siguiente resultado, que es una generalización del Teorema 2.11 6) y 7), justifica lo dicho en el texto:

### Metateorema 2.10

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal,  $\pi$  una sucesión finita de cuantificadores y  $\alpha, \beta$  dos fórmulas equivalentes de  $\mathcal{L}$ . Entonces se cumple que

$$\vdash \pi\alpha \leftrightarrow \pi\beta.$$

Lo demostraremos por inducción en el número de cuantificadores de  $\pi$ .

Si  $\pi \equiv \wedge x$  ( $\pi \equiv \forall x$ ) entonces tenemos

- (1)  $\alpha \leftrightarrow \beta$  Tma. lógico
- (2)  $\wedge x (\alpha \leftrightarrow \beta)$  IG 1
- (3)  $\wedge x \alpha \leftrightarrow \wedge x \beta$  MP 2, Tma. 2.11 6)
- ((3)  $\forall x \alpha \leftrightarrow \forall x \beta$  MP 2, Tma. 2.11 7))

que es justamente lo deseado.

Supongamos ahora que el resultado es cierto para cualquier cadena de menos de  $n > 1$  cuantificadores y sea  $\pi$  una cadena de  $n$  cuantificadores. Entonces,  $\pi \equiv \wedge x \epsilon$  ( $\pi \equiv \forall x \epsilon$ ) con  $\epsilon$  una sucesión finita de  $n - 1$  cuantificadores y por la hipótesis de inducción (HI) tenemos

- (1)  $\epsilon\alpha \leftrightarrow \epsilon\beta$  Tma. lógico (HI)
- (2)  $\wedge x (\epsilon\alpha \leftrightarrow \epsilon\beta)$  IG 1
- (3)  $\wedge x \epsilon\alpha \leftrightarrow \wedge x \epsilon\beta$  MP 2, Tma. 2.11 6)
- ((3)  $\forall x \epsilon\alpha \leftrightarrow \forall x \epsilon\beta$  MP 2, Tma. 2.11 7))

que es justamente lo deseado. 

**Nota 7:** ... y por 2.11 ...

Basta aplicar la regla (MP) a  $\wedge x (\gamma \leftrightarrow \pi\delta)$  y al Teorema 2.11 6).

**Nota 8:** Es fácil comprobar ...

Veámoslo caso por caso:

- Si  $\alpha \equiv R_i^n t_1 \cdots t_n$  se ha visto que  $\beta \equiv \alpha$  y es claro que tienen las mismas variables libres.
- Si  $\alpha \equiv \neg \gamma$  se ha visto que  $\beta \equiv \pi' \neg \delta$  donde  $\pi \delta$  tiene las mismas variables libres que  $\gamma$ , luego que  $\alpha$ . Como por el Metateorema 2.6 se tiene que  $\beta$  también tiene las mismas variables libres que  $\pi \delta$ , concluimos con que, en efecto,  $\beta$  tiene las mismas variables libres que  $\alpha$ .
- Si  $\alpha \equiv \gamma \rightarrow \delta$  se ha visto que  $\beta \equiv \pi' \pi'' (\epsilon \rightarrow \eta)$  donde  $\pi \epsilon$  tiene las mismas variables libres que  $\gamma$  y  $\pi' \eta$  tiene las mismas variables libres que  $\delta$ . Además, también hemos visto que las variables que liga  $\pi$  no están en  $\pi' \eta$  y viceversa.

Así, si  $x$  está libre en  $\alpha$  lo estará en  $\gamma$  o  $\delta$ , luego en  $\pi \epsilon$  o en  $\pi' \eta$ . Supongamos pues que lo está en  $\pi \epsilon$  ( $\pi' \eta$ ). Tenemos entonces que  $x$  no es una variable ligada por  $\pi$  (por  $\pi'$ ) y que está libre en  $\epsilon$  ( $\eta$ ). Además,  $x$  no está ligada por  $\pi'$  ( $\pi$ ) pues en dicho caso no estaría en  $\pi \epsilon$  ( $\pi' \eta$ ) contradiciendo que está libre en  $\epsilon$  ( $\eta$ ). Con todo,  $x$  no está ligada por  $\pi' \pi''$  y está libre en  $\epsilon$  ( $\eta$ ), luego lo está en  $\beta$ .

Recíprocamente, si  $x$  está libre en  $\beta$ , entonces no queda ligada ni por  $\pi''$ , luego por  $\pi$ , ni por  $\pi'$  y está libre en  $\epsilon \rightarrow \eta$ , luego está libre en  $\epsilon$  o en  $\eta$ . Tenemos entonces que  $x$  está libre en  $\pi \epsilon$  o en  $\pi' \eta$ , luego en  $\gamma$  o en  $\delta$  y con ello en  $\alpha$ .

- Si  $\alpha \equiv \wedge x \gamma$  se ha visto que  $\beta \equiv \wedge x \pi \delta$  donde  $\pi \delta$  tiene las mismas variables libres que  $\gamma$ .

Así, si  $y$  está libre en  $\alpha$  se tiene que  $y \neq x$  e  $y$  está libre en  $\gamma$ , luego en  $\pi \delta$  y, por tanto, lo estará en  $\beta$ . Recíprocamente, si  $y$  está libre en  $\beta$ , entonces  $y \neq x$  e  $y$  está libre en  $\pi \delta$ , luego en  $\gamma$ , y concluimos que también lo está en  $\alpha$ .

**Nota 9:** ... condiciones siguientes ...

Como en el comentario tras la Definición 1.8, lo dicho en la **Nota pág. 24** y en la **Nota pág. 31**, la definición dada queda completamente determinada para cada expresión por las reglas dadas.

Si  $\theta$  es una expresión sabemos que existe una sucesión  $\theta_0, \dots, \theta_m$  tal que  $\theta_m \equiv \theta$  y cada  $\theta_i$  depende únicamente de los  $\theta_j$  anteriores en el sentido de la Definición 1.5. Por tanto, si conocemos  $\theta'_0, \dots, \theta'_{i-1}$ , usando las reglas dadas (teniendo en cuenta que  $\theta_i$  será uno de los posibles ocho tipos de expresiones y que los términos o fórmulas que aparezcan en ella estarán entre  $\theta_0, \dots, \theta_{i-1}$ ) podemos determinar  $\theta'_i$ . Como  $\theta_0$  es una variable o una constante (ver **Nota pág. 17**) siempre podemos empezar el proceso y determinar sucesivamente  $\theta'_0, \theta'_1$ , etc. hasta llegar a  $\theta'_m \equiv \theta'$ .

## Página 78

**Nota 1:** ... sustituir cada variable ligada ...

Aquí hay que entender que por “variable ligada” no se hace referencia a que la variable  $x_i$  esté ligada en la fórmula, sino a que una aparición concreta de la variable en la fórmula  $\theta$  “aparece ligada”. Veamos a que nos referimos con un ejemplo.

Si tenemos la fórmula

$$\theta \equiv (x = y \rightarrow \bigvee xy x = y) \equiv (x = y \rightarrow \neg \bigwedge xy \neg(x = y)),$$

se tiene que tanto  $x$  como  $y$  aparecen ligadas en  $\theta$ , pero también aparecen libres. Las “ $x$ ” que atestiguan que  $x$  aparece ligada son las que aparecen tras el generalizador y lo mismo para la variable  $y$ .

Observemos entonces que al calcular  $\theta'$  (respecto a nuevas variables  $u, v$  asociadas a  $x$  e  $y$  respectivamente) obtenemos que<sup>13</sup>

$$\theta' \equiv x = y \rightarrow \bigvee uv u = v,$$

luego tal y como decíamos las únicas variables que han sido sustituidas son las que están bajo el “alcance” de un cuantificador, las que “aparecen ligadas”, es decir, las que atestiguan que dichas variables están ligadas en la fórmula.

Repitámoslo una vez más:  $\theta'$  es la expresión resultante de sustituir las variables  $x_0, \dots, x_k$  que aparecen ligadas por las nuevas variables  $u_0, \dots, u_k$ , no simplemente el resultado de sustituir las variables ligadas sin más.

Como se ve más adelante en el texto (concretamente en el Teorema 2.16), la ventaja de este proceder es que podemos obtener fórmulas equivalentes donde las variables ligadas sean las que queramos, pero manteniendo las mismas variables libres. Lo importante de este resultado es que permite probar que si definimos lenguajes de primer orden con dos juegos de variables distintos y disjuntos, uno para variables libres y otro para variables ligadas (lo cual es necesario para el cálculo secuencial), el cálculo deductivo que se desarrolla con dichos lenguajes es equivalente al visto aquí (ver [Ivoa, Teorema 3.20]).

Pasemos ahora a precisar el concepto de “variable que aparece ligada”:

### Definición 2.11: Aparición ligada de una variable en una expresión

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal y  $\theta$  una expresión del mismo. Diremos que una variable  $x$  **aparece ligada** en la posición  $i$ -ésima de  $\theta$  si  $s_i \equiv x^a$  y se puede probar que lo está a partir de las reglas siguientes:

- (i)  $x$  nunca aparece ligada en ninguna posición de  $x_i$ .
- (ii)  $x$  nunca aparece ligada en ninguna posición de  $c_i$ .
- (iii)  $x$  aparece ligada en la posición  $i$ -ésima de  $R_i^n t_1 \dots t_n$  syss está en en la posición  $k$ -ésima de cierto  $t_j$  y  $x$  aparece ligada en la posición  $k$ -ésima de  $t_j$ .

<sup>13</sup> En efecto, tenemos:

|                                                                                                     |                                                                                                           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\theta_0 \equiv x$                                                                                 | $\theta'_0 \equiv x$                                                                                      |
| $\theta_1 \equiv y$                                                                                 | $\theta'_1 \equiv y$                                                                                      |
| $\theta_2 \equiv x = y \ (\theta_0 = \theta_1)$                                                     | $\theta'_2 \equiv x = y$                                                                                  |
| $\theta_3 \equiv \neg(x = y) \ (\neg\theta_2)$                                                      | $\theta'_3 \equiv \neg(x = y)$                                                                            |
| $\theta_4 \equiv \bigwedge y \neg(x = y) \ (\bigwedge y \theta_3)$                                  | $\theta'_4 \equiv \bigwedge v \neg(x = v)$                                                                |
| $\theta_5 \equiv \bigwedge x \bigwedge y \neg(x = y) \ (\bigwedge x \theta_4)$                      | $\theta'_5 \equiv \bigwedge u S_x^u \theta'_4 \equiv \bigwedge u \bigwedge v \neg(u = v)$                 |
| $\theta_6 \equiv \neg \bigwedge xy \neg(x = y) \ (\neg\theta_5)$                                    | $\theta'_6 \equiv \neg \bigwedge uv \neg(u = v)$                                                          |
| $\theta_7 \equiv x = y \rightarrow \neg \bigwedge xy \neg(x = y) \ (\theta_2 \rightarrow \theta_6)$ | $\theta'_7 \equiv \theta'_2 \rightarrow \theta'_6 \equiv x = y \rightarrow \neg \bigwedge uv \neg(u = v)$ |

- (iv)  $x$  aparece ligada en la posición  $i$ -ésima de  $f_i^n t_1 \cdots t_n$  syss está en en la posición  $k$ -ésima de cierto  $t_j$  y  $x$  aparece ligada en la posición  $k$ -ésima de  $t_j$ .
- (v)  $x$  aparece ligada en la posición  $i$ -ésima de  $\neg\alpha$  syss  $x$  aparece ligada en la posición  $(i - 1)$ -ésima de  $\alpha$ .
- (vi)  $x$  aparece ligada en la posición  $i$ -ésima de  $\rightarrow \alpha\beta$  syss o bien  $s_i$  está en la posición  $k$ -ésima de  $\alpha$  y  $x$  aparece ligada en la posición  $k$ -ésima de  $\alpha$ , o bien  $s_i$  está en la posición  $k$ -ésima de  $\beta$  y  $x$  aparece ligada en la posición  $k$ -ésima de  $\beta$ .
- (vii)  $x$  aparece ligada en la posición  $i$ -ésima de  $\wedge x_i \alpha$  syss  $x \equiv x_i$  o  $x$  aparece ligada en la posición  $(i - 2)$ -ésima de  $\alpha$ .
- (viii)  $x$  aparece ligada en la posición  $i$ -ésima de  $|x_i \alpha$  syss  $x \equiv x_i$  o  $x$  aparece ligada en la posición  $(i - 2)$ -ésima de  $\alpha$ .

<sup>a</sup> Denotamos por  $s_i$  el  $i$ -ésimo símbolo de  $\theta$ .

Veamos que la definición dada queda completamente determinada para cada expresión por las reglas dadas.

Dada una expresión  $\theta$  sabemos que será de uno de los 8 tipos listados y tendrá una longitud  $n$  perfectamente determinada.

Si  $s_i \neq x$  entonces  $x$  no aparecerá ligada en la posición  $i$ -ésima pues que  $s_i$  sea  $x$  es una condición necesaria en la definición.

En particular, si  $i > n$ , entonces  $x$  nunca aparecerá ligada en la posición  $i$ -ésima pues nunca se puede cumplir que  $s_i \equiv x$ .

Por otra parte, si  $i \leq n$  y  $s_i \equiv x$  podemos distinguir seis casos:

1. Si  $\theta$  es una constante o una variable podemos concluir que  $x$  no aparece ligada en la posición  $i$ -ésima de  $\theta$ .
2. Si  $\theta \equiv \wedge x_i \alpha$  o  $\theta \equiv |x_i \alpha$  y  $x \equiv x_i$ , entonces podemos concluir que aparece ligada en la posición  $i$ -ésima de  $\theta$ .
3. Si  $\theta \equiv \wedge x_i \alpha$  o  $\theta \equiv |x_i \alpha$  y  $x \neq x_i$ , entonces la regla nos dice que veamos si  $x$  aparece ligada en la posición  $(i - 2)$ -ésima de  $\alpha$ .
4. Si  $\theta \equiv R_i^n t_1 \cdots t_n$  o  $\theta \equiv f_i^n t_1 \cdots t_n$  y  $s_i$  está en  $t_j$ , entonces podemos calcular la posición de  $s_i$  dentro de  $t_j$ , digamos que es  $k$ , y la regla nos dice que veamos si  $x$  aparece ligada en la posición  $k$ -ésima de  $t_j$ .
5. Si  $\theta \equiv \neg\alpha$ , entonces la regla nos dice que veamos si  $x$  aparece ligada en la posición  $(i - 1)$ -ésima de  $\alpha$ .
6. Si  $\theta \equiv \rightarrow \alpha\beta$ , entonces podemos calcular la posición de  $s_i$  dentro de  $\alpha$  o de  $\beta$  según esté en una u otra, digamos que es  $k$ , y la regla nos dice que veamos si  $x$  aparece ligada en la posición  $k$ -ésima de  $\alpha$  o  $\beta$  según sea el caso.

Observemos que, tras realizar este proceso, o bien las reglas nos permiten concluir que  $x$  aparece o no ligada en la posición  $i$ -ésima de  $\theta$ , o bien nos remiten a comprobarlo para una expresión de menor longitud, luego el proceso terminará en a lo sumo  $n$  iteraciones del procedimiento. Además, siempre decidirá si  $x$  aparece o no ligada en la posición  $i$ -ésima de  $\theta$  pues al ir reduciendo la longitud de las subexpresiones, o bien en algún momento del proceso entramos en el punto 2), o bien llegamos a una subexpresión de longitud 1 que únicamente puede ser una variable o una constante y finalmente entramos en el punto 1).

Ilustremos el proceso con un ejemplo.

Para la expresión

$$\theta \equiv (x = y \rightarrow \neg \bigwedge xy \neg(x = y)) \equiv (\rightarrow = xy \neg \bigwedge x \bigwedge y \neg = xy)$$

es claro que  $x$  no aparece ligada en la posición 2, pero que si lo hace en la posición 6 e  $y$  aparece ligada en la posición 12.

En efecto, tenemos que  $s_2 \equiv x$ , luego sigamos las reglas de la Definición 2.11:

1. Como  $\theta$  es de la forma  $\rightarrow \alpha\beta$ , identificamos que  $\alpha \equiv = xy$ ,  $\beta \equiv \neg \bigwedge x \bigwedge y \neg = xy$  y que  $s_2$  aparece en la posición 1 de  $\alpha$ . Debemos entonces comprobar si  $x$  aparece ligada en la posición 1 de  $\alpha$ .
2. Como  $\alpha$  es de la forma  $R_i^2 t_1 t_2$ , identificamos que  $t_1 \equiv x$ ,  $t_2 \equiv y$  y que  $s_1$  aparece en la posición 0 de  $t_1$ . Debemos entonces comprobar si  $x$  aparece ligada en la posición 0 de  $t_1$ .
3. Como  $t_1$  es una variable concluimos que  $x$  no aparece ligada en la posición 2 de  $\theta$ .

Por otra parte, para la posición 6 tenemos que  $s_6 \equiv x$  y siguiendo las reglas de la Definición 2.11 obtenemos:

1. Como  $\theta$  es de la forma  $\rightarrow \alpha\beta$ , identificamos que  $\alpha \equiv = xy$ ,  $\beta \equiv \neg \bigwedge x \bigwedge y \neg = xy$  y que  $s_6$  aparece en la posición 2 de  $\beta$ . Debemos entonces comprobar si  $x$  aparece ligada en la posición 2 de  $\beta$ .
2. Como  $\beta$  es de la forma  $\neg \alpha$ , identificamos que  $\alpha \equiv \bigwedge x \bigwedge y \neg = xy$  y debemos entonces comprobar si  $x$  aparece ligada en la posición 1 de  $\alpha$ .
3. Como  $\alpha$  es de la forma  $\bigwedge x_i \gamma$  con  $x \equiv x_i$  concluimos que  $x$  aparece ligada en la posición 6 de  $\theta$ .

Finalmente, para la posición 12 tenemos que  $s_{12} \equiv y$  y siguiendo como antes obtenemos:

1. Como  $\theta$  es de la forma  $\rightarrow \alpha\beta$ , identificamos que  $\alpha \equiv = xy$ ,  $\beta \equiv \neg \bigwedge x \bigwedge y \neg = xy$  y que  $s_{12}$  aparece en la posición 8 de  $\beta$ . Debemos entonces comprobar si  $y$  aparece ligada en la posición 8 de  $\beta$ .
2. Como  $\beta$  es de la forma  $\neg \alpha$ , identificamos que  $\alpha \equiv \bigwedge x \bigwedge y \neg = xy$  y debemos entonces comprobar si  $y$  aparece ligada en la posición 7 de  $\alpha$ .
3. Como  $\alpha$  es de la forma  $\bigwedge x_i \gamma$  con  $y \neq x_i$ , identificamos que  $\gamma \equiv \bigwedge y \neg = xy$  y debemos entonces comprobar si  $y$  aparece ligada en la posición 5 de  $\gamma$ .

4. Como  $\gamma$  es de la forma  $\wedge x_i \alpha$  con  $y \equiv x_i$  concluimos que  $y$  aparece ligada en la posición 12 de  $\theta$ .

Pasemos ya a enunciar el resultado esperado sobre  $\theta'$ :

### Metateorema 2.12

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal,  $\theta$  una expresión,  $x_0, \dots, x_k$  variables entre las cuales están las variables ligadas de  $\theta$  y  $u_0, \dots, u_k$  variables distintas de las  $x_i$  que no están en  $\theta$ . Se cumple que  $\theta'$  es la expresión resultante de sustituir cada aparición ligada de  $x_i$  en  $\theta$  por la variable  $u_i$ .

Para probar este resultado necesitamos algunos resultados previos.

El primero de ellos es simplemente la observación de que si una variable  $x$  aparece ligada en una expresión  $\theta$ , entonces dicha variable está ligada en  $\theta$  y viceversa. Esto es de esperar pues la Definición 2.11 se hace teniendo en cuenta que las apariciones ligadas de una variable son los “testigos” de que dicha variable está ligada en la expresión.

### Metateorema 2.13

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal y  $\theta$  una expresión. Una variable  $x$  aparece ligada en alguna posición de  $\theta$  si, y solo si,  $x$  está ligada en  $\theta$ .

Lo demostraremos por inducción en la longitud de  $\theta$ .

- Si  $\theta$  es una variable o una constante, entonces ninguna variable aparece ligada en  $\theta$  ni tampoco está ligada en  $\theta$  con lo que el resultado es trivialmente cierto.
- Si  $\theta \equiv R_i^n t_1 \cdots t_n$  y  $x$  aparece ligada en  $\theta$ , entonces aparece ligada en alguno de los  $t_j$ . Por hipótesis de inducción tenemos entonces que  $x$  está ligada en  $t_j$  y con ello lo está en  $\theta$ .

Recíprocamente, si  $x$  está ligada en  $\theta$ , entonces está ligada en alguno de los  $t_j$  y, por hipótesis de inducción, aparecerá ligada en alguna posición de dicho  $t_j$ , luego aparece ligada en  $\theta$ .

- Si  $\theta \equiv f_i^n t_1 \cdots t_n$  es análogo al caso anterior.
- Si  $\theta \equiv \neg \alpha$  se tiene que  $x$  aparece ligada en  $\theta$  syss  $x$  aparece ligada en  $\alpha$ , luego por hipótesis de inducción syss está ligada en  $\alpha$  y así syss está ligada en  $\theta$ .
- Si  $\theta \equiv \rightarrow \alpha \beta$  y  $x$  aparece ligada en  $\theta$  entonces  $x$  aparece ligada en  $\alpha$  o en  $\beta$ . Por hipótesis de inducción tenemos entonces que  $x$  está ligada en  $\alpha$  o en  $\beta$  y en cualquier caso concluimos que lo está en  $\theta$ .

Recíprocamente, si  $x$  está ligada en  $\theta$  entonces  $x$  está ligada en  $\alpha$  o en  $\beta$ , luego por hipótesis de inducción aparece ligada en  $\alpha$  o en  $\beta$  y en cualquier caso concluimos que aparece ligada en alguna posición de  $\theta$ .

- Si  $\theta \equiv \wedge x_i \alpha$  y  $x$  aparece ligada en  $\theta$  tenemos dos opciones:
  - O bien  $x \equiv x_i$  y, por tanto,  $x$  está ligada en  $\theta$ .



- O bien  $x$  aparece ligada en  $\alpha$ , luego por hipótesis de inducción está ligada en  $\alpha$  y con ello en  $\theta$ .

En cualquier caso vemos que, en efecto,  $x$  está ligada en  $\theta$ .

Recíprocamente, si  $x$  está ligada en  $\theta$  tenemos también dos opciones:

- O bien  $x \equiv x_i$  y, por tanto,  $x$  aparece ligada en alguna posición de  $\theta$ .
- O bien  $x$  está ligada en  $\alpha$ , luego por hipótesis de inducción aparece ligada en  $\alpha$  y con ello en  $\theta$ .

En cualquier caso vemos que, en efecto,  $x$  aparece ligada en alguna posición  $\theta$ .

- Si  $\theta \equiv |x_i\alpha$  es análogo al caso anterior.

Esto concluye la inducción y con ello la demostración. 

El segundo resultado que veremos será un resultado técnico destinado a demostrar el teorema principal.

### Metateorema 2.14

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal,  $\theta$  una expresión,  $x_0, \dots, x_k$  variables entre las cuales están las variables ligadas de  $\theta$  y  $u_0, \dots, u_k$  variables distintas de las  $x_i$  que no están en  $\theta$ . Entonces, para cualesquiera índices  $i_1, \dots, i_r$  entre  $0, \dots, k$  se cumple que

$$S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta'$$

es la expresión resultante de sustituir cada aparición de  $x_{i_j}$  en  $\theta'$  por  $u_{i_j}$ .

Lo demostraremos por inducción en la longitud de  $\theta$ .

- Si  $\theta \equiv y_i$  entonces  $\theta' \equiv y_i$  y tenemos dos opciones:

- Si  $y_i \equiv x_{i_j}$  para algún  $j = 1, \dots, r$ , entonces

$$S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta' \equiv u_{i_j}$$

y claramente se cumple lo deseado.

- Si  $y_i$  es distinto de cada  $x_{i_j}$ , entonces

$$S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta' \equiv y_i$$

e igualmente se cumple lo deseado.

- Si  $\theta \equiv c_i$ , entonces  $S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta' \equiv c_i$  y el resultado es trivialmente cierto.
- Si  $\theta \equiv R_i^n t_1 \dots t_n$ , entonces las variables ligadas de cada  $t_j$  están entre  $x_0, \dots, x_k$ . Por tanto, por hipótesis de inducción tenemos que cada término  $S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} t'_j$  es la expresión resultante de sustituir cada aparición de  $x_{i_l}$  en  $t'_j$  por  $u_{i_l}$  y, como

$$\theta' \equiv R_i^n t'_1 \dots t'_n$$

y

$$S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta' \equiv R_i^n S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} t'_1 \dots S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} t'_n,$$

queda claro que se cumple lo deseado.

- Si  $\theta \equiv f_i^n t_1 \cdots t_n$  es análogo al caso anterior.
- Si  $\theta \equiv \neg \alpha$ , entonces las variables ligadas de  $\alpha$  están entre  $x_0, \dots, x_k$ . Por tanto, por hipótesis de inducción tenemos que  $S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \cdots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \alpha'$  es la expresión resultante de sustituir cada aparición de  $x_{i_j}$  en  $\alpha'$  por  $u_{i_j}$  y, como

$$\theta' \equiv \neg \alpha'$$

y

$$S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \cdots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta' \equiv \neg S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \cdots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \alpha',$$

queda claro que se cumple lo deseado.

- Si  $\theta \equiv \alpha \rightarrow \beta$ , entonces las variables ligadas de  $\alpha$  y de  $\beta$  están entre  $x_0, \dots, x_k$ . Por tanto, por hipótesis de inducción tenemos que  $S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \cdots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \alpha'$  es la expresión resultante de sustituir cada aparición de  $x_{i_j}$  en  $\alpha'$  por  $u_{i_j}$  y lo mismo para  $S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \cdots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \beta'$ . Como

$$\theta' \equiv \alpha' \rightarrow \beta'$$

y

$$S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \cdots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta' \equiv S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \cdots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \alpha' \rightarrow S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \cdots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \beta',$$

queda claro que se cumple lo deseado.

- Si  $\theta \equiv \bigwedge x_i \alpha$ , entonces las variables ligadas de  $\alpha$  están entre  $x_0, \dots, x_k$ . Por tanto, por hipótesis de inducción tenemos que  $S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \cdots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} S_{x_i}^{u_i} \alpha'$  es la expresión resultante de sustituir cada aparición de  $x_{i_j}$  en  $\alpha'$  por  $u_{i_j}$  y de sustituir cada aparición de  $x_i$  por  $u_i$ . De igual modo,  $S_{x_i}^{u_i} \alpha'$  es la expresión resultante de sustituir cada aparición de  $x_i$  en  $\alpha'$  por  $u_i$ , luego de estos dos hechos podemos concluir que

$$S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \cdots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} S_{x_i}^{u_i} \alpha'$$

es la expresión resultante de sustituir cada aparición de  $x_{i_j}$  en  $S_{x_i}^{u_i} \alpha'$  por  $u_{i_j}$ <sup>14</sup>. Con todo, como

$$\theta' \equiv \bigwedge u_i S_{x_i}^{u_i} \alpha'$$

y por lo visto en la demostración del primer resultado de la página 78 es

$$S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \cdots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta' \equiv \bigwedge u_i S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \cdots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} S_{x_i}^{u_i} \alpha',$$

queda claro que se cumple lo deseado.

- Si  $\theta \equiv x_i | \alpha$  es análogo al caso anterior.

Esto concluye la inducción y con ello la demostración. 

El último resultado que necesitamos nos asegura que la expresión  $\theta'$  tiene la misma longitud que la expresión original.

<sup>14</sup> Observemos que aunque algún  $i_j \equiv i$  lo dicho sigue siendo cierto, pues simplemente a la hora de sustituir  $x_{i_j}$  por  $u_{i_j}$  en  $S_{x_i}^{u_i} \alpha'$  obtenemos la misma expresión (ya que  $x_i$  no aparece en  $S_{x_i}^{u_i} \alpha'$  pues ya la hemos sustituido por  $u_i$ ).

**Metateorema 2.15**

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal,  $\theta$  una expresión,  $x_0, \dots, x_k$  variables entre las cuales están las variables ligadas de  $\theta$  y  $u_0, \dots, u_k$  variables distintas de las  $x_i$  que no están en  $\theta$ . Entonces, la longitud de  $\theta'$  es la misma que la de  $\theta$ .

Lo demostraremos por inducción en la longitud de  $\theta$ .

- Si  $\theta \equiv y_i$  entonces  $\theta' \equiv y_i$  y el resultado es claro.
- Si  $\theta \equiv c_i$  entonces  $\theta' \equiv c_i$  y el resultado es claro.
- Si  $\theta \equiv R_i^n t_1 \cdots t_n$ , entonces las variables ligadas de cada  $t_j$  están entre  $x_0, \dots, x_k$  con lo que, por hipótesis de inducción, la longitud de cada  $t'_j$  es la misma que la de  $t_j$ . Como  $\theta' \equiv R_i^n t'_1 \cdots t'_n$  es claro que se cumple lo deseado.
- Si  $\theta \equiv f_i^n t_1 \cdots t_n$  es análogo al caso anterior.
- Si  $\theta \equiv \neg \alpha$ , entonces las variables ligadas de  $\alpha$  están entre  $x_0, \dots, x_k$  con lo que, por hipótesis de inducción, la longitud de  $\alpha'$  es la misma que la de  $\alpha$ . Como  $\theta' \equiv \neg \alpha'$  es claro que se cumple lo deseado.
- Si  $\theta \equiv \alpha \rightarrow \beta$ , entonces las variables ligadas de  $\alpha$  y las de  $\beta$  están entre  $x_0, \dots, x_k$  con lo que, por hipótesis de inducción, la longitud de  $\alpha'$  es la misma que la de  $\alpha$  y la de  $\beta'$  es la misma que la de  $\beta$ . Como  $\theta' \equiv \alpha' \rightarrow \beta'$  es claro que se cumple lo deseado.
- Si  $\theta \equiv \bigwedge x_i \alpha$ , entonces las variables ligadas de  $\alpha$  están entre  $x_0, \dots, x_k$  con lo que, por hipótesis de inducción, la longitud de  $\alpha'$  es la misma que la de  $\alpha$ . Además, por el Metateorema 1.6 la longitud de  $S_{x_i}^{u_i} \alpha'$  es también igual que la de  $\alpha'$ , luego que la de  $\alpha$ . Con todo, como  $\theta' \equiv \bigwedge u_i S_{x_i}^{u_i} \alpha'$  es claro que se cumple lo deseado.
- Si  $\theta \equiv x_i | \alpha$  es análogo al caso anterior.

Esto concluye la inducción y con ello la demostración. 

Con todo lo anterior estamos ya en posición de demostrar el Metateorema 2.12.

Como por el Metateorema 2.15 sabemos que la longitud de  $\theta'$  es la misma que la de  $\theta$ , para demostrar lo deseado basta ver que si denotamos por  $s_i$  los símbolos de  $\theta$  y por  $s'_i$  los símbolos de  $\theta'$  se cumple que

$$s'_i \equiv \begin{cases} u_j & \text{si } x_j \text{ aparece ligada en la posición } i\text{-ésima de } \theta \\ s_i & \text{si se da otro caso} \end{cases}$$

Lo demostraremos por inducción en la longitud de  $\theta$ .

- Si  $\theta \equiv y_i$ , entonces  $\theta' \equiv y_i$  y como ninguna variable aparece ligada en  $\theta$  el resultado es trivialmente cierto.
- Si  $\theta \equiv c_i$ , entonces  $\theta' \equiv c_i$  y como ninguna variable aparece ligada en  $\theta$  el resultado es trivialmente cierto.

- Si  $\theta \equiv R_i^n t_1 \cdots t_n$  podemos expresar

$$\theta \equiv R_i^n s_0^1 \cdots s_{m_1}^1 s_0^2 \cdots s_{m_2}^2 \cdots s_0^n \cdots s_{m_n}^n$$

de modo que para cada  $j = 1, \dots, n$  es

$$t_j \equiv s_0^j \cdots s_{m_j}^j.$$

Además, como  $\theta' \equiv R_i^n t'_1 \cdots t'_n$ , por el Metateorema 2.15 podemos afirmar que

$$t_j' \equiv s_0^{j'} \cdots s_{m_j}^{j'}$$

para cada  $j = 1, \dots, n$ . Además, como las variables ligadas de cada  $t_j$  están entre  $x_0, \dots, x_k$ , por hipótesis de inducción tenemos que cada  $t_j'$  es el término resultante de sustituir cada aparición ligada de  $x_i$  en  $t_j$  por la variable  $u_i$ , es decir, que para cada  $l = 1, \dots, n$  e  $i = 0, \dots, m_l$  se cumple que

$$s_i^{l'} \equiv \begin{cases} u_j & \text{si } x_j \text{ aparece ligada en la posición } i\text{-ésima de } t_l \\ s_i^l & \text{si se da el caso contrario} \end{cases}$$

Con todo, dado un símbolo  $s_i'$  de  $\theta'$  (con  $i > 0$ ) sabemos que existe un  $l = 1, \dots, n$  y un  $p = 0, \dots, m_l$  tal que  $s_i' \equiv s_p^{l'}$  (y, por tanto,  $s_i \equiv s_p^l$ ) luego distingamos dos casos:

- Si para cierto  $j = 0, \dots, k$  tenemos que  $x_j$  aparece ligada en la posición  $i$ -ésima de  $\theta$ , entonces  $x_j$  aparece ligada en la posición  $p$ -ésima de  $t_l$  y, por tanto,  $s_i' \equiv s_p^{l'} \equiv u_j$ .
- Si ningún  $x_j$  aparece ligada en la posición  $i$ -ésima de  $\theta$ , entonces  $x_j$  no aparece ligada en la posición  $p$ -ésima de  $t_l$  y, por tanto,  $s_i' \equiv s_p^{l'} \equiv s_p^l \equiv s_i$ .

Vemos entonces que  $\theta'$  es exactamente la fórmula resultante de sustituir cada aparición ligada de  $x_j$  por  $u_j$  tal y como buscábamos ver.

- Si  $\theta \equiv f_i^n t_1 \cdots t_n$  es análogo a lo anterior.
- Si  $\theta \equiv \neg\alpha$ , tenemos que  $\theta' \equiv \neg\alpha'$ , luego si la longitud de  $\theta$  es  $n$  se tendrá que

$$\alpha' \equiv s_1' s_2' \cdots s_n'.$$

Como las variables ligadas de  $\alpha$  están entre  $x_0, \dots, x_k$ , por hipótesis de inducción tenemos que  $\alpha'$  es el término resultante de sustituir cada aparición ligada de  $x_i$  en  $\alpha$  por la variable  $u_i$ , es decir, que para cada  $i \geq 1$

$$s_i' \equiv \begin{cases} u_j & \text{si } x_j \text{ aparece ligada en la posición } (i-1)\text{-ésima de } \alpha \\ s_i & \text{si se da el caso contrario} \end{cases}$$

Distinguimos entonces dos casos:

- Si para cierto  $j = 0, \dots, k$  se tiene que  $x_j$  aparece ligada en la posición  $i$ -ésima de  $\theta$ , entonces  $x_j$  aparece ligada en la posición  $(i - 1)$ -ésima de  $\alpha$  y, por tanto,  $s'_i \equiv u_j$ .
- Si ningún  $x_j$  aparece ligada en la posición  $i$ -ésima de  $\theta$ , entonces  $x_j$  no aparece ligada en la posición  $(i - 1)$ -ésima de  $\alpha$  y, por tanto,  $s'_i \equiv s_i$ .

Vemos entonces que  $\theta'$  es exactamente la fórmula resultante de sustituir cada aparición ligada de  $x_j$  por  $u_j$  tal y como buscábamos ver.

- Si  $\theta \equiv \rightarrow \alpha\beta$ , tenemos que  $\theta' \equiv \rightarrow \alpha'\beta'$ , luego si la longitud de  $\alpha$  es  $n$  y la de  $\beta$  es  $m$  se tendrá que

$$\alpha' \equiv s'_1 s'_2 \cdots s'_n$$

y

$$\beta' \equiv s'_{n+1} \cdots s'_{n+m}.$$

Como las variables ligadas de  $\alpha$  y las de  $\beta$  están entre  $x_0, \dots, x_k$ , por hipótesis de inducción tenemos que  $\alpha'$  es el término resultante de sustituir cada aparición ligada de  $x_i$  en  $\alpha$  por la variable  $u_i$ , es decir, que para cada  $1 \leq i \leq n$

$$s'_i \equiv \begin{cases} u_j & \text{si } x_j \text{ aparece ligada en la posición } (i - 1)\text{-ésima de } \alpha \\ s_i & \text{si se da el caso contrario} \end{cases}$$

Lo mismo se cumple para  $\beta$  y tenemos entonces que para  $n + 1 \leq i \leq n + m$

$$s'_i \equiv \begin{cases} u_j & \text{si } x_j \text{ aparece ligada en la posición } (i - n - 1)\text{-ésima de } \beta \\ s_i & \text{si se da el caso contrario} \end{cases}$$

Distinguimos entonces varios casos:

- Si  $1 \leq i \leq n$  y para cierto  $j = 0, \dots, k$  tenemos que  $x_j$  aparece ligada en la posición  $i$ -ésima de  $\theta$ , entonces  $x_j$  aparece ligada en la posición  $(i - 1)$ -ésima de  $\alpha$  y, por tanto,  $s'_i \equiv u_j$ .
- Si  $1 \leq i \leq n$  y ningún  $x_j$  aparece ligada en la posición  $i$ -ésima de  $\theta$ , entonces  $x_j$  no aparece ligada en la posición  $(i - 1)$ -ésima de  $\alpha$  y, por tanto,  $s'_i \equiv s_i$ .
- Si  $n + 1 \leq i \leq n + m$  y para cierto  $j = 0, \dots, k$  tenemos que  $x_j$  aparece ligada en la posición  $i$ -ésima de  $\theta$ , entonces  $x_j$  aparece ligada en la posición  $(i - n - 1)$ -ésima de  $\beta$  y, por tanto,  $s'_i \equiv u_j$ .
- Si  $n + 1 \leq i \leq n + m$  y ningún  $x_j$  aparece ligada en la posición  $i$ -ésima de  $\theta$ , entonces  $x_j$  no aparece ligada en la posición  $(i - n - 1)$ -ésima de  $\beta$  y, por tanto,  $s'_i \equiv s_i$ .

Vemos entonces que  $\theta'$  es exactamente la fórmula resultante de sustituir cada aparición ligada de  $x_j$  por  $u_j$  tal y como buscábamos ver.

- Si  $\theta \equiv \wedge x_l \alpha$ , tenemos que  $\theta' \equiv \wedge u_l S_{x_l}^{u_l} \alpha'$ . Como las variables ligadas de  $\alpha$  están entre  $x_0, \dots, x_k$ , por hipótesis de inducción tenemos que  $\alpha'$  es el término resultante

de sustituir cada aparición ligada de  $x_i$  en  $\alpha$  por la variable  $u_i$ , luego si denotamos por  $r'_i$  los símbolos de  $\alpha'$  se tiene que

$$r'_i \equiv \begin{cases} u_j & \text{si } x_j \text{ aparece ligada en la posición } i\text{-ésima de } \alpha \\ s_{i+2} & \text{si se da el caso contrario} \end{cases}$$

Ahora, por el Metateorema 2.14 tenemos que  $S_{x_l}^{u_l}\alpha'$  es la fórmula resultante de sustituir cada aparición de  $x_l$  en  $\alpha'$  por  $u_l$ , luego para  $i > 1$ <sup>15</sup>

$$s'_i \equiv \begin{cases} u_l & \text{si } r'_{i-2} \equiv x_l \\ r'_{i-2} & \text{si } r'_{i-2} \not\equiv x_l \end{cases}$$

Con todo, podemos distinguir varios casos:

- Si ningún  $x_j$  aparece ligada en la posición  $i$ -ésima de  $\theta$  (con  $i > 1$ ), entonces  $s_i \not\equiv x_l$  y  $x_j$  no aparece ligada en la posición  $(i-2)$ -ésima de  $\alpha$ . Por tanto, tenemos que  $r'_{i-2} \equiv s_i$  y, como  $s_i \not\equiv x_l$ ,  $s'_i \equiv r'_{i-2} \equiv s_i$ .
- Si para cierto  $j = 0, \dots, k$  tenemos que  $x_j$ , con  $j \neq l$ , aparece ligada en la posición  $i$ -ésima de  $\theta$ , entonces  $x_j$  aparece ligado en la posición  $(i-2)$ -ésima de  $\alpha$  y tenemos pues que  $r'_{i-2} \equiv u_j$ . Como  $u_j \not\equiv x_l$ , concluimos que  $s'_i \equiv r'_{i-2} \equiv u_j$ .
- Si  $x_l$  aparece ligada en la posición  $i$ -ésima de  $\theta$ , entonces o bien  $i = 1$  y es claro que  $s'_i \equiv u_l$ , o bien tenemos que:
  - $x_l$  no aparece ligada en la posición  $(i-2)$ -ésima de  $\alpha$ , luego  $r'_{i-2} \equiv s_i \equiv x_l$  y con ello  $s'_i \equiv u_l$ .
  - $x_l$  aparece ligada en la posición  $(i-2)$ -ésima de  $\alpha$ , luego  $r'_{i-2} \equiv u_l$  y, como  $u_l \not\equiv x_l$ , concluimos que  $s'_i \equiv r'_{i-2} \equiv u_l$ .

En cualquier caso concluimos que  $s'_i \equiv u_l$ .

Vemos entonces que  $\theta'$  es exactamente la fórmula resultante de sustituir cada aparición ligada de  $x_j$  por  $u_j$  tal y como buscábamos ver.

- Si  $\theta \equiv |x_l\alpha$  es análogo al caso anterior.

Esto concluye la inducción y con ello la demostración. 

**Nota 2:** ... subexpresiones de una expresión ...

Es decir, en los dos puntos siguientes se considera que  $\theta$  es una expresión cuyas variables ligadas están entre  $x_0, \dots, x_k$  y que las variables  $u_0, \dots, u_k$  son fijas. Más en concreto, el enunciado completo de estos resultados será:

1. Sea  $\theta$  una expresión cuyas variables ligadas están entre  $x_0, \dots, x_k$  y  $u_0, \dots, u_k$  otras variables (distintas de las  $x_i$ ) que no están en  $\theta$ . Entonces las variables ligadas de cualquier sustitución  $S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}}\theta'$  están entre  $u_0, \dots, u_k$ .

<sup>15</sup> Teniendo en cuenta que los símbolos de  $S_{x_l}^{u_l}\alpha'$  serán precisamente  $s'_2, s'_3, \dots, s'_n$  siendo  $n+1$  la longitud de  $\theta$ .

2. Sea  $\theta$  una expresión cuyas variables ligadas están entre  $x_0, \dots, x_k$  y  $u_0, \dots, u_k$  otras variables (distintas de las  $x_i$ ) que no están en  $\theta$ . Entonces  $\theta'$  tiene las mismas variables libres que  $\theta$  y sus variables ligadas están entre  $u_0, \dots, u_k$ .

**Nota 3:** ... cualquier sustitución ...

Observemos que el enunciado se refiere a cualquier sustitución de las variables prefijadas  $x_0, \dots, x_k$  (entre las que están las variables ligadas de  $\theta$ ) por las variables  $u_0, \dots, u_k$  y con los subíndices adecuados, NO a cualquier sustitución en general.

**Nota 4:** ... razonando por inducción ...

Es decir, estamos suponiendo que para cualquier expresión  $\eta$  de longitud menor a  $m$  cuyas variables ligadas están entre  $x_0, \dots, x_k$  se cumple que en cualquier sustitución  $S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \eta'$  sus variables ligadas están entre  $u_0, \dots, u_k$  y queremos ver que entonces para cualquier expresión  $\theta$  de longitud  $m$  cuyas variables ligadas están entre  $x_0, \dots, x_k$  se cumple que en cualquier sustitución  $S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta'$  sus variables ligadas están también entre  $u_0, \dots, u_k$ .

**Nota 5:** ... inmediato si ... sigue inmediatamente ...

En efecto:

- Si  $\theta \equiv y_i$ , entonces  $\theta' \equiv y_i$  y ninguna variable está ligada en ella, luego el resultado es trivialmente cierto.
- Si  $\theta \equiv c_i$ , entonces  $\theta' \equiv c_i$  y ninguna variable está ligada en ella, luego el resultado es trivialmente cierto.
- Si  $\theta \equiv R_i^n t_1 \dots t_n$ , entonces las variables ligadas de cada  $t_i$  estarán entre  $x_0, \dots, x_k$  con lo que, por hipótesis de inducción, se tiene que las variables ligadas de cada  $S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} t'_i$  están entre  $u_0, \dots, u_k$ . Como

$$S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta' \equiv R_i^n S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} t'_1 \dots S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} t'_n$$

concluimos que sus variables ligadas también estarán entre  $u_0, \dots, u_k$ .

- Si  $\theta \equiv f_i^n t_1 \dots t_n$  es completamente análogo al caso anterior.
- Si  $\theta \equiv \neg \alpha$ , entonces las variables ligadas de  $\alpha$  estarán entre  $x_0, \dots, x_k$  con lo que, por hipótesis de inducción, se tiene que las variables ligadas de  $S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \alpha'$  están entre  $u_0, \dots, u_k$ . Como

$$S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta' \equiv \neg S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \alpha'$$

concluimos que sus variables ligadas también estarán entre  $u_0, \dots, u_k$ .

- Si  $\theta \equiv \alpha \rightarrow \beta$ , entonces las variables ligadas de  $\alpha$  y de  $\beta$  estarán entre  $x_0, \dots, x_k$  con lo que, por hipótesis de inducción, se tiene que las variables ligadas de  $S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \alpha'$  y de  $S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \beta'$  están entre  $u_0, \dots, u_k$ . Como

$$S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta' \equiv S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \alpha' \rightarrow S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \beta'$$

concluimos que sus variables ligadas también estarán entre  $u_0, \dots, u_k$ .

**Nota 6:** ... necesariamente  $x_{i_r} \neq x_i$  ...

En efecto, se tiene que  $x_{i_r}$  es distinto de  $u_i$  y está libre en  $S_{x_i}^{u_i} \alpha'$ , luego por el Teorema 1.13 3) se tiene que  $x_{i_r}$  es distinto de  $x_i$  y está libre en  $\alpha'$ .

**Nota 7:** ...  $u_{i_r} \neq u_i$  ...

En efecto, como todos los  $x_j$  y  $u_j$  son distintos entre sí, si  $x_{i_r} \neq x_i$  entonces  $i_r \neq i$  y con ello  $u_{i_r} \neq u_i$ .

**Nota 8:** ... trivialmente cierto ...

En efecto, si  $x_{i_r}$  no está libre en  $\theta'$  entonces no está libre en  $S_{x_i}^{u_i} \alpha'$  (pues  $x_{i_r}$  es distinta de  $u_i$ ) con lo que usando el Teorema 1.13 2) se concluye que

$$S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta' \equiv \theta' \equiv \bigwedge u_i S_{x_i}^{u_i} \alpha' \equiv \bigwedge u_i S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} S_{x_i}^{u_i} \alpha'$$

como se quería ver.

**Nota 9:** ... Razonando del mismo modo ...

Si tenemos que

$$\underbrace{S_{x_{i_{l+1}}}^{u_{i_{l+1}}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta'}_{\beta} \equiv \bigwedge u_i \underbrace{S_{x_{i_{l+1}}}^{u_{i_{l+1}}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} S_{x_i}^{u_i} \alpha'}_{\gamma}$$

podemos distinguir dos casos:

- Si  $x_{i_l}$  no está libre en  $\beta$ , entonces no lo está en  $\gamma$  (pues  $x_{i_l}$  es distinta de  $u_i$ ) con lo que por el Teorema 1.13 2) se concluye que

$$S_{x_{i_l}}^{u_{i_l}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta' \equiv S_{x_{i_l}}^{u_{i_l}} \beta \equiv \beta \equiv \bigwedge u_i \gamma \equiv \bigwedge u_i S_{x_{i_l}}^{u_{i_l}} \gamma \equiv \bigwedge u_i S_{x_{i_l}}^{u_{i_l}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} S_{x_i}^{u_i} \alpha'.$$

- Si  $x_{i_l}$  está libre en  $\beta$ , entonces basta ver que  $x_{i_l} \neq x_i$  pues entonces  $u_{i_l} \neq u_i$  y por (1.36) se obtiene que

$$S_{x_{i_l}}^{u_{i_l}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta' \equiv S_{x_{i_l}}^{u_{i_l}} \bigwedge u_i \gamma \equiv \bigwedge u_i S_{x_{i_l}}^{u_{i_l}} \gamma \equiv \bigwedge u_i S_{x_{i_l}}^{u_{i_l}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} S_{x_i}^{u_i} \alpha'.$$

Supongamos pues, por reducción al absurdo, que  $x_{i_l} \equiv x_i$ . Entonces tenemos que  $x_i$  está libre en  $\beta$ , luego en  $\gamma$ , y como es distinta de cada  $u_s$  el Teorema 1.13 3) nos asegura que estará libre en  $S_{x_i}^{u_i} \alpha'$ . Ahora bien, como  $x_i \neq u_i$ , este mismo teorema nos dice que  $x_i \neq x_i$  lo que supone una contradicción.



En cualquier caso hemos demostrado que si se cumple que

$$S_{x_{i_{l+1}}}^{u_{i_{l+1}}} \cdots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta' \equiv \bigwedge u_i S_{x_{i_{l+1}}}^{u_{i_{l+1}}} \cdots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} S_{x_i}^{u_i} \alpha'$$

entonces también se cumple que

$$S_{x_{i_l}}^{u_{i_l}} \cdots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta' \equiv \bigwedge u_i S_{x_{i_l}}^{u_{i_l}} \cdots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} S_{x_i}^{u_i} \alpha'.$$

Así pues, como ya hemos visto que

$$S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta' \equiv \bigwedge u_i S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} S_{x_i}^{u_i} \alpha',$$

lo anterior nos muestra que podemos repetir este razonamiento  $r - 1$  veces (o si se prefiere utilizar un razonamiento inductivo) para concluir lo deseado.

**Nota 10:** ... inducción sobre la longitud de  $\theta$  ...

Por inducción sobre la longitud de  $\theta$  tenemos:

- Si  $\theta \equiv y_i$ , entonces  $\theta' \equiv y_i$  y el resultado es trivialmente cierto.
- Si  $\theta \equiv c_i$ , entonces  $\theta' \equiv c_i$  y el resultado es trivialmente cierto.
- Si  $\theta \equiv R_i^n t_1 \cdots t_n$ , entonces las variables ligadas de cada  $t_i$  estarán entre  $x_0, \dots, x_k$  con lo que, por hipótesis de inducción, se tiene que las variables libres de cada  $t'_i$  son las mismas que las de  $t_i$  y sus variables ligadas están entre  $u_0, \dots, u_k$ . Como

$$\theta' \equiv R_i^n t'_1 \cdots t'_n,$$

es claro que sus variables libres son las mismas que las de  $\theta$  y que sus variables ligadas están entre  $u_0, \dots, u_k$ .

- Si  $\theta \equiv \neg \alpha$ , entonces las variables ligadas de  $\alpha$  estarán entre  $x_0, \dots, x_k$  con lo que, por hipótesis de inducción, se tiene que las variables libres de  $\alpha'$  son las mismas que las de  $\alpha$  y sus variables ligadas están entre  $u_0, \dots, u_k$ . Como

$$\theta' \equiv \neg \alpha',$$

es claro que sus variables libres son las mismas que las de  $\theta$  y que sus variables ligadas están entre  $u_0, \dots, u_k$ .

- Si  $\theta \equiv \alpha \rightarrow \beta$ , entonces las variables ligadas de  $\alpha$  y de  $\beta$  estarán entre  $x_0, \dots, x_k$  con lo que, por hipótesis de inducción, se tiene que las variables libres de  $\alpha'$  son las mismas que las de  $\alpha$ , las variables libres de  $\beta'$  son las mismas que las de  $\beta$  y en ambos casos sus variables ligadas están entre  $u_0, \dots, u_k$ . Como

$$\theta' \equiv \alpha' \rightarrow \beta'$$

es claro que sus variables libres son las mismas que las de  $\theta$  y que sus variables ligadas están entre  $u_0, \dots, u_k$ .

- Si  $\theta \equiv \bigwedge x_i \alpha$ , entonces las variables ligadas de  $\alpha$  estarán entre  $x_0, \dots, x_k$  con lo que, por hipótesis de inducción, se tiene que las variables libres de  $\alpha'$  son las mismas que las de  $\alpha$  y sus variables ligadas están entre  $u_0, \dots, u_k$ . Aún más, por el resultado anterior, tenemos que también las variables ligadas de  $S_{x_i}^{u_i} \alpha'$  estarán entre  $u_0, \dots, u_k$ , luego las variables ligadas de

$$\theta' \equiv \bigwedge u_i S_{x_i}^{u_i} \alpha'$$

estarán claramente entre  $u_0, \dots, u_k$ .

Por otra parte, si  $z$  está libre en  $\theta$  entonces  $z \neq x_i$  y está libre en  $\alpha$ , luego por lo dicho en  $\alpha'$ . Por el Teorema 1.13 3) (teniendo en cuenta que  $z \neq x_i$ ) obtenemos que  $z$  también estará libre en  $S_{x_i}^{u_i} \alpha'$  y como además  $z \neq u_i$  (pues  $z$  está en  $\alpha$ , pero  $u_i$  no), concluimos que  $z$  está libre en  $\theta'$ .

Recíprocamente, si  $z$  está libre en  $\theta'$  entonces  $z \neq u_i$  y  $z$  está libre en  $S_{x_i}^{u_i} \alpha'$ . Por el Teorema 1.13 3) (teniendo en cuenta que  $z$  no está libre en  $u_i$ ) obtenemos que  $z \neq x_i$  y que también estará libre en  $\alpha'$ , luego por lo visto en  $\alpha$ , y esto implica que  $z$  está libre en  $\theta$ .

En definitiva, hemos probado que las variables libres de  $\theta'$  son las mismas que las de  $\theta$  tal y como queríamos ver.

- Si  $\theta \equiv x_i | \alpha$  es análogo al caso anterior.

Esto concluye la inducción y por tanto la prueba. 

**Nota 11:** ... ocurrencia ligada ...

Por la **Nota 1** pág. 78  $\theta'$  es la expresión definida al final de la página 77.

**Nota 12:** ... fácilmente la equivalencia ...

Es consecuencia del siguiente resultado (junto a la regla (IC)):

### Metateorema 2.16

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal y  $t_1, \dots, t_n, t'_1, \dots, t'_n$  términos de dicho lenguaje. Entonces para cualquier relator  $n$ -ádico del lenguaje se cumple que

$$\vdash (t_1 = t'_1 \wedge \dots \wedge t_n = t'_n) \rightarrow (R_i^n t_1 \dots t_n \leftrightarrow R_i^n t'_1 \dots t'_n).$$

Tomando  $z_1, \dots, z_n$  variables distintas que no estén en ninguno de los términos  $t_1, \dots, t_n, t'_1, \dots, t'_n$  (lo que, entre otras cosas, garantiza que todos los usos de (IG) en la siguiente demostración son válidos) se tiene la siguiente demostración:

|     |                                                                                             |                    |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|
| (1) | $t_1 = t'_1 \wedge \dots \wedge t_n = t'_n$                                                 | Hipótesis          |
| (2) | $R_i^n z_1 \dots z_{n-1} t'_n \leftrightarrow R_i^n z_1 \dots z_{n-1} t'_n$                 | Tma. 2.7, (IB)     |
| (3) | $S_{z_n}^{t'_n} (R_i^n z_1 \dots z_{n-1} z_n \leftrightarrow R_i^n z_1 \dots z_{n-1} t'_n)$ | R 2 [Tma. 1.13 2)] |
| (4) | $t_n = t'_n$                                                                                | EC 1               |
| (5) | $S_{z_n}^{t_n} (R_i^n z_1 \dots z_{n-1} z_n \leftrightarrow R_i^n z_1 \dots z_{n-1} t'_n)$  | ETI 3, 4           |
| (6) | $R_i^n z_1 \dots z_{n-1} t_n \leftrightarrow R_i^n z_1 \dots z_{n-1} t'_n$                  | R 5 [Tma. 1.13 2)] |

|          |                                                                                                                        |                          |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|
| (7)      | $\wedge z_{n-1} (R_i^n z_1 \cdots z_{n-1} t_n \leftrightarrow R_i^n z_1 \cdots z_{n-1} t'_n)$                          | IG 6                     |
| (8)      | $R_i^n z_1 \cdots z_{n-2} t'_{n-1} t_n \leftrightarrow R_i^n z_1 \cdots z_{n-2} t'_{n-1} t'_n$                         | EG 7 [Tma. 1.13 2)]      |
| (9)      | $S_{z_{n-1}}^{t'_{n-1}} (R_i^n z_1 \cdots z_{n-2} z_{n-1} t_n \leftrightarrow R_i^n z_1 \cdots z_{n-2} t'_{n-1} t'_n)$ | R 8 [Tma. 1.13 2)]       |
| (10)     | $t_{n-1} = t'_{n-1}$                                                                                                   | EC 1                     |
| (11)     | $S_{z_{n-1}}^{t_{n-1}} (R_i^n z_1 \cdots z_{n-2} z_{n-1} t_n \leftrightarrow R_i^n z_1 \cdots z_{n-2} t'_{n-1} t'_n)$  | ETI 9, 10                |
| (12)     | $R_i^n z_1 \cdots z_{n-2} t_{n-1} t_n \leftrightarrow R_i^n z_1 \cdots z_{n-2} t'_{n-1} t'_n$                          | R 11 [Tma. 1.13 2)]      |
| ...      |                                                                                                                        |                          |
| (5n-3)   | $\wedge z_1 (R_i^n z_1 t_2 \cdots t_n \leftrightarrow R_i^n z_1 t'_2 \cdots t'_n)$                                     | IG 5n - 4                |
| (5n-2)   | $R_i^n t'_1 t_2 \cdots t_n \leftrightarrow R_i^n t'_1 t'_2 \cdots t'_n$                                                | EG 5n - 3 [Tma. 1.13 2)] |
| (5n-1)   | $S_{z_1}^{t'_1} (R_i^n z_1 t_2 \cdots t_n \leftrightarrow R_i^n t'_1 \cdots t'_n)$                                     | R 5n - 2 [Tma. 1.13 2)]  |
| (5n)     | $t_1 = t'_1$                                                                                                           | EC 1                     |
| (5n+1)   | $S_{z_1}^{t_1} (R_i^n z_1 t_2 \cdots t_n \leftrightarrow R_i^n t'_1 \cdots t'_n)$                                      | ETI 5n - 1, 5n           |
| (5n+2)   | $R_i^n t_1 \cdots t_n \leftrightarrow R_i^n t'_1 \cdots t'_n$                                                          | R 5n + 1 [Tma. 1.13 2)]  |
| (5n + 3) | $(1) \rightarrow (R_i^n t_1 \cdots t_n \leftrightarrow R_i^n t'_1 \cdots t'_n)$                                        | Tma. deducción           |

Esta demostración claramente prueba el resultado. 

**Nota 13:** ... similar.

Es completamente análogo al resultado anterior sustituyendo el uso del Metateorema 2.16 por el siguiente resultado:

### Metateorema 2.17

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal y  $t_1, \dots, t_n, t'_1, \dots, t'_n$  términos de dicho lenguaje. Entonces para cualquier funtor  $n$ -ádico del lenguaje se cumple que

$$\vdash (t_1 = t'_1 \wedge \cdots \wedge t_n = t'_n) \rightarrow (f_i^n t_1 \cdots t_n = f_i^n t'_1 \cdots t'_n).$$

Tomando  $z_1, \dots, z_n$  variables distintas que no estén en ninguno de los términos  $t_1, \dots, t_n, t'_1, \dots, t'_n$  (lo que, entre otras cosas, garantiza que todos los usos de (IG) en la siguiente demostración son válidos) se tiene la siguiente demostración:

|        |                                                                                                          |                     |
|--------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|
| (1)    | $t_1 = t'_1 \wedge \cdots \wedge t_n = t'_n$                                                             | Hipótesis           |
| (2)    | $f_i^n z_1 \cdots z_{n-1} t'_n = f_i^n z_1 \cdots z_{n-1} t'_n$                                          | I                   |
| (3)    | $S_{z_n}^{t'_n} (f_i^n z_1 \cdots z_{n-1} z_n = f_i^n z_1 \cdots z_{n-1} t'_n)$                          | R 2 [Tma. 1.13 2)]  |
| (4)    | $t_n = t'_n$                                                                                             | EC 1                |
| (5)    | $S_{z_n}^{t_n} (f_i^n z_1 \cdots z_{n-1} z_n = f_i^n z_1 \cdots z_{n-1} t'_n)$                           | ETI 3, 4            |
| (6)    | $f_i^n z_1 \cdots z_{n-1} t_n = f_i^n z_1 \cdots z_{n-1} t'_n$                                           | R 5 [Tma. 1.13 2)]  |
| (7)    | $\wedge z_{n-1} (f_i^n z_1 \cdots z_{n-1} t_n = f_i^n z_1 \cdots z_{n-1} t'_n)$                          | IG 6                |
| (8)    | $f_i^n z_1 \cdots z_{n-2} t'_{n-1} t_n = f_i^n z_1 \cdots z_{n-2} t'_{n-1} t'_n$                         | EG 7 [Tma. 1.13 2)] |
| (9)    | $S_{z_{n-1}}^{t'_{n-1}} (f_i^n z_1 \cdots z_{n-2} z_{n-1} t_n = f_i^n z_1 \cdots z_{n-2} t'_{n-1} t'_n)$ | R 8 [Tma. 1.13 2)]  |
| (10)   | $t_{n-1} = t'_{n-1}$                                                                                     | EC 1                |
| (11)   | $S_{z_{n-1}}^{t_{n-1}} (f_i^n z_1 \cdots z_{n-2} z_{n-1} t_n = f_i^n z_1 \cdots z_{n-2} t'_{n-1} t'_n)$  | ETI 9, 10           |
| (12)   | $f_i^n z_1 \cdots z_{n-2} t_{n-1} t_n = f_i^n z_1 \cdots z_{n-2} t'_{n-1} t'_n$                          | R 11 [Tma. 1.13 2)] |
| ...    |                                                                                                          |                     |
| (5n-3) | $\wedge z_1 (f_i^n z_1 t_2 \cdots t_n = f_i^n z_1 t'_2 \cdots t'_n)$                                     | IG 5n - 4           |

|          |                                                                      |                            |
|----------|----------------------------------------------------------------------|----------------------------|
| (5n-2)   | $f_i^n t'_1 t_2 \cdots t_n = f_i^n t'_1 t'_2 \cdots t'_n$            | EG $5n - 3$ [Tma. 1.13 2)] |
| (5n-1)   | $S_{z_1}^{t'_1} (f_i^n z_1 t_2 \cdots t_n = f_i^n t'_1 \cdots t'_n)$ | R $5n - 2$ [Tma. 1.13 2)]  |
| (5n)     | $t_1 = t'_1$                                                         | EC 1                       |
| (5n+1)   | $S_{z_1}^{t_1} (f_i^n z_1 t_2 \cdots t_n = f_i^n t'_1 \cdots t'_n)$  | ETI $5n - 1, 5n$           |
| (5n+2)   | $f_i^n t_1 \cdots t_n = f_i^n t'_1 \cdots t'_n$                      | R $5n + 1$ [Tma. 1.13 2)]  |
| (5n + 3) | $(1) \rightarrow (f_i^n t_1 \cdots t_n = f_i^n t'_1 \cdots t'_n)$    | Tma. deducción             |

Esta demostración claramente prueba el resultado. 

Por completitud, presentaremos ahora un resultado que generaliza a los dos anteriores.<sup>16</sup>

### Metateorema 2.18

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal y  $t_1, \dots, t_n, t'_1, \dots, t'_n$  términos de dicho lenguaje. Entonces para cualquier expresión  $\theta(x_1, \dots, x_n)$  del lenguaje se cumple que

$$\vdash (t_1 = t'_1 \wedge \cdots \wedge t_n = t'_n) \rightarrow \theta(t_1, \dots, t_n) \leftrightarrow \theta(t'_1, \dots, t'_n)$$

si  $\theta$  es una fórmula y

$$\vdash (t_1 = t'_1 \wedge \cdots \wedge t_n = t'_n) \rightarrow \theta(t_1, \dots, t_n) = \theta(t'_1, \dots, t'_n)$$

si  $\theta$  es un término.

**Veamos en primer lugar** el resultado cuando  $\theta$  es una fórmula.

Considerando  $z_1, \dots, z_n$  variables que no están en  $\theta, t_1, \dots, t_n, t'_1, \dots, t'_n$  ni en  $x_1, \dots, x_n$  y denotando por

$$\beta \equiv z_1 = t_1 \wedge \cdots \wedge z_n = t_n \wedge S_{x_1}^{z_1} \cdots S_{x_n}^{z_n} \theta$$

y

$$\beta' \equiv z_1 = t'_1 \wedge \cdots \wedge z_n = t'_n \wedge S_{x_1}^{z_1} \cdots S_{x_n}^{z_n} \theta$$

tenemos la siguiente demostración:

|      |                                              |                  |
|------|----------------------------------------------|------------------|
| (1)  | $t_1 = t'_1 \wedge \cdots \wedge t_n = t'_n$ | Hipótesis        |
| (2)  | $z_1 = t_1$                                  | Hipótesis        |
| (3)  | $t_1 = t'_1$                                 | EC 1             |
| (4)  | $z_1 = t'_1$                                 | TI 2, 3          |
| (5)  | $z_1 = t_1 \rightarrow z_1 = t'_1$           | Tma. deducción   |
| (6)  | $z_1 = t'_1$                                 | Hipótesis        |
| (7)  | $t'_1 = t_1$                                 | SI (EC 1)        |
| (8)  | $z_1 = t_1$                                  | TI 6, 7          |
| (9)  | $z_1 = t'_1 \rightarrow z_1 = t_1$           | Tma. deducción   |
| (10) | $z_1 = t_1 \leftrightarrow z_1 = t'_1$       | IB 5, 9          |
| (11) | $z_2 = t_2 \leftrightarrow z_2 = t'_2$       | Análogo a 2 – 10 |

<sup>16</sup> Pues observemos que si  $\theta(x_1, \dots, x_n) \equiv R_i^n x_1 \cdots x_n$  entonces

$$\theta(t_1, \dots, t_n) \equiv S_{z_1}^{t_1} \cdots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \cdots S_{x_n}^{z_n} R_i^n x_1 \cdots x_n \equiv S_{z_1}^{t_1} \cdots S_{z_n}^{t_n} R_i^n z_1 \cdots z_n \equiv R_i^n t_1 \cdots t_n$$

y lo mismo ocurre con los funtores.

|           |                                                                                                                                  |                                      |
|-----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------|
| (12)      | $(z_1 = t_1 \wedge z_2 = t_2) \leftrightarrow$<br>$(z_1 = t'_1 \wedge z_2 = t'_2)$                                               | MP (IC 10, 11), Teo. 2.11 4)         |
| (13)      | $z_3 = t_3 \leftrightarrow z_3 = t'_3$                                                                                           | Análogo a 2 – 10                     |
| (14)      | $(z_1 = t_1 \wedge z_2 = t_2 \wedge z_3 = t_3) \leftrightarrow$<br>$(z_1 = t'_1 \wedge z_2 = t'_2 \wedge z_3 = t'_3)$            | MP (IC 12, 13), Teo. 2.11 4)         |
|           | ...                                                                                                                              |                                      |
| (2n+7)    | $z_n = t_n \leftrightarrow z_n = t'_n$                                                                                           | Análogo a 2 – 10                     |
| (2n+8)    | $(z_1 = t_1 \wedge \dots \wedge z_n = t_n) \leftrightarrow$<br>$(z_1 = t'_1 \wedge \dots \wedge z_n = t'_n)$                     | MP (IC 2n + 6, 2n + 7), Teo. 2.11 4) |
| (2n+9)    | $S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta \leftrightarrow S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta$                              | Tma. 2.7                             |
| (2n+10)   | $\beta \leftrightarrow \beta'$                                                                                                   | MP (IC 2n + 8, 2n + 9), Teo. 2.11 4) |
| (2n+11)   | $\forall z_n \beta \leftrightarrow \forall z_n \beta'$                                                                           | MP (IG 2n + 10), Tma. 2.11 7)        |
| (2n+12)   | $\forall z_{n-1} z_n \beta \leftrightarrow \forall z_{n-1} z_n \beta'$                                                           | MP (IG 2n + 11), Tma. 2.11 7)        |
|           | ...                                                                                                                              |                                      |
| (3n+10)   | $\forall z_1 \dots z_n \beta \leftrightarrow \forall z_1 \dots z_n \beta'$                                                       | MP (IG 3n + 9), Tma. 2.11 7)         |
| (3n+11)   | $\theta(t_1, \dots, t_n) \leftrightarrow \forall z_1 \dots z_n \beta$                                                            | Mteo. 1.20                           |
| (3n+12)   | $\theta(t'_1, \dots, t'_n) \leftrightarrow \forall z_1 \dots z_n \beta'$                                                         | Mteo. 1.20                           |
| (3n+13)   | $\theta(t_1, \dots, t_n) \leftrightarrow \theta(t'_1, \dots, t'_n)$                                                              | MBB 3n + 10, 3n + 11, 3n + 12        |
| (3n + 14) | $(t_1 = t'_1 \wedge \dots \wedge t_n = t'_n) \rightarrow$<br>$\theta(t_1, \dots, t_n) \leftrightarrow \theta(t'_1, \dots, t'_n)$ | Tma. deducción                       |

Observemos que todas las generalizaciones de la prueba son válidas pues ningún  $z_i$  está libre en la línea 1.

Por otra parte, si  $\theta$  es un término, definimos la fórmula  $\beta \equiv w = \theta$  con  $w$  una variable que no está en  $\theta, t_1, \dots, t_n, t'_1, \dots, t'_n$  ni en  $x_1, \dots, x_n$ . Se tiene entonces que si  $z_1, \dots, z_n$  son variables que no están en  $\theta, t_1, \dots, t_n, t'_1, \dots, t'_n$  ni en  $w, x_1, \dots, x_n$ , por el Metateorema 1.16 se cumple que

$$\vdash \beta(t_1, \dots, t_n) \leftrightarrow S_{z_1}^{t_1} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \beta$$

siendo

$$S_{z_1}^{t_1} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \beta \equiv w = S_{z_1}^{t_1} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta,$$

luego obtenemos que

$$\vdash \beta(t_1, \dots, t_n) \leftrightarrow w = S_{z_1}^{t_1} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta. \quad (2.50)$$

De forma análoga obtenemos que

$$\vdash \beta(t'_1, \dots, t'_n) \leftrightarrow w = S_{z_1}^{t'_1} \dots S_{z_n}^{t'_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta. \quad (2.51)$$

Además, el Metateorema 1.16 también nos da que

$$\vdash \theta(t_1, \dots, t_n) = S_{z_1}^{t_1} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta, \quad (2.52)$$

$$\vdash \theta(t'_1, \dots, t'_n) = S_{z_1}^{t'_1} \dots S_{z_n}^{t'_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta. \quad (2.53)$$

Con todo, tenemos la siguiente demostración donde en la segunda línea utilizamos el

resultado ya probado para fórmulas:

|     |                                                                                                                                                                                            |                                  |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|
| (1) | $t_1 = t'_1 \wedge \cdots \wedge t_n = t'_n$                                                                                                                                               | Hipótesis                        |
| (2) | $t_1 = t'_1 \wedge \cdots \wedge t_n = t'_n \rightarrow$<br>$\beta(t_1, \dots, t_n) \leftrightarrow \beta(t'_1, \dots, t'_n)$                                                              | Tma. lógico                      |
| (3) | $\beta(t_1, \dots, t_n) \leftrightarrow \beta(t'_1, \dots, t'_n)$                                                                                                                          | MP 1, 2                          |
| (4) | $w = S_{z_1}^{t_1} \cdots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \cdots S_{x_n}^{z_n} \theta \leftrightarrow$<br>$w = S_{z_1}^{t'_1} \cdots S_{z_n}^{t'_n} S_{x_1}^{z_1} \cdots S_{x_n}^{z_n} \theta$ | MBB 3, (2.50), (2.51)            |
| (5) | $S_{z_1}^{t_1} \cdots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \cdots S_{x_n}^{z_n} \theta =$<br>$S_{z_1}^{t'_1} \cdots S_{z_n}^{t'_n} S_{x_1}^{z_1} \cdots S_{x_n}^{z_n} \theta$                       | Mteo. 1.8 4 ( $w$ no libre en 1) |
| (6) | $\theta(t_1, \dots, t_n) = \theta(t'_1, \dots, t'_n)$                                                                                                                                      | TI 5, (2.52), (2.53)             |
| (7) | $(t_1 = t'_1 \wedge \cdots \wedge t_n = t'_n) \rightarrow$<br>$\theta(t_1, \dots, t_n) = \theta(t'_1, \dots, t'_n)$                                                                        | Tma. deducción                   |

Esto concluye la demostración. 

**Nota 14:** ... también son sencillos.

Veamos estos dos casos:

- Si  $\theta \equiv \neg\alpha$ , entonces las variables ligadas de  $\alpha$  está entre  $x_0, \dots, x_k$  con lo que, por hipótesis de inducción, se tiene que  $\vdash \alpha \leftrightarrow \alpha'$ . Utilizando entonces la regla (SE) junto al Teorema 2.11 1) se obtiene que

$$\vdash \neg\alpha \leftrightarrow \neg\alpha'$$

y, como  $\theta' \equiv \neg\alpha'$ , hemos probado lo buscado.

- Si  $\theta \equiv \alpha \rightarrow \beta$ , entonces las variables ligadas de  $\alpha$  y  $\beta$  está entre  $x_0, \dots, x_k$  con lo que, por hipótesis de inducción, se tiene que  $\vdash \alpha \leftrightarrow \alpha'$  y  $\vdash \beta \leftrightarrow \beta'$ . Utilizando entonces la regla (IC) y (MP) junto al Teorema 2.11 2) se obtiene que

$$\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\alpha' \rightarrow \beta')$$

y, como  $\theta' \equiv \alpha' \rightarrow \beta'$ , hemos probado lo buscado.

Esto concluye la prueba de los dos casos. 

**Nota 15:** ... se sigue ... a su vez ...

Por (IG) y (EG) respectivamente.

**Nota 16:** ... Si suponemos  $\theta$  ... igualmente se prueba la opuesta.

Para demostrar la equivalencia en este caso necesitaremos los siguientes resultados:

**Metateorema 2.19**

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal,  $\theta$  una expresión de  $\mathcal{L}$  cuyas variables ligadas están entre  $x_0, \dots, x_k$  y  $u_0, \dots, u_k$  otras variables (distintas entre sí y de los  $x_i$ ) que no estén en  $\theta$ . Entonces, para cualesquiera índices  $i_1, \dots, i_r$  entre  $0, \dots, k$  y cada  $j = 0, \dots, k$  distinto de  $i_1, \dots, i_r$  se cumple que

$$S_{u_j}^{x_j} S_{x_j}^{u_j} S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta' \equiv S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta'.$$

Lo demostraremos por inducción en la longitud de  $\theta$ :

- Si  $\theta \equiv y_i$ , entonces  $\theta' \equiv y_i$  y tenemos dos casos:

- Si  $y_i \equiv x_{i_l}$  para algún  $l = 1, \dots, r$  entonces

$$S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta' \equiv u_{i_l},$$

luego por el Teorema 1.13 4) (usando que  $u_j$  es distinto de  $u_{i_l}$ )

$$S_{u_j}^{x_j} S_{x_j}^{u_j} S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta' \equiv S_{u_j}^{x_j} S_{x_j}^{u_j} u_{i_l} \equiv u_{i_l} \equiv S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta'.$$

- Si  $y_i \not\equiv x_{i_l}$  para cada  $l = 1, \dots, r$  entonces

$$S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta' \equiv y_i,$$

luego por el Teorema 1.13 4) (usando que  $u_j$  no está en  $\theta \equiv y_i$ )

$$S_{u_j}^{x_j} S_{x_j}^{u_j} S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta' \equiv S_{u_j}^{x_j} S_{x_j}^{u_j} y_i \equiv y_i \equiv S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta'.$$

En cualquier caso se cumple lo deseado.

- Si  $\theta \equiv c_i$ , entonces  $\theta' \equiv c_i$  y claramente se cumple lo deseado.
- Si  $\theta \equiv R_i^n t_1 \dots t_n$ , entonces las variables ligadas de cada  $t_l$  estarán entre  $x_0, \dots, x_k$  con lo que, por hipótesis de inducción, se tiene que para cada  $l = 1, \dots, n$

$$S_{u_j}^{x_j} S_{x_j}^{u_j} S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} t'_l \equiv S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} t'_l$$

y así

$$\begin{aligned} S_{u_j}^{x_j} S_{x_j}^{u_j} S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta' &\equiv R_i^n S_{u_j}^{x_j} S_{x_j}^{u_j} S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} t'_1 \dots S_{u_j}^{x_j} S_{x_j}^{u_j} S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} t'_n \equiv \\ &R_i^n S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} t'_1 \dots S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} t'_n \equiv S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta' \end{aligned}$$

como buscábamos.

- Si  $\theta \equiv f_i^n t_1 \dots t_n$  es análogo al caso anterior.
- Si  $\theta \equiv \neg \alpha$ , entonces las variables ligadas de  $\alpha$  estarán entre  $x_0, \dots, x_k$  con lo que, por hipótesis de inducción, se tiene que

$$S_{u_j}^{x_j} S_{x_j}^{u_j} S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \alpha' \equiv S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \alpha'$$

y así

$$\begin{aligned} S_{u_j}^{x_j} S_{x_j}^{u_j} S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta' &\equiv \neg S_{u_j}^{x_j} S_{x_j}^{u_j} S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \alpha' \equiv \neg S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \alpha' \equiv \\ &S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta' \end{aligned}$$

como buscábamos.

- Si  $\theta \equiv \alpha \rightarrow \beta$ , entonces las variables ligadas de  $\alpha$  y de  $\beta$  estarán entre  $x_0, \dots, x_k$  con lo que, por hipótesis de inducción, se tiene que

$$S_{u_j}^{x_j} S_{x_j}^{u_j} S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \alpha' \equiv S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \alpha'$$

y

$$S_{u_j}^{x_j} S_{x_j}^{u_j} S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \beta' \equiv S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \beta'$$

Así

$$\begin{aligned} S_{u_j}^{x_j} S_{x_j}^{u_j} S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta' &\equiv S_{u_j}^{x_j} S_{x_j}^{u_j} S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \alpha' \rightarrow S_{u_j}^{x_j} S_{x_j}^{u_j} S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \beta' \equiv \\ &S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \alpha' \rightarrow S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \beta' \equiv S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta' \end{aligned}$$

como buscábamos.

- Si  $\theta \equiv \bigwedge x_l \alpha$ , entonces sabemos por la demostración del primer resultado antes del Teorema 2.16 que

$$S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta' \equiv \bigwedge u_l S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} S_{x_l}^{u_l} \alpha'. \quad (2.54)$$

Distinguimos entonces dos casos:

- Si  $u_j \equiv u_l$ , basta ver que  $x_j$  no está libre en  $S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta'$  pues usando el Teorema 1.13 2) (junto a (2.54) para obtener que  $u_j$  tampoco está libre) se obtiene lo deseado. Más aún, por (2.54) basta ver que  $x_j$  no está libre en

$$S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} S_{x_l}^{u_l} \alpha'.$$

Si lo estuviera, como  $x_j$  es distinta de cada  $u_{i_s}$  el Teorema 1.13 3) nos asegura que  $x_j \neq x_l$ , pero al ser  $u_j \equiv u_l$  se tiene que  $j = l$  y, por tanto,  $x_j \equiv x_l$  teniendo una contradicción.

- Si  $u_j \not\equiv u_l$ , como  $x_j$  es también distinto de  $u_l$  tenemos por (1.36) y (2.54) que

$$S_{u_j}^{x_j} S_{x_j}^{u_j} S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta' \equiv \bigwedge u_l S_{u_j}^{x_j} S_{x_j}^{u_j} S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} S_{x_l}^{u_l} \alpha'. \quad (2.55)$$

Ahora bien, las variables ligadas de  $\alpha$  estarán entre  $x_0, \dots, x_k$  con lo que, por hipótesis de inducción (teniendo en cuenta que  $j \neq l$ ), se tiene que

$$S_{u_j}^{x_j} S_{x_j}^{u_j} S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} S_{x_l}^{u_l} \alpha' \equiv S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} S_{x_l}^{u_l} \alpha', \quad (2.56)$$

luego juntando (2.54), (2.55) y (2.56) se obtiene lo deseado.

En cualquier caso se obtiene lo buscado.

- Si  $\theta \equiv x_l | \alpha$  es análogo al caso anterior.

Esto concluye la inducción y con ello la prueba. 



**Metateorema 2.20**

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal,  $\theta$  una expresión de  $\mathcal{L}$  cuyas variables ligadas están entre  $x_0, \dots, x_k$  y  $u_0, \dots, u_k$  otras variables (distintas entre sí y de los  $x_i$ ) que no estén en  $\theta$ . Entonces, para cada  $i = 0, \dots, k$  se cumple que

$$S_{u_i}^{x_i} S_{x_i}^{u_i} \theta' \equiv \theta'.$$

Lo demostraremos por inducción en la longitud de  $\theta$ :

- Si  $\theta \equiv y_i$ , entonces  $\theta' \equiv y_i$  y, como  $u_i$  no está en  $\theta$ , por el Teorema 1.13 4) se tiene que

$$S_{u_i}^{x_i} S_{x_i}^{u_i} \theta' \equiv S_{u_i}^{x_i} S_{x_i}^{u_i} \theta \equiv \theta \equiv \theta'.$$

- Si  $\theta \equiv c_i$ , entonces  $\theta' \equiv c_i$  y claramente se cumple lo deseado.
- Si  $\theta \equiv R_i^n t_1 \dots t_n$ , entonces las variables ligadas de cada  $t_j$  estarán entre  $x_0, \dots, x_k$  con lo que, por hipótesis de inducción, se tiene que para cada  $j = 1, \dots, n$

$$S_{u_i}^{x_i} S_{x_i}^{u_i} t'_j \equiv t'_j$$

y así

$$S_{u_i}^{x_i} S_{x_i}^{u_i} \theta' \equiv R_i^n S_{u_i}^{x_i} S_{x_i}^{u_i} t'_1 \dots S_{u_i}^{x_i} S_{x_i}^{u_i} t'_n \equiv R_i^n t'_1 \dots t'_n \equiv \theta'$$

como buscábamos.

- Si  $\theta \equiv f_i^n t_1 \dots t_n$  es análogo al caso anterior.
- Si  $\theta \equiv \neg \alpha$ , entonces las variables ligadas de  $\alpha$  estarán entre  $x_0, \dots, x_k$  con lo que, por hipótesis de inducción, se tiene que

$$S_{u_i}^{x_i} S_{x_i}^{u_i} \alpha' \equiv \alpha'$$

y así

$$S_{u_i}^{x_i} S_{x_i}^{u_i} \theta' \equiv \neg S_{u_i}^{x_i} S_{x_i}^{u_i} \alpha' \equiv \neg \alpha' \equiv \theta'$$

como buscábamos.

- Si  $\theta \equiv \alpha \rightarrow \beta$ , entonces las variables ligadas de  $\alpha$  y de  $\beta$  estarán entre  $x_0, \dots, x_k$  con lo que, por hipótesis de inducción, se tiene que

$$S_{u_i}^{x_i} S_{x_i}^{u_i} \alpha' \equiv \alpha'$$

y

$$S_{u_i}^{x_i} S_{x_i}^{u_i} \beta' \equiv \beta'.$$

Así

$$S_{u_i}^{x_i} S_{x_i}^{u_i} \theta' \equiv S_{u_i}^{x_i} S_{x_i}^{u_i} \alpha' \rightarrow S_{u_i}^{x_i} S_{x_i}^{u_i} \beta' \equiv \alpha' \rightarrow \beta' \equiv \theta'$$

como buscábamos.

- Si  $\theta \equiv \bigwedge x_j \alpha$ , entonces distinguimos dos casos:

- Si  $x_i$  no está libre en  $\theta$ , entonces por el segundo resultando antes del Teorema 2.16 se tiene que  $x_i$  tampoco estará libre en  $\theta'$ . Usando el mismo resultado tenemos que  $u_i$  tampoco está libre en  $\theta'$  (pues ni siquiera está en  $\theta$ ) con lo que por el Teorema 1.13 2) obtenemos que

$$S_{u_i}^{x_i} S_{x_i}^{u_i} \theta' \equiv S_{u_i}^{x_i} \theta' \equiv \theta'.$$

- Si  $x_i$  está libre en  $\theta$ , entonces  $x_i \neq x_j$ , luego  $i \neq j$  y, por tanto,  $u_i \neq u_j$ . Además, como  $x_i$  también es distinto de  $u_j$ , por (1.36) será

$$S_{u_i}^{x_i} S_{x_i}^{u_i} \theta' \equiv S_{u_i}^{x_i} S_{x_i}^{u_i} \bigwedge u_j S_{x_j}^{u_j} \alpha' \equiv S_{u_i}^{x_i} \bigwedge u_j S_{x_i}^{u_i} S_{x_j}^{u_j} \alpha' \equiv \bigwedge u_j S_{u_i}^{x_i} S_{x_i}^{u_i} S_{x_j}^{u_j} \alpha'. \quad (2.57)$$

Por otra parte, por el Metateorema 2.19 (teniendo en cuenta que  $i \neq j$ ) se tiene que

$$S_{u_i}^{x_i} S_{x_i}^{u_i} S_{x_j}^{u_j} \alpha' \equiv S_{x_j}^{u_j} \alpha', \quad (2.58)$$

luego juntando (2.57) y (2.58) concluimos con lo deseado.

En cualquier caso se obtiene lo buscado.

- Si  $\theta \equiv x_j | \alpha$  es análogo al caso anterior.

Esto concluye la inducción y con ello la prueba. 

Ahora sí podemos demostrar lo deseado:

Tenemos la demostración:

|      |                                                              |                                             |
|------|--------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|
| (1)  | $\theta$                                                     | Hipótesis                                   |
| (2)  | $S_{x_i}^{u_i} \alpha$                                       | EG 1                                        |
| (3)  | $S_{x_i}^{u_i} \alpha \leftrightarrow S_{x_i}^{u_i} \alpha'$ | Tma. lógico                                 |
| (4)  | $S_{x_i}^{u_i} \alpha'$                                      | SE 2, 3                                     |
| (5)  | $\bigwedge u_i S_{x_i}^{u_i} \alpha' \equiv \theta'$         | IG 4 ( $u_i$ no libre en 1)                 |
| (6)  | $\theta \rightarrow \theta'$                                 | Tma. deducción                              |
| (7)  | $\theta'$                                                    | Hipótesis                                   |
| (8)  | $S_{u_i}^{x_i} S_{x_i}^{u_i} \alpha'$                        | EG 7                                        |
| (9)  | $\alpha'$                                                    | R 8 (Mteo. 2.20)                            |
| (10) | $\alpha \leftrightarrow \alpha'$                             | Tma. lógico                                 |
| (11) | $\alpha$                                                     | SE 9, 10                                    |
| (12) | $\bigwedge x_i \alpha \equiv \theta$                         | IG 11 ( $x_i$ no libre en 7 <sup>17</sup> ) |
| (13) | $\theta' \rightarrow \theta$                                 | Tma. deducción                              |
| (14) | $\theta \leftrightarrow \theta'$                             | IB 6, 13                                    |

Esto claramente prueba el caso buscado. 

---

<sup>17</sup> Como  $x_i$  no está libre en  $\theta$ , por el segundo resultado previo al Teorema 2.16 se tiene que  $x_i$  no puede estar libre en  $\theta'$ .

## Página 79

**Nota 1:** ... luego ...

Por (IG).

**Nota 2:** En efecto ...

La demostración descrita es la siguiente (donde  $y$  es una variable distinta de  $x_i$  y de  $u_i$  que no está en  $\alpha'$  ni en  $S_{x_i}^{u_i}\alpha'$ ):

|      |                                                                                               |                                       |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------|
| (1)  | $\overset{1}{\forall}x_i\alpha'$                                                              | Hipótesis                             |
| (2)  | $\forall y \wedge x_i(\alpha' \leftrightarrow y = x_i)$                                       | SE 1, Tma. 2.9 3)                     |
| (3)  | $\wedge x_i(\alpha' \leftrightarrow y = x_i)$                                                 | EP 2 ( $y$ no libre en 1)             |
| (4)  | $S_{x_i}^{u_i}\alpha' \leftrightarrow y = u_i$                                                | EG 3                                  |
| (5)  | $\wedge u_i(S_{x_i}^{u_i}\alpha' \leftrightarrow y = u_i)$                                    | IG 4 ( $u_i$ no libre en 3 ni en 1)   |
| (6)  | $\forall y \wedge u_i(S_{x_i}^{u_i}\alpha' \leftrightarrow y = u_i)$                          | IP 5 ( $y$ no libre)                  |
| (7)  | $\overset{1}{\forall}u_i S_{x_i}^{u_i}\alpha'$                                                | SE 6, Tma. 2.9 3)                     |
| (8)  | $\overset{1}{\forall}x_i\alpha' \rightarrow \overset{1}{\forall}u_i S_{x_i}^{u_i}\alpha'$     | Tma. deducción                        |
| (9)  | $\overset{1}{\forall}u_i S_{x_i}^{u_i}\alpha'$                                                | Hipótesis                             |
| (10) | $\forall y \wedge u_i(S_{x_i}^{u_i}\alpha' \leftrightarrow y = u_i)$                          | SE 9, Tma. 2.9 3)                     |
| (11) | $\wedge u_i(S_{x_i}^{u_i}\alpha' \leftrightarrow y = u_i)$                                    | EP 10 ( $y$ no libre en 9)            |
| (12) | $S_{u_i}^{x_i}S_{x_i}^{u_i}\alpha' \leftrightarrow y = x_i$                                   | EG 11                                 |
| (13) | $\alpha' \leftrightarrow y = x_i$                                                             | R 12 (Mteo. 2.20)                     |
| (14) | $\wedge x_i(\alpha' \leftrightarrow y = x_i)$                                                 | IG 13 ( $x_i$ no libre en 9 ni en 11) |
| (15) | $\forall y \wedge x_i(\alpha' \leftrightarrow y = x_i)$                                       | IP 14 ( $y$ no libre)                 |
| (16) | $\overset{1}{\forall}x_i\alpha'$                                                              | SE 15, Tma. 2.9 3)                    |
| (17) | $\overset{1}{\forall}u_i S_{x_i}^{u_i}\alpha' \rightarrow \overset{1}{\forall}x_i\alpha'$     | Tma. deducción                        |
| (18) | $\overset{1}{\forall}x_i\alpha' \leftrightarrow \overset{1}{\forall}u_i S_{x_i}^{u_i}\alpha'$ | IB 8, 17                              |

En la demostración se ha tenido en cuenta:

- $y$  no está libre en  $\overset{1}{\forall}x_i\alpha'$  (Línea 3).

En efecto, como  $y \neq x_i$  y no está en  $\alpha'$ , por el Metateorema 1.5 se obtiene lo deseado.

- $u_i$  no está libre en  $\overset{1}{\forall}x_i\alpha'$  ni en  $\wedge x_i(\alpha' \leftrightarrow y = x_i)$  (Línea 5)

En efecto, como  $u_i \neq x_i$  y no está libre en  $\alpha'$  (pues no lo está en  $\alpha$  y, por el segundo resultado antes del Teorema 2.16, tampoco puede estarlo en  $\alpha'$ ) por el Metateorema 1.5 se tiene  $u_i$  no está libre en  $\overset{1}{\forall}x_i\alpha'$ .

Por otra parte,  $u_i$  no está libre en  $\wedge x_i(\alpha' \leftrightarrow y = x_i)$  pues no lo está en  $\alpha' \leftrightarrow y = x_i$  ya que es distinta de  $y, x_i$  y no está libre en  $\alpha'$  (por lo mencionado en el párrafo anterior).

- $y$  no está libre en  $\bigvee^1 u_i S_{x_i}^{u_i} \alpha'$  (Línea 11).

En efecto, como  $y \neq u_i$  y no está en  $S_{x_i}^{u_i} \alpha'$ , por el Metateorema 1.5 se obtiene lo deseado.

- $x_i$  no está libre en  $\bigvee^1 u_i S_{x_i}^{u_i} \alpha'$  ni en  $\bigwedge u_i (S_{x_i}^{u_i} \alpha' \leftrightarrow y = u_i)$  (Línea 14)

En efecto, como  $x_i \neq u_i$  y no está libre en  $S_{x_i}^{u_i} \alpha'$  (por el Teorema 1.13 3)), por el Metateorema 1.5 se tiene  $x_i$  no está libre en  $\bigvee^1 u_i S_{x_i}^{u_i} \alpha'$ .

Por otra parte,  $x_i$  no está libre en  $\bigwedge u_i (S_{x_i}^{u_i} \alpha' \leftrightarrow y = u_i)$  pues no lo está en  $S_{x_i}^{u_i} \alpha' \leftrightarrow y = u_i$  ya que es distinta de  $y, u_i$  y no está libre en  $S_{x_i}^{u_i} \alpha'$  (por lo mencionado en el párrafo anterior).

**Nota 3:** En total tenemos ...

Basta aplicar la regla (SE) a los teoremas lógicos  $\bigvee^1 x_i \alpha \leftrightarrow \bigvee^1 x_i \alpha'$  y  $\bigvee^1 x_i S_{x_i}^{u_i} \alpha'$ .

**Nota 4:** ... se sigue ...

Por (EG).

**Nota 5:** ... luego tenemos ...

Los siguientes resultados justifican la identidad mencionada en el texto pues  $u_i$  no está libre en  $x_i | \alpha$  (de hecho, ni siquiera está en dicho término).

### Metateorema 2.21

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal,  $\theta$  una expresión de  $\mathcal{L}$  cuyas variables ligadas están entre  $x_0, \dots, x_k$  y  $u_0, \dots, u_k$  otras variables (distintas entre sí y de los  $x_i$ ) que no estén en  $\theta$ . Entonces, para cualquier término  $t$  que no tenga a ningún  $u_i$  como variable libre, cualesquiera índices  $i_1, \dots, i_r$  entre  $0, \dots, k$  y cualquier  $j = 0, \dots, k$  distinto de  $i_1, \dots, i_r$  se cumple que

$$S_{u_j}^t S_{x_j}^{u_j} S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta' \equiv S_{x_j}^t S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta'.$$

Lo demostraremos por inducción en la longitud de  $\theta$ :

- Si  $\theta \equiv y_i$ , entonces  $\theta' \equiv y_i$  y tenemos dos casos:
  - Si  $y_i \equiv x_{i_l}$  para algún  $l = 1, \dots, r$  entonces

$$S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta' \equiv u_{i_l},$$

luego como  $u_{i_l} \neq x_j$  y  $j \neq i_l$

$$S_{u_j}^t S_{x_j}^{u_j} S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta' \equiv S_{u_j}^t S_{x_j}^{u_j} u_{i_l} \equiv u_{i_l} \equiv S_{x_j}^t u_{i_l} \equiv S_{x_j}^t S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta'.$$

- Si  $y_i \neq x_{i_l}$  para cada  $l = 1, \dots, r$  entonces

$$S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta' \equiv y_i,$$

luego

$$S_{u_j}^t S_{x_j}^{u_j} S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta' \equiv S_{u_j}^t S_{x_j}^{u_j} y_i$$

y

$$S_{x_j}^t S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta' \equiv S_{x_j}^t y_i.$$

Con ello, si  $y_i \equiv x_j$  entonces

$$S_{u_j}^t S_{x_j}^{u_j} S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta' \equiv t \equiv S_{x_j}^t S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta',$$

y si  $y_i \neq x_j$ , como también  $u_j \neq y_i$  (pues  $u_j$  no está en  $\theta$ ), se tiene que

$$S_{u_j}^t S_{x_j}^{u_j} S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta' \equiv y_i \equiv S_{x_j}^t S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta'.$$

En cualquier caso se tiene lo deseado.

En cualquier caso se cumple lo buscado.

- Si  $\theta \equiv c_i$ , entonces  $\theta' \equiv c_i$  y claramente se cumple lo deseado.
- Si  $\theta \equiv R_i^n t_1 \dots t_n$ , entonces las variables ligadas de cada  $t_l$  estarán entre  $x_0, \dots, x_k$  con lo que, por hipótesis de inducción, se tiene que para cada  $l = 1, \dots, n$

$$S_{u_j}^t S_{x_j}^{u_j} S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} t'_l \equiv S_{x_j}^t S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} t'_l$$

y así

$$\begin{aligned} S_{u_j}^t S_{x_j}^{u_j} S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta' &\equiv R_i^n S_{u_j}^t S_{x_j}^{u_j} S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} t'_1 \dots S_{u_j}^t S_{x_j}^{u_j} S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} t'_n \equiv \\ &R_i^n S_{x_j}^t S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} t'_1 \dots S_{x_j}^t S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} t'_n \equiv S_{x_j}^t S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta' \end{aligned}$$

como buscábamos.

- Si  $\theta \equiv f_i^n t_1 \dots t_n$  es análogo al caso anterior.
- Si  $\theta \equiv \neg \alpha$ , entonces las variables ligadas de  $\alpha$  estarán entre  $x_0, \dots, x_k$  con lo que, por hipótesis de inducción, se tiene que

$$S_{u_j}^t S_{x_j}^{u_j} S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \alpha' \equiv S_{x_j}^t S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \alpha'$$

y así

$$\begin{aligned} S_{u_j}^t S_{x_j}^{u_j} S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta' &\equiv \neg S_{u_j}^t S_{x_j}^{u_j} S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \alpha' \equiv \neg S_{x_j}^t S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \alpha' \equiv \\ &S_{x_j}^t S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta' \end{aligned}$$

como buscábamos.

- Si  $\theta \equiv \alpha \rightarrow \beta$ , entonces las variables ligadas de  $\alpha$  y de  $\beta$  estarán entre  $x_0, \dots, x_k$  con lo que, por hipótesis de inducción, se tiene que

$$S_{u_j}^t S_{x_j}^{u_j} S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \alpha' \equiv S_{x_j}^t S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \alpha'$$

y

$$S_{u_j}^t S_{x_j}^{u_j} S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \beta' \equiv S_{x_j}^t S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \beta'$$

Así

$$\begin{aligned} S_{u_j}^t S_{x_j}^{u_j} S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta' &\equiv S_{u_j}^t S_{x_j}^{u_j} S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \alpha' \rightarrow S_{u_j}^t S_{x_j}^{u_j} S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \beta' \equiv \\ &S_{x_j}^t S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \alpha' \rightarrow S_{x_j}^t S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \beta' \equiv S_{x_j}^t S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta' \end{aligned}$$

como buscábamos.

- Si  $\theta \equiv \bigwedge x_l \alpha$ , entonces sabemos por la demostración del primer resultado antes del Teorema 2.16 que

$$S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta' \equiv \bigwedge u_l S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} S_{x_l}^{u_l} \alpha'. \quad (2.59)$$

Distinguimos entonces dos casos:

- Si  $u_j \equiv u_l$ , basta ver que  $x_j$  no está libre en  $S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta'$  pues usando el Teorema 1.13 2) (junto a (2.59) para obtener que  $u_j$  tampoco está libre) se obtiene lo deseado. Más aún, por (2.59) basta ver que  $x_j$  no está libre en

$$S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} S_{x_l}^{u_l} \alpha'.$$

Si lo estuviera, como  $x_j$  es distinta de cada  $u_{i_s}$  el Teorema 1.13 3) nos asegura que  $x_j \neq x_l$ , pero al ser  $u_j \equiv u_l$  se tiene que  $j = l$  y, por tanto,  $x_j \equiv x_l$  teniendo una contradicción.

- Si  $u_j \not\equiv u_l$ , como  $x_j$  es también distinto de  $u_l$  y  $u_l$  no está libre en  $t$  tenemos por (1.36) y (2.59) que

$$S_{u_j}^t S_{x_j}^{u_j} S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta' \equiv \bigwedge u_l S_{u_j}^t S_{x_j}^{u_j} S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} S_{x_l}^{u_l} \alpha' \quad (2.60)$$

y

$$S_{x_j}^t S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} \theta' \equiv \bigwedge u_l S_{x_j}^t S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} S_{x_l}^{u_l} \alpha'. \quad (2.61)$$

Ahora bien, las variables ligadas de  $\alpha$  estarán entre  $x_0, \dots, x_k$  con lo que, por hipótesis de inducción (teniendo en cuenta que  $j \neq l$ ), se tiene que

$$S_{u_j}^t S_{x_j}^{u_j} S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} S_{x_l}^{u_l} \alpha' \equiv S_{x_j}^t S_{x_{i_1}}^{u_{i_1}} \dots S_{x_{i_r}}^{u_{i_r}} S_{x_l}^{u_l} \alpha', \quad (2.62)$$

luego juntando (2.60), (2.61) y (2.62) se obtiene lo deseado.

- Si  $\theta \equiv x_l | \alpha$  es análogo al caso anterior.

Esto concluye la inducción y con ello la prueba. 

**Metateorema 2.22**

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal,  $\theta$  una expresión de  $\mathcal{L}$  cuyas variables ligadas están entre  $x_0, \dots, x_k$  y  $u_0, \dots, u_k$  otras variables (distintas entre sí y de los  $x_i$ ) que no estén en  $\theta$ . Entonces, para cualquier término  $t$  que no tenga a ningún  $u_i$  como variable libre y para cada  $i = 0, \dots, k$  se cumple que

$$S_{u_i}^t S_{x_i}^{u_i} \theta' \equiv S_{x_i}^t \theta'.$$

Lo demostraremos por inducción en la longitud de  $\theta$ :

- Si  $\theta \equiv y_i$ , entonces  $\theta' \equiv y_i$  y tenemos dos casos:

- Si  $y_i \equiv x_i$  entonces

$$S_{u_i}^t S_{x_i}^{u_i} \theta' \equiv S_{u_i}^t u_i \equiv t \equiv S_{x_i}^t \theta'.$$

- Si  $y_i \not\equiv x_i$ , como  $u_i$  no está en  $\theta$ , se tiene que también  $u_i \not\equiv y_i$  y así

$$S_{u_i}^t S_{x_i}^{u_i} \theta' \equiv S_{u_i}^t y_i \equiv y_i \equiv S_{x_i}^t \theta'.$$

En cualquier caso se cumple lo deseado.

- Si  $\theta \equiv c_i$ , entonces  $\theta' \equiv c_i$  y claramente se cumple lo deseado.
- Si  $\theta \equiv R_i^n t_1 \dots t_n$ , entonces las variables ligadas de cada  $t_j$  estarán entre  $x_0, \dots, x_k$  con lo que, por hipótesis de inducción, se tiene que para cada  $j = 1, \dots, n$

$$S_{u_i}^t S_{x_i}^{u_i} t'_j \equiv S_{x_i}^t t'_j$$

y así

$$S_{u_i}^t S_{x_i}^{u_i} \theta' \equiv R_i^n S_{u_i}^t S_{x_i}^{u_i} t'_1 \dots S_{u_i}^t S_{x_i}^{u_i} t'_n \equiv R_i^n S_{x_i}^t t'_1 \dots S_{x_i}^t t'_n \equiv S_{x_i}^t \theta'$$

como buscábamos.

- Si  $\theta \equiv f_i^n t_1 \dots t_n$  es análogo al caso anterior.
- Si  $\theta \equiv \neg \alpha$ , entonces las variables ligadas de  $\alpha$  estarán entre  $x_0, \dots, x_k$  con lo que, por hipótesis de inducción, se tiene que

$$S_{u_i}^t S_{x_i}^{u_i} \alpha' \equiv S_{x_i}^t \alpha'$$

y así

$$S_{u_i}^t S_{x_i}^{u_i} \theta' \equiv \neg S_{u_i}^t S_{x_i}^{u_i} \alpha' \equiv \neg S_{x_i}^t \alpha' \equiv S_{x_i}^t \theta'$$

como buscábamos.

- Si  $\theta \equiv \alpha \rightarrow \beta$ , entonces las variables ligadas de  $\alpha$  y de  $\beta$  estarán entre  $x_0, \dots, x_k$  con lo que, por hipótesis de inducción, se tiene que

$$S_{u_i}^t S_{x_i}^{u_i} \alpha' \equiv S_{x_i}^t \alpha'$$

y

$$S_{u_i}^t S_{x_i}^{u_i} \beta' \equiv S_{x_i}^t \beta'$$

Así

$$S_{u_i}^t S_{x_i}^{u_i} \theta' \equiv S_{u_i}^t S_{x_i}^{u_i} \alpha' \rightarrow S_{u_i}^t S_{x_i}^{u_i} \beta' \equiv S_{x_i}^t \alpha' \rightarrow S_{x_i}^t \beta' \equiv S_{x_i}^t \theta'$$

como buscábamos.

- Si  $\theta \equiv \bigwedge x_j \alpha$ , entonces distinguimos dos casos:
  - Si  $x_i$  no está libre en  $\theta$ , entonces por el segundo resultando antes del Teorema 2.16 se tiene que  $x_i$  tampoco estará libre en  $\theta'$ . Usando el mismo resultado tenemos que  $u_i$  tampoco está libre en  $\theta'$  (pues ni siquiera está en  $\theta$ ) con lo que por el Teorema 1.13 2) obtenemos que

$$S_{u_i}^t S_{x_i}^{u_i} \theta' \equiv S_{u_i}^t \theta' \equiv \theta' \equiv S_{x_i}^t \theta'.$$

- Si  $x_i$  está libre en  $\theta$ , entonces  $x_i \neq x_j$ , luego  $i \neq j$  y, por tanto,  $u_i \neq u_j$ . Además, como  $x_i$  también es distinto de  $u_j$  y  $u_j$  no está libre en  $t$ , por (1.36) será

$$S_{u_i}^t S_{x_i}^{u_i} \theta' \equiv S_{u_i}^t S_{x_i}^{u_i} \bigwedge u_j S_{x_j}^{u_j} \alpha' \equiv S_{u_i}^t \bigwedge u_j S_{x_i}^{u_i} S_{x_j}^{u_j} \alpha' \equiv \bigwedge u_j S_{u_i}^t S_{x_i}^{u_i} S_{x_j}^{u_j} \alpha' \quad (2.63)$$

y

$$S_{x_i}^t \theta' \equiv S_{x_i}^t \bigwedge u_j S_{x_j}^{u_j} \alpha' \equiv \bigwedge u_j S_{x_i}^t S_{x_j}^{u_j} \alpha'. \quad (2.64)$$

Por otra parte, por el Metateorema 2.21 (teniendo en cuenta que  $i \neq j$ ) se tiene que

$$S_{u_i}^t S_{x_i}^{u_i} S_{x_j}^{u_j} \alpha' \equiv S_{x_i}^t S_{x_j}^{u_j} \alpha', \quad (2.65)$$

luego juntando (2.63), (2.64) y (2.65) concluimos con lo deseado.

En cualquier caso se obtiene lo buscado.

- Si  $\theta \equiv x_j | \alpha$  es análogo al caso anterior.

Esto concluye la inducción y con ello la prueba. 

**Nota 6:** ... Así pues ... luego la unicidad implica ...

La demostración descrita es la siguiente (donde  $y$  es una variable que no está en  $S_{x_i}^{u_i} \alpha'$ ,  $x_i | \alpha$  y distinta de  $u_i$ ):

|      |                                                                                                                                               |                  |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| (1)  | $\bigvee^1 x_i \alpha$                                                                                                                        | Hipótesis        |
| (2)  | $\bigvee^1 x_i \alpha \leftrightarrow \bigvee^1 u_i S_{x_i}^{u_i} \alpha'$                                                                    | Tma. lógico      |
| (3)  | $\bigvee^1 u_i S_{x_i}^{u_i} \alpha'$                                                                                                         | SE 1, 2          |
| (4)  | $S_{x_i}^{x_i   \alpha} \alpha$                                                                                                               | DP 1             |
| (5)  | $S_{u_i}^{u_i   S_{x_i}^{u_i} \alpha'} S_{x_i}^{u_i} \alpha'$                                                                                 | DP 3             |
| (6)  | $\bigwedge x_i (\alpha \leftrightarrow \alpha')$                                                                                              | Tma. lógico      |
| (7)  | $S_{x_i}^{x_i   \alpha} \alpha \leftrightarrow S_{x_i}^{x_i   \alpha} \alpha'$                                                                | EG 6             |
| (8)  | $S_{x_i}^{x_i   \alpha} \alpha'$                                                                                                              | SE 4, 7          |
| (9)  | $S_{u_i}^{x_i   \alpha} S_{x_i}^{u_i} \alpha'$                                                                                                | R 8 (Mteo. 2.22) |
| (10) | $\bigvee u_i S_{x_i}^{u_i} \alpha' \wedge \bigwedge u_i y (S_{x_i}^{u_i} \alpha' \wedge S_{u_i}^y S_{x_i}^{u_i} \alpha' \rightarrow y = u_i)$ | SE 3, Teo. 2.12  |
| (11) | $\bigwedge u_i y (S_{x_i}^{u_i} \alpha' \wedge S_{u_i}^y S_{x_i}^{u_i} \alpha' \rightarrow y = u_i)$                                          | EC 10            |



|      |                                                                                                                                                                    |                |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| (12) | $S_{u_i}^{x_i \alpha} S_{x_i}^{u_i\alpha'} \wedge S_y^{u_i S_{x_i}^{u_i\alpha'}} S_y^{u_i} S_{x_i}^{u_i\alpha'} \rightarrow u_i S_{x_i}^{u_i\alpha'} = x_i \alpha$ | EG 11          |
| (13) | $S_{u_i}^{u_i S_{x_i}^{u_i\alpha'}} S_{x_i}^{u_i\alpha'} \leftrightarrow S_y^{u_i S_{x_i}^{u_i\alpha'}} S_y^{u_i} S_{x_i}^{u_i\alpha'}$                            | Mteo. 2.3      |
| (14) | $S_y^{u_i S_{x_i}^{u_i\alpha'}} S_y^{u_i} S_{x_i}^{u_i\alpha'}$                                                                                                    | SE 5, 13       |
| (15) | $S_{u_i}^{x_i \alpha} S_{x_i}^{u_i\alpha'} \wedge S_y^{u_i S_{x_i}^{u_i\alpha'}} S_y^{u_i} S_{x_i}^{u_i\alpha'}$                                                   | IC 9, 14       |
| (16) | $u_i S_{x_i}^{u_i\alpha'} = x_i \alpha$                                                                                                                            | MP 12, 15      |
| (17) | $x_i \alpha = u_i S_{x_i}^{u_i\alpha'}$                                                                                                                            | SI 16          |
| (18) | $\bigvee_1 x_i\alpha \rightarrow x_i \alpha = u_i S_{x_i}^{u_i\alpha'}$                                                                                            | Tma. deducción |
| (19) | $\bigvee_1 x_i\alpha \rightarrow \theta = \theta'$                                                                                                                 | R 18           |

En la demostración se ha tenido en cuenta:

- En la línea 12 se usa la regla (EG) dos veces.

En el primer uso se tiene

$$S_{u_i}^{x_i|\alpha} \left( \bigwedge y (S_{x_i}^{u_i\alpha'} \wedge S_y^{u_i} S_{x_i}^{u_i\alpha'} \rightarrow y = u_i) \right),$$

y como  $y \neq u_i$  e  $y$  no está libre en  $x_i|\alpha$ , por (1.36) obtenemos

$$\bigwedge y S_{u_i}^{x_i|\alpha} \left( S_{x_i}^{u_i\alpha'} \wedge S_y^{u_i} S_{x_i}^{u_i\alpha'} \rightarrow y = u_i \right).$$

Como  $u_i \neq y$ , el Teorema 1.13 3) nos da que  $u_i$  no está libre en  $S_y^{u_i} S_{x_i}^{u_i\alpha'}$  y por el Teorema 1.13 2) la fórmula anterior se reescribe como

$$\bigwedge y \left( S_{u_i}^{x_i|\alpha} S_{x_i}^{u_i\alpha'} \wedge S_y^{u_i} S_{x_i}^{u_i\alpha'} \rightarrow y = x_i|\alpha \right).$$

Ahora, con el segundo uso de (EG) se tiene

$$S_y^{u_i|S_{x_i}^{u_i\alpha'}} \left( S_{u_i}^{x_i|\alpha} S_{x_i}^{u_i\alpha'} \wedge S_y^{u_i} S_{x_i}^{u_i\alpha'} \rightarrow y = x_i|\alpha \right),$$

y como  $y$  no está libre en  $S_{u_i}^{x_i|\alpha} S_{x_i}^{u_i\alpha'}$  (pues no está en  $x_i|\alpha$  ni en  $S_{x_i}^{u_i\alpha'}$ ) ni en  $x_i|\alpha$ , por el Teorema 1.13 2) obtenemos la fórmula

$$S_{u_i}^{x_i|\alpha} S_{x_i}^{u_i\alpha'} \wedge S_y^{u_i|S_{x_i}^{u_i\alpha'}} S_y^{u_i} S_{x_i}^{u_i\alpha'} \rightarrow u_i|S_{x_i}^{u_i\alpha'} = x_i|\alpha.$$

- En la línea 13 el uso del Metateorema 2.3 es válido pues  $y$  no está libre en  $S_{x_i}^{u_i\alpha'}$  ni por tanto en  $u_i|S_{x_i}^{u_i\alpha'}$ .

**Nota 7:** ... tenemos también ...

Basta utilizar la regla (SE) junto al Teorema 2.11 1) y el teorema lógico  $\bigvee_1 x_i\alpha \leftrightarrow \bigvee_1 u_i S_{x_i}^{u_i\alpha'}$ .

**Nota 8:** ... implica entonces ...

La demostración descrita es la siguiente:

|     |                                                                                      |                    |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|
| (1) | $\neg \bigvee^1 x_i \alpha$                                                          | Hipótesis          |
| (2) | $\bigvee^1 x_i \alpha \leftrightarrow \bigvee^1 u_i S_{x_i}^{u_i} \alpha'$           | Tma. lógico        |
| (3) | $\neg \bigvee^1 x_i \alpha \leftrightarrow \neg \bigvee^1 u_i S_{x_i}^{u_i} \alpha'$ | SE 2, Tma. 2.11 1) |
| (4) | $\neg \bigvee^1 u_i S_{x_i}^{u_i} \alpha'$                                           | SE 1, 3            |
| (5) | $x_i   \alpha = x   x = x$                                                           | DI 1               |
| (6) | $u_i   S_{x_i}^{u_i} \alpha' = x   x = x$                                            | DI 4               |
| (7) | $x   x = x = u_i   S_{x_i}^{u_i} \alpha'$                                            | SI 6               |
| (8) | $x_i   \alpha = u_i   S_{x_i}^{u_i} \alpha'$                                         | TI 5, 7            |
| (8) | $\neg \bigvee^1 x_i \alpha \rightarrow x_i   \alpha = u_i   S_{x_i}^{u_i} \alpha'$   | Tma. deducción     |
| (9) | $\neg \bigvee^1 x_i \alpha \rightarrow \theta = \theta'$                             | R 8                |

**Nota 9:** ... en ambos casos ...

La demostración se concluye formalmente de la siguiente forma:

|     |                                                                                                   |             |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| (1) | $\bigvee^1 x_i \alpha \rightarrow \theta = \theta'$                                               | Tma. lógico |
| (2) | $\neg \bigvee^1 x_i \alpha \rightarrow \theta = \theta'$                                          | Tma. lógico |
| (3) | $\left( \bigvee^1 x_i \alpha \vee \neg \bigvee^1 x_i \alpha \right) \rightarrow \theta = \theta'$ | Dil 1, 2    |
| (4) | $\bigvee^1 x_i \alpha \vee \neg \bigvee^1 x_i \alpha$                                             | TND         |
| (5) | $\theta = \theta'$                                                                                | MP 3, 4     |

**Nota 10:** ... suprimiéramos algún axioma en  $K_{\mathcal{L}}$  ...

Si suprimimos uno de los ocho axiomas de  $K_{\mathcal{L}}$  (más bien, uno de los ocho esquemas de axioma), siempre podemos encontrar un caso particular de dicho axioma que no será demostrable a partir del resto.

La idea para ver esta independencia en los axiomas de  $K_{\mathcal{L}}$  es cambiar ligeramente la definición de satisfacción de una expresión en un modelo para que, con esta nueva definición, todos los axiomas salvo el que hemos suprimido sean lógicamente válidos y tanto (MP) como (IG) sigan siendo reglas de inferencia semánticas. Haciendo esto con cuidado es posible probar una versión del teorema de corrección para esta nueva semántica y este nuevo sistema deductivo formal, que denotaremos por  $K'_{\mathcal{L}}$ , el cual es idéntico a  $K_{\mathcal{L}}$  salvo por el axioma eliminado. Una vez obtenido todo esto observamos que como el axioma eliminado no es lógicamente válido (en esta nueva semántica) no puede ser un teorema de  $K'_{\mathcal{L}}$  y esto significa que, en efecto, no es posible demostrar el axioma eliminado a partir de los demás.

EN PROCESO

# Capítulo 3

## Teorías axiomáticas

### Página 81

**Nota 1:** En efecto ...

Veamos con detalle que si  $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  son fórmulas de  $\mathcal{L}$  y  $\Gamma$  es el conjunto de axiomas propios de  $T$ , entonces

$$\alpha_1 \cdots, \alpha_n \vdash_T \alpha \text{ syss } \alpha_1, \dots, \alpha_n, \Gamma \vdash \alpha.$$

En particular, que

$$\vdash_T \alpha \text{ syss } \Gamma \vdash \alpha.$$

Una sucesión de fórmulas en  $\mathcal{L}$  es una deducción en  $T$  de una fórmula  $\alpha$  con premisas en  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  si cada fórmula de la sucesión es un axioma de  $T$ , una de las premisas o una consecuencia inmediata de fórmulas anteriores en la sucesión y la última fórmula de la sucesión es  $\alpha$ . Ahora bien, como los axiomas de  $K_{\mathcal{L}}$  están incluidos en los de  $T$  y las reglas de inferencia primitiva son las mismas, tenemos que esta sucesión de fórmulas será una deducción en  $K_{\mathcal{L}}$  con premisas en  $\Gamma \cup \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ , pues cada fórmula de la sucesión que sea un axioma propio de  $T$  o una de las fórmulas  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  no será más que una premisa en la deducción en  $K_{\mathcal{L}}$ .

Recíprocamente, si  $\alpha$  es una consecuencia de  $\Gamma \cup \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  en  $K_{\mathcal{L}}$ , entonces tenemos una deducción en  $K_{\mathcal{L}}$  con premisas en  $\Gamma \cup \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  cuya última fórmula es  $\alpha$ . Así pues, cada fórmula en la deducción será un axioma propio de  $T$ , un axioma lógico, una de las fórmulas  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  o una consecuencia inmediata de fórmulas anteriores. Como las reglas de inferencia primitiva de  $T$  son las mismas que las de  $K_{\mathcal{L}}$  y los axiomas de  $T$  incluyen a los de  $K_{\mathcal{L}}$ , concluimos que la sucesión de fórmulas que conforman la deducción es también una deducción de  $\alpha$  en  $T$  con premisas en  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  donde cada premisa distinta de las  $\alpha_i$  pasa a ser un axioma de  $T$ .

Para el caso particular donde no consideramos las premisas  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  se razona de forma completamente análoga simplemente eliminando en el razonamiento anterior toda mención a estas fórmulas.

## Página 82

**Nota 1:** ... modelo  $M$  de sus axiomas ...

En principio, a la hora de comprobar si un modelo  $M$  de un lenguaje formal  $\mathcal{L}$  es un modelo de una teoría axiomática  $T$  sobre dicho lenguaje, debemos comprobar que todos sus axiomas, tanto los propios como los lógicos, son verdaderos en  $M$ . Sin embargo, como los axiomas lógicos son fórmulas lógicamente válidas serán verdaderos en cualquier modelo, con lo que para comprobar que  $M$  es un modelo de  $T$  bastará ver que es un modelo de sus axiomas propios.

En resumen, un modelo  $M$  de un lenguaje formal es un modelo de una teoría axiomática si, y solo si, es un modelo de sus axiomas propios.

Observemos también que el hecho de que los axiomas lógicos sean fórmulas lógicamente válidas nos muestra que todo modelo de un lenguaje formal es un modelo de  $K_{\mathcal{L}}$ .

**Nota 2:** ... son verdaderos en  $M$  ... ninguna fórmula falsa ...

Si  $\Gamma$  es el conjunto de axiomas propios de  $T$  y  $\alpha$  es un teorema de  $T$ , por lo dicho en la **Nota pág. 81** tenemos que  $\Gamma \vdash \alpha$ . Por el teorema de corrección (Teorema 2.6) sabemos entonces que  $\Gamma \models \alpha$  y esto significa precisamente que  $\alpha$  será verdadera en todo modelo de  $\Gamma$  que, por la nota anterior, son precisamente los modelos de  $T$ .

Por otra parte, si  $\alpha$  es falsa en un modelo  $M$  de  $T$  entonces no puede ser un teorema de  $T$  pues de serlo, por lo argumentado anteriormente, debería ser verdadera en  $M$  y una fórmula no puede ser verdadera y falsa en un mismo modelo (ver pág. 37).

**Nota 3: Ejemplo**

Veamos que aunque en una teoría axiomática  $T$  los axiomas se enuncian con unas variables fijas, cualquier otra versión de los mismos resultante de sustituir de manera simultánea sus variables por otras variables distintas dos a dos es deducible en  $T$ . En general, tenemos el siguiente resultado:

### Metateorema 3.1

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal,  $\alpha$  una fórmula con variables  $x_1, \dots, x_n$  e  $y_1, \dots, y_n$  variables distintas dos a dos. Se cumple que

$$\alpha \vdash \underline{\alpha}$$

siendo  $\underline{\alpha}$  la fórmula resultante de sustituir de manera simultánea<sup>a</sup> las variables  $x_1, \dots, x_n$  por  $y_1, \dots, y_n$  respectivamente.

<sup>a</sup> Es decir, que la sustitución no se hace de forma sucesiva, sino que se cambian todas las apariciones de las  $x_i$  por las  $y_i$  al mismo tiempo. Por ejemplo, si  $\alpha \equiv x_1 = x_2$ ,  $y_1 \equiv x_2$  e  $y_2 \equiv x_1$  se tiene que  $\underline{\alpha} \equiv x_2 = x_1$ , pero si la sustitución se hiciera de forma sucesiva, al sustituir  $x_1$  obtendríamos  $y_1 = x_2 \equiv x_2 = x_2$ , y al sustituir  $y_2$  tendríamos la fórmula  $y_2 = y_2 \equiv x_1 = x_1$  que no es lo que buscábamos.

Esta sustitución de manera simultánea es claramente equivalente a sustituir de manera sucesiva las variables  $x_1, \dots, x_n$  por unas variables  $u_1, \dots, u_n$  que sean distintas tanto de  $x_1, \dots, x_n$  como de  $y_1, \dots, y_n$ , y después sustituir (también de manera sucesiva) cada  $u_i$  por  $y_i$ .

Observemos que este resultado nos da lo deseado pues si  $T$  es una teoría axiomática y  $\alpha$  uno de sus axiomas, aplicando este resultado obtenemos que  $\alpha \vdash \underline{\alpha}$ , luego que  $\vdash_T \underline{\alpha}$ , siendo  $\underline{\alpha}$  cualquier versión del axioma resultante de sustituir sus variables de manera simultánea por otras distintas dos a dos.

Por tanto, en cualquier teoría axiomática basta especificar los axiomas para unas variables concretas, pero podremos utilizar cualquier versión de los mismos con otras variables pues, como hemos visto, estas versiones son deducibles en la teoría.

Además, el resultado también nos muestra que los teoremas de  $T$  podemos enunciarlos con las variables que queramos y de dicha versión podemos deducir cualquier otra con las variables que nos interesen.

El único punto que requiere un poco más de atención es aquellas teorías donde aparezcan esquemas axiomáticos (por ejemplo AP o  $Z^*$ ). En dichos casos podríamos igualmente enunciar el esquema axiomático con las variables “extra” fijadas, pero dado que igualmente tenemos ya una cantidad infinita de axiomas, será más sencillo considerar directamente que tenemos un axioma distinto para cada fórmula y, fijada una fórmula, que tenemos un axioma distinto para cualquier elección de las posibles variables extra que aparezcan en el esquema axiomático<sup>1</sup> (respetando siempre las restricciones que pueda haber sobre estas variables). Por ejemplo, para  $Z^*$  (ver la Definición 3.24) tenemos que para cada fórmula  $\phi$  de  $\mathcal{L}_{tc}$ , cualesquiera variables  $x, u$  y cualquier variable  $y$  que no esté libre en  $\phi$  la fórmula

$$\bigwedge x \bigvee y \bigwedge u (u \in y \leftrightarrow u \in x \wedge \phi)$$

será un axioma de  $Z^*$ .

Probemos el Metateorema 3.1 para finalizar:

Consideremos las variables  $u_1, \dots, u_n$  que sean distintas de  $x_1, \dots, x_n$  (luego no están en  $\alpha$ ) y de  $y_1, \dots, y_n$ . Por la regla (SE) y el Teorema 2.16 obtenemos entonces  $\alpha'$  y aplicando (IG) y (EG)  $n$  veces obtenemos  $\beta \equiv S_{x_1}^{u_1} \dots S_{x_n}^{u_n} \alpha'$ . Ahora bien, por el Metateorema 2.12 sabemos que  $\alpha'$  es la fórmula obtenida de sustituir cada aparición ligada de  $x_i$  en  $\alpha$  por  $u_i$  y por el Metateorema 2.14 sabemos que  $\beta$  es la fórmula resultante de sustituir cada aparición de  $x_i$  en  $\alpha'$  por  $u_i$ . Juntando ambos resultados tenemos que  $\beta$  es la fórmula obtenida de sustituir cada aparición de  $x_i$  en  $\alpha$  por  $u_i$ <sup>2</sup>. Así, las variables de  $\beta$  son  $u_1, \dots, u_n$ , luego son distintas de  $y_1, \dots, y_n$  (y estas claramente no están en  $\beta$ ), con lo que por exactamente el mismo razonamiento obtenemos  $\gamma \equiv S_{u_1}^{y_1} \dots S_{u_n}^{y_n} \beta'$  que será la fórmula resultante de sustituir cada aparición de  $u_i$  en  $\beta$  por  $y_i$ . Con esto podemos concluir pues claramente se tiene que  $\underline{\alpha} \equiv \gamma$ . 

<sup>1</sup> Observemos que con esto no “cambiamos nada” en la teoría, pues las teorías obtenidas considerando una u otra elección tendrán los mismos teoremas. En un sentido es claro y para el otro consideremos que las variables fijadas en el esquema axiomático son  $x_1, \dots, x_n$  y que  $\alpha$  es una versión del esquema axiomático para cierta fórmula  $\phi$  de modo que las variables fijadas se han sustituido respectivamente por  $z_1, \dots, z_n$  y que las variables de  $\phi$  son  $y_1, \dots, y_m, z_{i_1}, \dots, z_{i_p}$ . Entonces, podemos considerar la fórmula  $\underline{\phi}$  resultante de sustituir cada variable  $z_{i_j}$  por  $x_{i_j}$  y obtener el axioma  $\beta$  para la fórmula  $\underline{\phi}$ , que tendrá por variables  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$ . Si sustituimos las variables de  $\beta$  por  $z_1, \dots, z_n, y_1, \dots, y_m$  obtenemos  $\alpha$  y por el Metateorema 3.1 concluimos que  $\alpha$  es un teorema de la teoría.

**Nota 4:** ... axiomas de Peano ...

Una pregunta que podría tener el lector es por qué razón incluimos en el lenguaje de la aritmética los funtores  $+$ ,  $\cdot$  y ahora en la aritmética de Peano los axiomas del (AP3) al (AP6). ¿No podrían acaso definirse la suma y el producto mediante el funtor sucesión? La respuesta es que no y puede consultarse el porqué en el Anexo A.

**Nota 5:** ... cumple  $\mathbb{N} \models \text{AP}$  ...

En efecto, veamos que para cada axioma  $\alpha$  de AP se cumple que  $\mathbb{N} \models \alpha$  utilizando para ello la definición informal de los naturales que se da en la página xxxviii (ver **Nota** **pág. xxxviii**).

Fijada  $v$  una valoración arbitraria de  $\mathbb{N}$  tenemos:

1.  $\mathbb{N} \models (\wedge x x' \neq 0) [v]$  syss para todo natural  $n$  se cumple  $\mathbb{N} \models (x' \neq 0) [v_x^n]$ , lo cual se cumple syss no se satisface  $\mathbb{N} \models (x' = 0) [v_x^n]$ , es decir, syss no se satisface que el sucesor de  $n$  es 0.

Esto último es cierto pues 0 y el sucesor de  $n$  no pueden ocupar el mismo lugar en la sucesión de los naturales, ya que en dicho caso  $n$  precedería a 0, pero éste es el primer natural.

2.  $\mathbb{N} \models (\wedge xy(x' = y' \rightarrow x = y)) [v]$  syss para todo par de naturales  $n, m$  se cumple  $\mathbb{N} \models (x' = y' \rightarrow x = y) [v_{xy}^{nm}]$ , lo cual se da si, y solo si, siempre que se cumple  $\mathbb{N} \models (x' = y') [v_{xy}^{nm}]$ , entonces también se cumple  $\mathbb{N} \models (x = y) [v_{xy}^{nm}]$ .

Sin más, si se cumple que  $\mathbb{N} \models (x' = y') [v_{xy}^{nm}]$ , entonces tenemos que el sucesor de  $n$  es igual al sucesor de  $m$ , luego concluimos que  $n \equiv m^3$ , es decir, que  $\mathbb{N} \models (x = y) [v_{xy}^{nm}]$  como queríamos ver.

3.  $\mathbb{N} \models (\wedge x(x + 0 = x)) [v]$  syss para cada natural  $n$  se cumple  $\mathbb{N} \models (x + 0 = x) [v_x^n]$ , es decir, se cumple que  $n + 0 \equiv n$ , lo cual es precisamente el Metateorema 0.4 (i).
4.  $\mathbb{N} \models (\wedge xy(x + y' = (x + y)')) [v]$  syss para cada par de naturales  $n, m$  se cumple  $\mathbb{N} \models (x + y' = (x + y)') [v_{xy}^{nm}]$ , es decir, se cumple que  $n + m' \equiv (n + m)'$ , lo cual es precisamente el Metateorema 0.4 (ii).

<sup>2</sup> Si  $a_i, a'_i$  y  $b_i$  son el  $i$ -ésimo símbolo de  $\alpha, \alpha'$  y  $\beta$  respectivamente tenemos:

- Si  $a_i$  es distinto de cada variable  $x_i$ , entonces  $a'_i \equiv a_i$  y  $b_i \equiv a'_i \equiv a_i$ .
- Si  $a_i \equiv x_j$  y  $x_j$  aparece ligada en la posición  $i$ -ésima de  $\alpha$ , entonces  $a'_i \equiv u_j$  y como  $u_j \neq x_l$  para cada  $l = 1, \dots, n$ ,  $b_i \equiv a'_i \equiv u_j$ .
- Si  $a_i \equiv x_j$  y  $x_j$  no aparece ligada en la posición  $i$ -ésima de  $\alpha$ , entonces  $a'_i \equiv a_i \equiv x_j$ , luego  $b_i \equiv u_j$ .

Por tanto, como por los Metateoremas 1.6 y 2.15  $\beta$  tiene la misma longitud que  $\alpha$ , obtenemos que, en efecto,  $\beta$  es la fórmula resultante de sustituir cada  $x_i$  en  $\alpha$  por  $u_i$ .

<sup>3</sup> El natural  $n$  ocupará una posición específica en la sucesión de los natural y su siguiente ocupará la, valga la redundancia, siguiente posición. Ahora bien, como el siguiente de  $n$  es también el siguiente de  $m$ , tenemos que  $m$  debe ocupar el mismo lugar que  $n$  en la sucesión de los naturales, luego que ambos deben ser iguales.

5.  $\mathbb{N} \models (\bigwedge x (x \cdot 0 = 0)) [v]$  syss para cada natural  $n$  se cumple  $\mathbb{N} \models (x \cdot 0 = 0) [v_x^n]$ , es decir, se cumple que  $n \cdot 0 \equiv 0$ , lo cual es así por definición.
6.  $\mathbb{N} \models (\bigwedge xy (xy' = xy + x)) [v]$  syss para cada par de naturales  $n, m$  se cumple  $\mathbb{N} \models (xy' = xy + x) [v_{xy}^{nm}]$ , es decir, se cumple que  $n \cdot m' \equiv (n \cdot m) + n$ , lo cual es precisamente el Metateorema 0.6.
7.  $\mathbb{N} \models (\phi(0) \wedge \bigwedge x (\phi(x) \rightarrow \phi(x')) \rightarrow \bigwedge x \phi(x)) [v]$  syss se cumple que siempre que se satisfaga

$$\mathbb{N} \models S_x^0 \phi[v] \quad \text{y} \quad \mathbb{N} \models \left( \bigwedge x (\phi \rightarrow S_x^{x'} \phi) \right) [v]$$

también se cumple que  $\mathbb{N} \models (\bigwedge x \phi) [v]$ .

Por el Teorema 1.12 la primera parte de la hipótesis se cumple syss  $\mathbb{N} \models \phi[v_x^0]$ <sup>4</sup>.

Por otra parte, la segunda parte de la hipótesis se cumple syss para cada natural  $n$  se tiene que  $\mathbb{N} \models (\phi \rightarrow S_x^{x'} \phi) [v_x^n]$ , es decir, si siempre que se cumple que  $\mathbb{N} \models \phi[v_x^n]$ , entonces también se cumple que  $\mathbb{N} \models S_x^{x'} \phi[v_x^n]$ . Empleando de nuevo el Teorema 1.12 (y la Nota 1 pág. 20) obtenemos que

$$\mathbb{N} \models S_x^{x'} \phi[v_x^n] \text{ syss } \mathbb{N} \models \phi \left[ v_{xx}^{n\mathbb{N}(x') [v_x^n]} \right] \text{ syss } \mathbb{N} \models \phi \left[ v_x^{n'} \right].$$

Por tanto, la segunda parte de la hipótesis se cumple syss para cada natural  $n$  se tiene que siempre que se cumple que  $\mathbb{N} \models \phi[v_x^n]$ , entonces también se cumple que  $\mathbb{N} \models \phi[v_x^{n'}]$ .

Por último, la conclusión se cumple syss para todo natural  $n$  se satisface  $\mathbb{N} \models \phi[v_x^n]$ .

En definitiva, queremos ver que si se cumplen

- (i)  $\mathbb{N} \models \phi[v_x^0]$ ,
- (ii) Para cada natural  $n$  siempre que se cumple que  $\mathbb{N} \models \phi[v_x^n]$ , entonces también se cumple que  $\mathbb{N} \models \phi[v_x^{n'}]$ ,

necesariamente debe cumplirse que para cada natural  $n$  se tiene que  $\mathbb{N} \models \phi[v_x^n]$ .

Ahora bien, esto no es más que el principio de inducción (informal) (Metateorema 0.1) para la propiedad<sup>5</sup>

$$P(n) \equiv \mathbb{N} \models \phi[v_x^n],$$

con lo cual concluimos que, en efecto, se cumple lo deseado.

Esto concluye la prueba de cada axioma y obtenemos que, en efecto,  $\mathbb{N} \models \text{AP}$ . 

<sup>4</sup> Obsérvese que el “0” que aparece de superíndice en “ $v$ ” no es la constante cero, sino el número natural cero.

<sup>5</sup> Observemos que  $P$  es una propiedad bien definida sobre los números naturales, pues sea cual sea la formula  $\phi$  la satisfacción en un modelo respecto a una valoración está perfectamente definida.

## Página 83

**Nota 1:** ...donde hemos usado de nuevo 1.12 ...

Por el Teorema 1.12 y la **Nota 1** pág. 20 obtenemos que

$$\mathbb{N} \models S_x^{x'} \phi[v_x^a] \text{ syss } \mathbb{N} \models \phi \left[ v_{xx}^{n\mathbb{N}(x')[v_x^a]} \right] \text{ syss } \mathbb{N} \models \phi \left[ v_x^{a'} \right] \text{ syss } \mathbb{N} \models \phi \left[ v_x^{a+1} \right]$$

tal y como se busca.

**Nota 2:** ... si y sólo si lo son sus axiomas ...

En efecto, si  $\Gamma$  son los axiomas propios de  $T$  y  $T$  es contradictoria (consistente), entonces (no) existe una (ninguna) fórmula  $\alpha$  de  $\mathcal{L}$  tal que  $\vdash_T \alpha$  y  $\vdash_T \neg\alpha$ , luego por la **Nota pág. 81**, (no) existe una (ninguna) fórmula  $\alpha$  de  $\mathcal{L}$  tal que  $\Gamma \vdash \alpha$  y  $\Gamma \vdash \neg\alpha$  y con ello  $\Gamma$  es contradictorio (consistente).

Recíprocamente, si  $\Gamma$  es el conjunto de axiomas propios de  $T$  y es contradictorio (consistente), entonces (no) existe una (ninguna) fórmula  $\alpha$  de  $\mathcal{L}$  tal que  $\Gamma \vdash \alpha$  y  $\Gamma \vdash \neg\alpha$ , luego por la **Nota pág. 81**, (no) existe una (ninguna) fórmula  $\alpha$  de  $\mathcal{L}$  tal que  $\vdash_T \alpha$  y  $\vdash_T \neg\alpha$  y con ello  $T$  es contradictoria (consistente).

## Página 84

**Nota 1:** DEMOSTRACIÓN ...

Si  $T$  es contradictoria, entonces existe una fórmula  $\alpha$  de  $\mathcal{L}$  tal que  $\vdash_T \alpha$  y  $\vdash_T \neg\alpha$ . Por tanto, si  $\beta$  es una fórmula de  $\mathcal{L}$ ,  $\delta_1, \dots, \delta_n$  una demostración de  $\alpha$  en  $T$  y  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  una demostración de  $\neg\alpha$  en  $T$  tenemos la siguiente demostración de  $\beta$  en  $T$ :

$$\begin{array}{ll} (1) & \delta_1 \\ & \dots \\ (n) & \delta_n \equiv \alpha \\ (n+1) & \gamma_1 \\ & \dots \\ (n+m) & \gamma_m \equiv \neg\alpha \\ (n+m+1) & \beta \quad \text{C } n, n+m \end{array}$$

Recíprocamente, si toda fórmula  $\alpha$  de  $\mathcal{L}$  es un teorema de  $T$ , tomando cualquier fórmula  $\alpha$  se tiene que  $\vdash_T \alpha$  y  $\vdash_T \neg\alpha$  y con ello que  $T$  es contradictoria. 

**Nota 2:** ... son necesariamente fórmulas lógicamente válidas ...

Por el teorema de corrección (Teorema 2.6).



**Nota 3:** ... no son lógicamente válidas ...

Por ejemplo, si  $\alpha$  es cualquier fórmula de  $\mathcal{L}$  se tiene que  $\alpha \wedge \neg\alpha$  no es lógicamente válida pues, de hecho, es insatisfactible.

En efecto, si  $M$  es un modelo de  $\mathcal{L}$  y  $v$  una valoración de  $M$  se tiene que

$$M \models (\alpha \wedge \neg\alpha)[v] \text{ syss } M \models \alpha[v] \text{ y } M \models \neg\alpha[v] \text{ syss } M \models \alpha[v] \text{ y no } M \models \alpha[v],$$

luego claramente no se cumple que  $M \models (\alpha \wedge \neg\alpha)[v]$ . Como la valoración era arbitraria esto prueba que  $\alpha \wedge \neg\alpha$  es falsa en  $M$  y, como el modelo era arbitrario, que es insatisfactible.

**Nota 4:** DEMOSTRACIÓN ...

Si  $T$  tiene un modelo  $M$  ya hemos visto (ver [Nota 2 pág. 82](#)) que todo teorema de  $T$  es verdadero en  $M$ . Por tanto, si  $\alpha$  es un teorema de  $T$  (un axioma, por ejemplo) por el punto 3) de la página 37 tenemos que  $\neg\alpha$  será falsa en  $M$  y con ello no puede ser un teorema de  $T$  (ver [Nota 2 pág. 82](#)). Así, no toda fórmula de  $\mathcal{L}$  es un teorema de  $T$  y por el Teorema 3.3 (en su versión recíproca) se concluye que  $T$  es consistente. 

## Página 85

**Nota 1:** DEMOSTRACIÓN ...

Si  $\Delta$  es contradictorio existe una fórmula  $\alpha$  tal que  $\Delta \vdash \alpha$  y  $\Delta \vdash \neg\alpha$ . Por el Metateorema 2.1 tenemos entonces que  $\Gamma \vdash \alpha$  y  $\Gamma \vdash \neg\alpha$ , lo que prueba que  $\Gamma$  es contradictorio.

Claramente, si  $\Gamma$  es consistente no puede ocurrir que  $\Delta$  sea contradictorio pues, por lo visto, esto implicaría que  $\Gamma$  es también contradictorio. 

**Nota 2:** Teorema 3.6...

Observemos que el conjunto de fórmulas  $\Gamma$  en el enunciado del teorema puede ser vacío, luego en este caso particular el teorema nos dice que dada una sentencia  $\alpha$ , esta fórmula es consistente si, y solo si, su negación no es un teorema lógico.

**Nota 3:** ... basta probar que no ...

Por la [Nota 2 pág. 83](#) basta ver que  $T$ , la teoría axiomática con  $\Gamma \cup \{\alpha\}$  como axiomas propios, es consistente. Además, por el Teorema 3.3 (en su versión recíproca enunciada en la nota tras el teorema) esto se cumple si existe alguna fórmula que no sea un teorema de  $T$ . Por tanto, si vemos que no  $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \neg\alpha$ , por la [Nota pág. 81](#) se tiene que  $\neg\alpha$  no es un teorema de  $T$  y, por lo dicho,  $T$  es consistente.

**Nota 4:** ... en caso contrario, por el teorema de deducción ...

Como  $\alpha$  es una sentencia no tiene variables libres y, por tanto, en cualquier deducción de

$\neg\alpha$  con premisas en  $\Gamma \cup \{\alpha\}$  no se generaliza respecto a variables libres de  $\alpha$ . Así pues, el teorema de deducción nos da que  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \neg\alpha$ .

**Nota 5:** ... es decir ... Por consiguiente ...

Partiendo de la fórmula  $\alpha \rightarrow \neg\alpha$ , por (NI) se obtiene  $\neg\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha$ , después por (EDI) se obtiene  $\neg\alpha \vee \neg\alpha$  y finalmente por (ED) se obtiene  $\neg\alpha$ . Por tanto, basta añadir a la deducción de  $\alpha \rightarrow \neg\alpha$  a partir de  $\Gamma$  estas tres fórmulas y se obtiene una (esquema de) deducción de  $\neg\alpha$  con premisas en  $\Gamma$ .

**Nota 6:** ... es equivalente ...

Realmente aquí se está usando una ligera variación del Teorema 3.6:

### Metateorema 3.2: Teorema 3.6

Sea  $\Gamma$  un conjunto de fórmulas<sup>a</sup> y  $\alpha$  una sentencia. Entonces  $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$  es consistente si y solo si no  $\Gamma \vdash \alpha$ .

<sup>a</sup> Como en el Teorema 3.6 este conjunto de fórmulas puede ser vacío y, en este caso, el teorema nos dice que dada una sentencia  $\alpha$ , su negación es consistente si, y solo si, no es un teorema lógico.

En efecto, si  $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$  es consistente, por el Teorema 3.6 tenemos que no  $\Gamma \vdash \neg\neg\alpha$  y así no  $\Gamma \vdash \alpha$  (pues si se cumpliera que  $\Gamma \vdash \alpha$  basta usar (DN) para extender la deducción y obtener  $\neg\neg\alpha$ ).

Recíprocamente, si no  $\Gamma \vdash \alpha$ , entonces no  $\Gamma \vdash \neg\neg\alpha$  (por la misma razón que antes) y por el Teorema 3.6 obtenemos que  $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$  es consistente. 

También se está suponiendo que al formalizar la geometría euclídea el quinto postulado de Euclides será una sentencia, pero como se ve en la sección sobre clausuras universales (final de la página 85) esto no supone ningún problema pues siempre podemos considerar que los axiomas de cualquier teoría son sentencias.

**Nota 7: Ejercicio ...**

Si consideramos  $\Gamma = \{\forall xy \neg x = y\}$  y  $\alpha \equiv x = y$ , donde claramente  $\alpha$  no es una sentencia, veamos que no  $\Gamma \vdash \neg\alpha$ , pero que  $\Gamma \cup \{\alpha\}$  es contradictorio.

Veamos **en primer lugar** que no  $\Gamma \vdash \neg\alpha$ , para lo cual basta ver que  $\neg\alpha$  es contradictoria y que  $\Gamma$  es consistente. En efecto, si se cumplen estos dos resultados debe cumplirse que no  $\Gamma \vdash \neg\alpha$  pues, de no ser así, por el Teorema 3.5 (con  $\Delta \equiv \{\neg\alpha\}$ ) tendríamos que  $\Gamma$  es contradictorio.

Para ver que  $\neg\alpha$  **es contradictoria** basta con ver que para la fórmula  $\beta \equiv \forall xy x = y$  se tiene que  $\neg\alpha \vdash \beta$  y  $\neg\alpha \vdash \neg\beta$ .

Que  $\beta$  sea una consecuencia de  $\neg\alpha$  es directo teniendo en cuenta que realmente  $\beta$  es un teorema lógico como muestra la siguiente demostración:

- |     |                         |                    |
|-----|-------------------------|--------------------|
| (1) | $x = x$                 | I                  |
| (2) | $\neg \forall xy x = y$ | Hipótesis (RA)     |
| (3) | $\wedge xy \neg x = y$  | SE 2, Mteo. 2.6    |
| (4) | $\wedge y \neg x = y$   | EG 3               |
| (5) | $S_y^x \neg(x = y)$     | EG 4               |
| (6) | $\neg(x = x)$           | R 5 (Contr. con 1) |
| (7) | $\forall xy x = y$      | Red. absurdo       |

Por otra parte, para ver que  $\neg\alpha \vdash \neg\beta$  tenemos la siguiente deducción:

- |     |                         |                     |
|-----|-------------------------|---------------------|
| (1) | $\neg(x = y)$           | Premisa             |
| (2) | $\wedge xy \neg(x = y)$ | IG 1 ( $\times 2$ ) |
| (3) | $\neg \forall xy x = y$ | SE 2, Mteo. 2.6     |

Queda entonces demostrado que  $\neg\alpha$  es contradictorio.

Para ver que  $\Gamma$  es **consistente** basta ver que tiene un modelo (por el Teorema 3.4 y la relación entre los modelos (ver **Nota 1** pág. 82) y la consistencia de una teoría (ver **Nota 2** pág. 83) y de sus axiomas propios).

Sin más, por la **Nota 4** pág. 46 existe un modelo  $M$  de  $\mathcal{L}$  cuyo universo está formado por dos objetos distintos y se tiene que  $M$  es un modelo de  $\Gamma$  pues fijada cualquier valoración  $v$  de  $M$  tenemos que

$$M \models \left( \bigvee xy \neg x = y \right) [v] \text{ syss existen objetos } n, m \text{ de } M \text{ tales que } M \models (\neg x = y) [v_{xy}^{nm}]$$

$$\text{syss existen objetos } n, m \text{ de } M \text{ tales que } n \neq m,$$

y esto último es claramente cierto para  $M$ .

**Finalmente**, veamos que  $\Gamma \cup \{\alpha\}$  es contradictorio.

Para ello basta considerar la fórmula  $\beta \equiv \wedge xy x = y$  y observar que

- |     |                   |                     |     |                         |                 |
|-----|-------------------|---------------------|-----|-------------------------|-----------------|
| (1) | $x = y$           | Premisa             | (1) | $\forall xy \neg x = y$ | Premisa         |
| (2) | $\wedge xy x = y$ | IG 1 ( $\times 2$ ) | (2) | $\neg \wedge xy x = y$  | SE 1, Mteo. 2.6 |

Es decir, hemos probado que  $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$  y  $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \neg\beta$ , luego que ciertamente  $\Gamma \cup \{\alpha\}$  es contradictorio como queríamos ver. 

**Nota 8:** ... cuantificadores universales ...

Realmente el orden de los cuantificadores no importa pues, como muestra el siguiente resultado, si  $x_1, \dots, x_n$  son las variables libres de  $\alpha$  se cumple que

$$\vdash \bigwedge x_1 \dots x_n \alpha \leftrightarrow \bigwedge x_{\pi(1)} \dots x_{\pi(n)} \alpha$$

para cualquier permutación  $\pi$  del conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

### Metateorema 3.3

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal,  $x_1, \dots, x_n$  variables,  $\alpha$  una fórmula y  $\pi$  una permutación del conjunto  $\{1, \dots, n\}$ . Entonces se cumplen:

- (i)  $\vdash \bigwedge x_1 \cdots x_n \alpha \leftrightarrow \bigwedge x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(n)} \alpha.$
- (ii)  $\vdash \bigvee x_1 \cdots x_n \alpha \leftrightarrow \bigvee x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(n)} \alpha.$

**Para demostrar (i)** basta aplicar (EG)  $n$  veces y después aplicar (IG) otras  $n$  veces para obtener que

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n \alpha \vdash \bigwedge x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(n)} \alpha$$

y, como las generalizaciones son respecto a las variables  $x_1, \dots, x_n$  que no están libres en  $\bigwedge x_1 \cdots x_n \alpha$ , por el teorema de deducción se tiene que

$$\vdash \bigwedge x_1 \cdots x_n \alpha \rightarrow \bigwedge x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(n)} \alpha.$$

De forma análoga se prueba la otra implicación y por (IB) se tiene lo deseado.

**Para demostrar (ii)** observemos en primer lugar que por el Metateorema 2.6 se tiene que

$$\vdash \neg \bigwedge x_1 \cdots x_n \neg \alpha \leftrightarrow \bigvee x_1 \cdots x_n \neg \neg \alpha$$

y por el Metateorema 2.10 (junto a la regla (DN)) se tiene que

$$\vdash \bigvee x_1 \cdots x_n \neg \neg \alpha \leftrightarrow \bigvee x_1 \cdots x_n \alpha,$$

luego por la regla (MBB)

$$\vdash \neg \bigwedge x_1 \cdots x_n \neg \alpha \leftrightarrow \bigvee x_1 \cdots x_n \alpha. \quad (3.1)$$

De igual forma se obtiene que

$$\vdash \neg \bigwedge x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(n)} \neg \alpha \leftrightarrow \bigvee x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(n)} \alpha. \quad (3.2)$$

Por otro lado, por (i) tenemos que

$$\vdash \bigwedge x_1 \cdots x_n \neg \alpha \leftrightarrow \bigwedge x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(n)} \neg \alpha,$$

con lo que por el Teorema 2.11 1) obtenemos que

$$\vdash \neg \bigwedge x_1 \cdots x_n \neg \alpha \leftrightarrow \neg \bigwedge x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(n)} \neg \alpha$$

y utilizando la regla (MBB) junto a (3.1) y (3.2) concluimos con lo deseado. 

Sin embargo, si se quiere fijar una definición precisa (aunque realmente nunca la usaremos), se puede definir la **clausura universal** de una fórmula  $\alpha$  con variables libres  $x_1, \dots, x_n$  como

$$\alpha^c \equiv \bigwedge y_1 \cdots y_n \alpha,$$

donde  $y_1, \dots, y_n$  son las variables  $x_1, \dots, x_n$  ordenadas respecto a su índice (a su índice como variables de  $\mathcal{L}$ , no a su subíndice) de menor a mayor.

**Nota 9:** ... repetidamente IG y EG ...

Dada una fórmula  $\alpha$  con variables libres  $x_1, \dots, x_n$  se tiene que, por definición<sup>6</sup>,

$$\alpha^c \equiv \bigwedge x_1 \cdots x_n \alpha.$$

Por tanto, para ver que  $\alpha \vdash \alpha^c$  basta aplicar (IG)  $n$  veces y para ver que  $\alpha^c \vdash \alpha$  basta aplicar (EG)  $n$  veces.

## Página 86

**Nota 1:** ... conjunto de las clausuras universales ...

Observemos que si  $\Gamma$  es un conjunto de fórmulas bien definido, entonces  $\Gamma^c$  también lo será.

En efecto, no hay duda de que significa que un objeto sea un elemento de  $\Gamma^c$  pues  $\beta$  está en  $\Gamma^c$  si, y solo si, existe una fórmula  $\alpha$  en  $\Gamma$  tal que  $\beta \equiv \alpha^c$  y, como esto es una propiedad bien definida sobre los objetos de  $\Gamma$  y  $\Gamma$  es un conjunto bien definido, no cabe duda sobre que significa que se satisfaga o no esta propiedad de existencia. Además, como podemos enumerar el conjunto de fórmulas de un lenguaje formal, en particular podemos enumerar  $\Gamma^c$  y con ello ya sabemos que queda perfectamente determinado lo que significa que todos los objetos de  $\Gamma^c$  cumplan cierta propiedad o que exista algún objeto que la cumpla.

**Nota 2:** ... ambas tienen las mismas consecuencias lógicas ...

Esto significa, que para cada fórmula  $\alpha$

$$\Gamma \vdash \alpha \text{ si, y solo si, } \Gamma^c \vdash \alpha.$$

En efecto, si  $\Gamma \vdash \alpha$ , como toda fórmula de  $\Gamma$  se deduce de  $\Gamma^c$ , por el Metateorema 2.1 concluimos que  $\Gamma^c \vdash \alpha$  y, recíprocamente, si  $\Gamma^c \vdash \alpha$ , como toda fórmula de  $\Gamma^c$  también se deduce de  $\Gamma$ , por el Metateorema 2.1 concluimos que  $\Gamma \vdash \alpha$ .

Con esto, si tenemos una teoría axiomática  $T$  cuyos axiomas propios vienen dados por el conjunto de fórmulas  $\Gamma$  y definimos  $T^c$  la teoría axiomática cuyos axiomas propios vienen dados por  $\Gamma^c$ , lo anterior nos muestra que una fórmula  $\alpha$  es un teorema de  $T$  si, y solo si, es un teorema de  $T^c$ . Más aún, por lo que sigue en el texto tenemos que  $T$  es consistente si, y solo si,  $T^c$  lo es y que un modelo  $M$  del lenguaje formal será un modelo de  $T$  si, y solo si, lo es de  $T^c$ .

Por tanto, cuando queramos estudiar una teoría axiomática siempre podremos considerar que sus axiomas propios son sentencias pues podemos considerar una teoría con los mismos teoremas, equiconsistente con ella y con los mismos modelos en la cual realmente todos sus axiomas propios son sentencias.

<sup>6</sup> Con mayor precisión, siguiendo la definición dada en la nota anterior se tiene que

$$\alpha^c \equiv \bigwedge x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(n)} \alpha$$

para alguna permutación  $\pi$  de  $1, \dots, n$ , pero esto no afecta en nada al razonamiento que se da en esta nota.

**Nota 3:** ... Más aún ...

Veamos que

$$M \models \Gamma \text{ syss } M \models \Gamma^c.$$

Sea  $M$  un modelo de  $\Gamma$ . Entonces, dada  $\delta$  una fórmula de  $\Gamma^c$ , como sabemos que  $\Gamma \vdash \delta$ , el teorema de corrección nos da que  $\Gamma \models \delta$  y obtenemos pues que  $M \models \delta$ . Es decir, para cada fórmula  $\delta$  de  $\Gamma^c$  se cumple que  $M \models \delta$  y esto es precisamente lo que significa que  $M \models \Gamma^c$ .

El recíproco es análogo teniendo en cuenta que también sabemos que toda fórmula de  $\Gamma$  es consecuencia de  $\Gamma^c$ . 

En particular, tenemos que dada una fórmula  $\alpha$  de  $\mathcal{L}$  se cumple que

$$M \models \alpha \text{ syss } M \models \alpha^c.$$

En efecto, basta aplicar lo ya demostrado con  $\Gamma \equiv \{\alpha\}$ , con lo que  $\Gamma^c \equiv \{\alpha^c\}$ , teniendo en cuenta que en este caso  $M \models \alpha$  si, y solo si,  $M \models \Gamma$  y  $M \models \Gamma^c$  si, y solo si,  $M \models \alpha^c$ . 

También se cumple que si una fórmula  $\alpha$  es falsa en un modelo  $M$ , entonces  $\alpha^c$  también debe ser falsa en  $M$ .

Supongamos que las variables libres de  $\alpha$  son  $x_1, \dots, x_n$ .

Dada una valoración  $v$  de  $M$  se tiene que  $M \models \alpha^c[v]$  syss para cualesquiera  $a_1, \dots, a_n$ , objetos de  $M$  se cumple que

$$M \models \alpha [v_{x_1 \dots x_n}^{a_1 \dots a_n}],$$

pero como  $\alpha$  es falsa en  $M$  esto último no se puede dar. Por tanto, tenemos que no  $M \models \alpha^c[v]$  y como la valoración  $v$  es arbitraria concluimos que  $\alpha^c$  es falsa en  $M$ . 

Sin embargo, el recíproco no es cierto, puede ocurrir que  $\alpha^c$  sea falsa en un modelo  $M$ , pero que  $\alpha$  no lo sea.

En efecto, si consideramos  $\alpha \equiv x = y$  y  $M$  un modelo con al menos dos elementos distintos (que sabemos que existe por la [Nota 4](#) [pág. 46](#)), se tiene que  $\alpha^c$  es falsa en  $M$  pues para cualquier valoración  $v$  de  $M$  se tiene que

$$M \models \alpha^c[v] \text{ syss para cada par de objetos } a, b \text{ de } M \text{ se cumple que } a \equiv b,$$

pero  $\alpha$  no lo es pues si tomamos una valoración  $v$  de  $M$  tal que  $v(x) \equiv v(y)$  (por ejemplo, una valoración trivial que asigna a cada variable el mismo objeto de  $M$ ) tenemos que se cumple que  $M \models \alpha[v]$ . 

**Nota 4:** Ejercicio ...

Si es  $\alpha \equiv x = y$ , entonces  $\alpha^c \equiv \bigwedge xy x = y$  y para probar que  $\alpha \leftrightarrow \alpha^c$  no es un teorema lógico basta ver que no  $\vdash \alpha \rightarrow \alpha^c$ <sup>7</sup>.

Si  $\alpha \rightarrow \alpha^c$  fuera un teorema lógico, por el teorema de corrección sería una fórmula lógicamente válida luego es suficiente con ver que esto no es así, es decir, debemos encontrar

---

<sup>7</sup> Observemos que, en general, para cualquier fórmula  $\beta$  si se cumple que  $\vdash \beta^c \rightarrow \beta$  pues sabemos que  $\beta^c \vdash \beta$  y, como  $\beta^c$  no tiene variables libres, podemos aplicar el teorema de deducción para concluir con lo deseado.

un modelo  $M$  en el cual  $\alpha \rightarrow \alpha^c$  no sea verdadera. Veamos que podemos tomar como  $M$  cualquier modelo con al menos dos elementos distintos (que sabemos que existe por la [Nota 4](#) pág. 46).

En efecto, tomando cualquier valoración  $v$  de  $M$  tal que  $v(x) \equiv v(y)$  (por ejemplo, una valoración trivial que asigna a cada variable el mismo objeto de  $M$ ) tenemos que se cumple que  $M \models \alpha[v]$ , pero no se cumple que  $M \models \alpha^c[v]$  pues

$$M \models \alpha^c[v] \text{ sys para cada par de objetos } a, b \text{ de } M \text{ se cumple que } a \equiv b$$

y esto no es cierto en  $M$ . Así, para esta valoración se tiene que no  $M \models (\alpha \rightarrow \alpha^c)[v]$  y, por tanto,  $\alpha \rightarrow \alpha^c$  no es verdadera en  $M$ . 

**Nota 5:** ... abreviar ...

Más en general, si  $\phi(u)$  es una fórmula (tal vez con más parámetros libres) de un lenguaje formal  $\mathcal{L}$  abreviaremos

$$\bigwedge \phi(u) \alpha \equiv \bigwedge u (\phi(u) \rightarrow \alpha) \quad \text{y} \quad \bigvee \phi(u) \alpha \equiv \bigvee u (\phi(u) \wedge \alpha).$$

En el caso particular de  $\mathcal{L}_{tc}$  hemos tomado la fórmula  $\phi(u) \equiv u \in t$  con  $t$  un término y tenemos pues que

$$\bigwedge u \in t \alpha \equiv \bigwedge u (u \in t \rightarrow \alpha) \quad \text{y} \quad \bigvee u \in t \alpha \equiv \bigvee u (u \in t \wedge \alpha).$$

Los siguientes resultados serán útiles para tratar con estos generalizadores y particularizadores:

#### Metateorema 3.4

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal,  $\phi_1(u_1), \dots, \phi_n(u_n)$  fórmulas,  $\alpha, \beta$  dos fórmulas equivalentes de  $\mathcal{L}$  y

$$\pi \equiv \Delta_1 \phi_1(u_1) \cdots \Delta_n \phi_n(u_n)$$

donde cada  $\Delta_i$  es el generalizador o el particularizador. Entonces se cumple que

$$\vdash \pi \alpha \leftrightarrow \pi \beta.$$

Lo demostraremos por inducción en el número de cuantificadores de  $\pi$ .

Si en  $\pi$  únicamente aparece un cuantificador tenemos que

$$\begin{aligned} \pi \alpha &\equiv \Delta_1 \phi_1(u_1) \alpha \equiv \Delta_1 u_1 \alpha' \\ \pi \beta &\equiv \Delta_1 \phi_1(u_1) \beta \equiv \Delta_1 u_1 \beta' \end{aligned}$$

donde

$$\alpha' \equiv \phi_1(u_1) \rightarrow \alpha \text{ y } \beta' \equiv \phi_1(u_1) \rightarrow \beta$$

o

$$\alpha' \equiv \phi_1(u_1) \wedge \alpha \text{ y } \beta' \equiv \phi_1(u_1) \wedge \beta$$

en función de si  $\Delta_1$  es el generalizador o el particularizador respectivamente. En cualquier caso, por el Teorema 2.11 se obtiene que  $\vdash \alpha' \leftrightarrow \beta'$  y por el Metateorema 2.10 se concluye que

$$\vdash \Delta_1 u_1 \alpha' \leftrightarrow \Delta_1 u_1 \beta'$$

como queríamos.

Supongamos pues que el resultado es cierto para  $k < n$  cuantificadores y veamos que entonces también lo es para  $n$  cuantificadores.

Sin más, por hipótesis de inducción tenemos que como  $\alpha$  y  $\beta$  son equivalentes entonces

$$\vdash \Delta_2\phi_2(u_2) \cdots \Delta_n\phi_n(u_n) \alpha \leftrightarrow \Delta_2\phi_2(u_2) \cdots \Delta_n\phi_n(u_n) \beta,$$

pero aplicando ahora la hipótesis de inducción a estas dos fórmulas equivalentes obtenemos que

$$\vdash \Delta_1\phi_1(u_1)\Delta_2\phi_2(u_2) \cdots \Delta_n\phi_n(u_n) \alpha \leftrightarrow \Delta_1\phi_1(u_1)\Delta_2\phi_2(u_2) \cdots \Delta_n\phi_n(u_n) \beta$$

que es justo lo que buscamos.

Esto concluye la inducción y por tanto la demostración. 

En el caso particular de  $\mathcal{L}_{tc}$  tenemos que si  $\alpha, \beta$  son dos fórmulas equivalentes de  $\mathcal{L}_{tc}$ , entonces

$$\vdash \Delta_1u_1 \in t_1 \cdots \Delta_nu_n \in t_n \alpha \leftrightarrow \Delta_1u_1 \in t_1 \cdots \Delta_nu_n \in t_n \beta. \quad (3.3)$$

### Metateorema 3.5

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal,  $\phi_1(u_1), \dots, \phi_n(u_n)$  fórmulas,  $\alpha$  una fórmula y

$$\pi \equiv \Delta_1\phi_1(u_1) \cdots \Delta_n\phi_n(u_n)$$

donde cada  $\Delta_i$  es el generalizador o el particularizador. Entonces se cumple que

$$\vdash \neg\pi\alpha \leftrightarrow \pi'\neg\alpha,$$

donde

$$\pi' \equiv \Delta'_1\phi_1(u_1) \cdots \Delta'_n\phi_n(u_n)$$

siendo  $\Delta'_i$  el particularizador si  $\Delta_i$  es el generalizador y viceversa.

Lo demostraremos por inducción en el número de cuantificadores de  $\pi$ .

Si en  $\pi$  únicamente aparece un cuantificador tenemos que

$$\pi\alpha \equiv \Delta_1\phi_1(u_1)\alpha \equiv \Delta_1u_1 \alpha'$$

donde

$$\alpha' \equiv \phi_1(u_1) \rightarrow \alpha \text{ o } \alpha' \equiv \phi_1(u_1) \wedge \alpha$$

en función de si  $\Delta_1$  es el generalizador o el particularizador respectivamente. Usando entonces el Metateorema 2.6 obtenemos que

$$\vdash \neg\pi\alpha \leftrightarrow \Delta'_1u_1 \neg\alpha'. \quad (3.4)$$

Además, como

$$\vdash \neg(\phi_1(u_1) \rightarrow \alpha) \xleftrightarrow{(NI_1)} \phi_1(u_1) \wedge \neg\alpha,$$

$$\vdash \neg(\phi_1(u_1) \wedge \alpha) \xleftrightarrow{8} \phi_1(u_1) \rightarrow \neg\alpha,$$



por el Metateorema 2.10 obtenemos en cualquier caso que

$$\vdash \Delta'_1 u_1 \neg \alpha' \leftrightarrow \underbrace{\Delta'_1 \phi_1(u_1) \neg \alpha}_{\pi' \neg \alpha}. \quad (3.6)$$

Finalmente, utilizando la regla (MBB) junto a (3.4) y (3.6) obtenemos lo deseado.

Supongamos ahora que el resultado es cierto al considerar  $k < n$  cuantificadores y veamos que entonces lo es para  $n$  cuantificadores.

Por hipótesis de inducción tenemos que

$$\vdash \neg \Delta_2 \phi_2(u_2) \cdots \Delta_n \phi_n(u_n) \alpha \leftrightarrow \Delta'_2 \phi_2(u_2) \cdots \Delta'_n \phi_n(u_n) \neg \alpha \quad (3.7)$$

y que

$$\vdash \neg \Delta_1 \phi_1(u_1) \cdots \Delta_n \phi_n(u_n) \alpha \leftrightarrow \Delta'_1 \phi_1(u_1) (\neg \Delta_2 \phi_2(u_2) \cdots \Delta_n \phi_n(u_n) \alpha). \quad (3.8)$$

Usando entonces el Metateorema 3.4 junto a (3.7) tenemos que

$$\vdash \Delta'_1 \phi_1(u_1) (\neg \Delta_2 \phi_2(u_2) \cdots \Delta_n \phi_n(u_n) \alpha) \leftrightarrow \Delta'_1 \phi_1(u_1) \cdots \Delta'_n \phi_n(u_n) \neg \alpha \quad (3.9)$$

con lo que por la regla (MBB) junto a (3.8) y (3.9) obtenemos lo deseado.

De este modo finalizamos la inducción y con ello la demostración. 

En el caso particular de  $\mathcal{L}_{tc}$  tenemos que si  $t_1, \dots, t_n$  son términos de  $\mathcal{L}_{tc}$ ,  $\alpha$  una fórmula y

$$\pi \equiv \Delta_1 u_1 \in t_1 \cdots \Delta_n u_n \in t_n$$

donde cada  $\Delta_i$  es el generalizador o el particularizador. Entonces se cumple que

$$\vdash \neg \pi \alpha \leftrightarrow \pi' \neg \alpha, \quad (3.10)$$

donde

$$\pi' \equiv \Delta'_1 u_1 \in t_1 \cdots \Delta'_n u_n \in t_n$$

siendo  $\Delta'_i$  el particularizador si  $\Delta_i$  es el generalizador y viceversa.

### Metateorema 3.6

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal,  $\phi_1(u_1), \dots, \phi_n(u_n)$  fórmulas tales que para cada  $i = 1, \dots, n-1$  se tiene que  $u_{i+1}, \dots, u_n$  no están libres en  $\phi_1(u_1), \dots, \phi_i(u_i)$  y  $\alpha$  una fórmula. Entonces se cumplen:

- (i)  $\vdash \bigwedge \phi_1(u_1) \cdots \bigwedge \phi_n(u_n) \alpha \leftrightarrow \bigwedge u_1 \cdots u_n (\phi_1(u_1) \wedge \cdots \wedge \phi_n(u_n) \rightarrow \alpha).$
- (ii)  $\vdash \neg \bigwedge \phi_1(u_1) \cdots \bigwedge \phi_n(u_n) \alpha \leftrightarrow \bigvee u_1 \cdots u_n (\phi_1(u_1) \wedge \cdots \wedge \phi_n(u_n) \wedge \neg \alpha).$

<sup>8</sup> En general se tiene que

$$\vdash \neg(\gamma \wedge \delta) \leftrightarrow (\gamma \rightarrow \neg \delta). \quad (3.5)$$

En efecto, por (DM) obtenemos que  $\neg(\gamma \wedge \delta)$  es equivalente a  $\neg\gamma \vee \neg\delta$ , que a su vez por (EDI) es equivalente a  $(\neg\neg\gamma) \rightarrow \neg\delta$ . Usando entonces (DN) y el Teorema 2.11 2) obtenemos que esta última fórmula es equivalente a  $\gamma \rightarrow \neg\delta$ .

- (iii)  $\vdash \bigvee \phi_1(u_1) \cdots \bigvee \phi_n(u_n) \alpha \leftrightarrow \bigvee u_1 \cdots u_n (\phi_1(u_1) \wedge \cdots \wedge \phi_n(u_n) \wedge \alpha).$
- (iv)  $\vdash \neg \bigvee \phi_1(u_1) \cdots \bigvee \phi_n(u_n) \alpha \leftrightarrow \bigwedge u_1 \cdots u_n (\phi_1(u_1) \wedge \cdots \wedge \phi_n(u_n) \rightarrow \neg \alpha).$

Demostraremos en **primer lugar (i)** por inducción en el número de cuantificadores.

El caso para un único cuantificador es inmediato pues, por definición, tenemos que

$$\bigwedge \phi_1(u_1) \alpha \equiv \bigwedge u_1 (\phi_1(u_1) \rightarrow \alpha).$$

Supongamos pues que el resultado es cierto al considerar  $k < n$  cuantificadores y veamos que entonces lo es para  $n$  cuantificadores.

Como para cada  $i = 2, \dots, n-1$  las variables  $u_{i+1}, \dots, u_n$  no están libres en las fórmulas  $\phi_2(u_2), \dots, \phi_i(u_i)$ , por hipótesis de inducción tenemos que

$$\vdash \underbrace{\bigwedge \phi_2(u_2) \cdots \bigwedge \phi_n(u_n) \alpha}_{\beta_1} \leftrightarrow \underbrace{\bigwedge u_2 \cdots u_n (\phi_2(u_2) \wedge \cdots \wedge \phi_n(u_n) \rightarrow \alpha)}_{\beta_2}. \quad (3.11)$$

Utilizando entonces el Teorema 2.11 2) junto a (3.11) tenemos que

$$\vdash (\phi_1(u_1) \rightarrow \beta_1) \leftrightarrow (\phi_1(u_1) \rightarrow \beta_2)$$

y por el Metateorema 2.10 obtenemos que

$$\vdash \bigwedge \phi_1(u_1) \beta_1 \leftrightarrow \bigwedge \phi_1(u_1) \beta_2. \quad (3.12)$$

Así, por (3.12) y la regla (MBB) bastará demostrar que

$$\vdash \bigwedge \phi_1(u_1) \beta_2 \leftrightarrow \bigwedge u_1 \cdots u_n (\phi_1(u_1) \wedge \cdots \wedge \phi_n(u_n) \rightarrow \alpha), \quad (3.13)$$

para lo cual tenemos la siguiente demostración:

|      |                                                                                                                                        |                       |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| (1)  | $\bigwedge \phi_1(u_1) \beta_2$                                                                                                        | Hipótesis             |
| (2)  | $\phi_1(u_1) \wedge \cdots \wedge \phi_n(u_n)$                                                                                         | Hipótesis             |
| (3)  | $\phi_1(u_1) \rightarrow \beta_2$                                                                                                      | EG 1                  |
| (4)  | $\phi_1(u_1)$                                                                                                                          | EC 2                  |
| (5)  | $\beta_2$                                                                                                                              | MP 3, 4               |
| (6)  | $\phi_2(u_2) \wedge \cdots \wedge \phi_n(u_n) \rightarrow \alpha$                                                                      | EG 5 ( $\times n-1$ ) |
| (7)  | $\phi_2(u_2) \wedge \cdots \wedge \phi_n(u_n)$                                                                                         | EC 2                  |
| (8)  | $\alpha$                                                                                                                               | MP 6, 7               |
| (9)  | $\phi_1(u_1) \wedge \cdots \wedge \phi_n(u_n) \rightarrow \alpha$                                                                      | Tma. deducción        |
| (10) | $\bigwedge u_1 \cdots u_n (\phi_1(u_1) \wedge \cdots \wedge \phi_n(u_n) \rightarrow \alpha)$                                           | IG 9 ( $\times n$ )   |
| (11) | $\bigwedge \phi_1(u_1) \beta_2 \rightarrow \bigwedge u_1 \cdots u_n (\phi_1(u_1) \wedge \cdots \wedge \phi_n(u_n) \rightarrow \alpha)$ | Tma. deducción        |
| (12) | $\bigwedge u_1 \cdots u_n (\phi_1(u_1) \wedge \cdots \wedge \phi_n(u_n) \rightarrow \alpha)$                                           | Hipótesis             |
| (13) | $\phi_1(u_1)$                                                                                                                          | Hipótesis             |
| (14) | $\phi_1(u_1) \wedge \cdots \wedge \phi_n(u_n) \rightarrow \alpha$                                                                      | EG 12 ( $\times n$ )  |
| (15) | $\phi_2(u_2) \wedge \cdots \wedge \phi_n(u_n)$                                                                                         | Hipótesis             |
| (16) | $\phi_1(u_1) \wedge \cdots \wedge \phi_n(u_n)$                                                                                         | IC 13, 15             |
| (17) | $\alpha$                                                                                                                               | MP 14, 16             |

|      |                                                                                                                                            |                          |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|
| (18) | $\phi_2(u_2) \wedge \cdots \wedge \phi_n(u_n) \rightarrow \alpha$                                                                          | Tma. deducción           |
| (19) | $\bigwedge u_2 \cdots u_n (\phi_2(u_2) \wedge \cdots \wedge \phi_n(u_n) \rightarrow \alpha) \equiv \beta_2$                                | IG 18 ( $\times n - 1$ ) |
| (20) | $\phi_1(u_1) \rightarrow \beta_2$                                                                                                          | Tma. deducción           |
| (21) | $\bigwedge \phi_1(u_1) \beta_2$                                                                                                            | IG 20                    |
| (22) | $\bigwedge u_1 \cdots u_n (\phi_1(u_1) \wedge \cdots \wedge \phi_n(u_n) \rightarrow \alpha) \rightarrow \bigwedge \phi_1(u_1) \beta_2$     | Tma. deducción           |
| (23) | $\bigwedge \phi_1(u_1) \beta_2 \leftrightarrow \bigwedge u_1 \cdots u_n (\phi_1(u_1) \wedge \cdots \wedge \phi_n(u_n) \rightarrow \alpha)$ | IB 11, 22                |

En la demostración las generalizaciones son válidas:

- En la línea 10 porque claramente  $u_1$  no está libre en (1) y  $u_2, \dots, u_n$  tampoco lo están pues no están libres en  $\phi_1(u_1)$  ni en  $\beta_2$ .
- En la línea 19 porque claramente  $u_2, \dots, u_n$  no están libres en (12) y tampoco lo están en (13) al no estarlo en  $\phi_1(u_1)$ .
- En la línea 21 porque claramente  $u_1$  no está libre en (12).

Pasemos ahora a **demostrar (ii)**.

Observemos en primer lugar que por el Teorema 2.11 1) aplicado a (i) tenemos que

$$\vdash \neg \bigwedge \phi_1(u_1) \cdots \bigwedge \phi_n(u_n) \alpha \leftrightarrow \neg \bigwedge u_1 \cdots u_n (\phi_1(u_1) \wedge \cdots \wedge \phi_n(u_n) \rightarrow \alpha)$$

y por el Metateorema 2.6 se tiene que

$$\vdash \neg \bigwedge u_1 \cdots u_n (\phi_1(u_1) \wedge \cdots \wedge \phi_n(u_n) \rightarrow \alpha) \leftrightarrow \bigvee u_1 \cdots u_n \neg (\phi_1(u_1) \wedge \cdots \wedge \phi_n(u_n) \rightarrow \alpha),$$

luego por la regla (MBB) basta demostrar que

$$\vdash \bigvee u_1 \cdots u_n \neg (\phi_1(u_1) \wedge \cdots \wedge \phi_n(u_n) \rightarrow \alpha) \leftrightarrow \bigvee u_1 \cdots u_n (\phi_1(u_1) \wedge \cdots \wedge \phi_n(u_n) \wedge \neg \alpha).$$

Más aún, por el Metateorema 2.10 basta ver que

$$\vdash \neg (\phi_1(u_1) \wedge \cdots \wedge \phi_n(u_n) \rightarrow \alpha) \leftrightarrow (\phi_1(u_1) \wedge \cdots \wedge \phi_n(u_n) \wedge \neg \alpha),$$

pero esto es directo por la regla (NI<sub>1</sub>).

**Demostremos ahora (iii).**

Por (DN) y el Metateorema 3.4 tenemos que

$$\vdash \bigvee \phi_1(u_1, t_1) \cdots \bigvee \phi_n(u_n) \alpha \leftrightarrow \bigvee \phi_1(u_1) \cdots \bigvee \phi_n(u_n) \neg \neg \alpha$$

y por el Metateorema 3.5 tenemos que

$$\vdash \bigvee \phi_1(u_1) \cdots \bigvee \phi_n(u_n) \neg \neg \alpha \leftrightarrow \neg \bigwedge \phi_1(u_1) \cdots \bigwedge \phi_n(u_n) \neg \alpha,$$

luego por (MBB) basta ver que

$$\vdash \neg \bigwedge \phi_1(u_1) \cdots \bigwedge \phi_n(u_n) \neg \alpha \leftrightarrow \bigvee u_1 \cdots u_n (\phi_1(u_1) \wedge \cdots \wedge \phi_n(u_n) \wedge \alpha). \quad (3.14)$$

Ahora bien, por (ii) tenemos que

$$\vdash \neg \bigwedge \phi_1(u_1) \cdots \bigwedge \phi_n(u_n) \neg \alpha \leftrightarrow \bigvee u_1 \cdots u_n (\phi_1(u_1) \wedge \cdots \wedge \phi_n(u_n) \wedge \neg \neg \alpha)$$

y por (DN), el Teorema 2.11 4) y el Metateorema 2.10 se tiene que

$$\vdash \bigvee u_1 \cdots u_n (\phi_1(u_1) \wedge \cdots \wedge \phi_n(u_n) \wedge \neg \neg \alpha) \leftrightarrow \bigvee u_1 \cdots u_n (\phi_1(u_1) \wedge \cdots \wedge \phi_n(u_n) \wedge \alpha),$$

luego aplicando la regla (MBB) se obtiene (3.14) y con ello queda demostrado (iii).

Finalmente **demostraremos (iv)**.

Para ello, observemos que por el Teorema 2.11 1) aplicado a (iii) tenemos que

$$\vdash \neg \bigvee \phi_1(u_1) \cdots \bigvee \phi_n(u_n) \alpha \leftrightarrow \neg \bigvee u_1 \cdots u_n (\phi_1(u_1) \wedge \cdots \wedge \phi_n(u_n) \wedge \alpha)$$

y por el Metateorema 2.6 se tiene que

$$\vdash \neg \bigvee u_1 \cdots u_n (\phi_1(u_1) \wedge \cdots \wedge \phi_n(u_n) \wedge \alpha) \leftrightarrow \bigwedge u_1 \cdots u_n \neg (\phi_1(u_1) \wedge \cdots \wedge \phi_n(u_n) \wedge \alpha),$$

luego por la regla (MBB) basta demostrar que

$$\vdash \bigwedge u_1 \cdots u_n \neg (\phi_1(u_1) \wedge \cdots \wedge \phi_n(u_n) \wedge \alpha) \leftrightarrow \bigwedge u_1 \cdots u_n (\phi_1(u_1) \wedge \cdots \wedge \phi_n(u_n) \rightarrow \neg \alpha).$$

Más aún, por el Metateorema 2.10 basta ver que

$$\vdash \neg (\phi_1(u_1) \wedge \cdots \wedge \phi_n(u_n) \wedge \alpha) \leftrightarrow (\phi_1(u_1) \wedge \cdots \wedge \phi_n(u_n) \rightarrow \neg \alpha),$$

pero esto es directo por (3.5). 

En el caso particular de  $\mathcal{L}_{tc}$  tenemos que si  $t_1, \dots, t_n$  son términos tales que  $u_1, \dots, u_n$  no están libres en  $t_1, \dots, t_n$ , entonces es claro que para cada  $i = 1, \dots, n-1$  se cumple que  $u_{i+1}, \dots, u_n$  no están libres en  $u_1 \in t_1, \dots, u_i \in t_i$ , luego se cumplen:

$$\vdash \bigwedge u_1 \in t_1 \cdots \bigwedge u_n \in t_n \alpha \leftrightarrow \bigwedge u_1 \cdots u_n (u_1 \in t_1 \wedge \cdots \wedge u_n \in t_n \rightarrow \alpha). \quad (3.15)$$

$$\vdash \neg \bigwedge u_1 \in t_1 \cdots \bigwedge u_n \in t_n \alpha \leftrightarrow \bigvee u_1 \cdots u_n (u_1 \in t_1 \wedge \cdots \wedge u_n \in t_n \wedge \neg \alpha). \quad (3.16)$$

$$\vdash \bigvee u_1 \in t_1 \cdots \bigvee u_n \in t_n \alpha \leftrightarrow \bigvee u_1 \cdots u_n (u_1 \in t_1 \wedge \cdots \wedge u_n \in t_n \wedge \alpha). \quad (3.17)$$

$$\vdash \neg \bigvee u_1 \in t_1 \cdots \bigvee u_n \in t_n \alpha \leftrightarrow \bigwedge u_1 \cdots u_n (u_1 \in t_1 \wedge \cdots \wedge u_n \in t_n \rightarrow \neg \alpha). \quad (3.18)$$

En particular, cuando  $t_1 \equiv t_2 \equiv \cdots \equiv t_n \equiv t$  denotaremos

$$\bigwedge u_1 \cdots u_n \in t \alpha \equiv \bigwedge u_1 \in t \cdots \bigwedge u_n \in t \alpha,$$

$$\bigvee u_1 \cdots u_n \in t \alpha \equiv \bigvee u_1 \in t \cdots \bigvee u_n \in t \alpha,$$

con lo que por (3.15), (3.16), (3.17) y (3.18), si  $u_1, \dots, u_n$  no están libres en  $t$  entonces

$$\vdash \bigwedge u_1 \cdots u_n \in t \alpha \leftrightarrow \bigwedge u_1 \cdots u_n (u_1 \in t \wedge \cdots \wedge u_n \in t \rightarrow \alpha),$$

$$\vdash \neg \bigwedge u_1 \cdots u_n \in t \alpha \leftrightarrow \bigvee u_1 \cdots u_n (u_1 \in t \wedge \cdots \wedge u_n \in t \wedge \neg \alpha),$$

$$\vdash \bigvee u_1 \cdots u_n \in t \alpha \leftrightarrow \bigvee u_1 \cdots u_n (u_1 \in t \wedge \cdots \wedge u_n \in t \wedge \alpha),$$

$$\vdash \neg \bigvee u_1 \cdots u_n \in t \alpha \leftrightarrow \bigwedge u_1 \cdots u_n (u_1 \in t \wedge \cdots \wedge u_n \in t \rightarrow \neg \alpha).$$

**Nota 6:** ... teoría básica de conjuntos ...

Los resultados de la sección 5.5.3 muestran que  $\mathbb{N}$  es un modelo de ZF-AI<sup>9</sup> (la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel sin el axioma de infinitud), luego como todo axioma de B es un teorema de ZF-AI, el teorema de corrección nos da que  $\mathbb{N} \models B$ . En efecto, si  $\alpha$  es un axioma de B, entonces  $\vdash_{ZF-AI} \alpha$  y por la **Nota 2** **pág. 82** obtenemos que  $\mathbb{N} \models \alpha$ .

El Teorema 3.4 nos asegura entonces que B es consistente.

La idea de fondo para ver que  $\mathbb{N}$  es un modelo de B es definir la relación de pertenencia en  $\mathbb{N}$  como:

*$n \in m$  si, y solo si, la cifra en la posición  $n$ <sup>10</sup> en el desarrollo binario de  $m$  es 1.*

Entonces se tiene que:

- El axioma de extensionalidad se traduce en que si dos naturales tienen el mismo desarrollo binario entonces son iguales, lo cual es cierto.
- Dados dos naturales  $n$  y  $m$ , el “conjunto” cuya existencia asegura el axioma del par es el natural  $p$  cuyo desarrollo binario viene dado por la sucesión formada por ceros salvo en las posiciones  $n$  y  $m$ .
- Dado un natural  $n$ , el “conjunto” cuya existencia asegura el axioma de unión es el natural  $p$  construido de la siguiente forma:
  - Si  $\{n_i\}_{i=0}^{\infty}$  es el desarrollo binario de  $n$ , consideramos los naturales  $m_1, \dots, m_k$  tales que  $n_{m_j} = 1$ .
  - Para cada  $m_j$  con  $j = 1, \dots, k$  calculamos su desarrollo binario  $\{m_{j,i}\}_{i=0}^{\infty}$  y consideramos los naturales  $p_j^1, \dots, p_j^{k_j}$  tales que  $m_{j,p_j^l} = 1$ .
  - $p$  es el natural cuyo desarrollo decimal  $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$  es tal que  $p_i = 1$  si, y solo si,  $i = p_j^l$  para algún  $j = 1, \dots, k$  y  $l = 1, \dots, k_j$ .
- Dados dos naturales  $n$  y  $m$ , el “conjunto” cuya existencia asegura el axioma de diferencia es el natural  $p$  cuyo desarrollo decimal  $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$  es tal que  $p_i = 1$  si, y solo si,  $n_i \neq m_i$  siendo  $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$  y  $\{m_i\}_{i=1}^{\infty}$  los desarrollos decimales de  $n$  y  $m$  respectivamente.

**Nota 7: Extensionalidad ...**

El “recíproco” del axioma de extensionalidad, es decir, “si dos conjuntos son iguales, entonces tienen los mismos elementos”, formalmente

$$\bigwedge xy \left( x = y \rightarrow \bigwedge u (u \in x \leftrightarrow u \in y) \right),$$

es un teorema lógico de  $\mathcal{L}_{tc}$ :

<sup>9</sup> Realmente los resultados muestran que ZF-AI se interpreta en AP con el universo de la interpretación dado por la fórmula  $x = x$  (ver los ejemplos tras el Metateorema D.3) y el Metateorema D.9 nos da que  $\mathbb{N}$  es realmente un modelo de ZF-AI.

<sup>10</sup> Recordemos que el desarrollo binario de un natural  $m$  es la única sucesión  $\{m_i\}_{i=0}^{\infty}$  tal que cada  $m_i$  es 0 o 1 y  $m = \sum_{i=0}^{\infty} m_i 2^i$ . Así, la cifra en la posición  $n$  de este desarrollo binario es  $m_n$ .

|     |                                                                                |                           |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| (1) | $x = y$                                                                        | Hipótesis                 |
| (2) | $u = u$                                                                        | I                         |
| (3) | $u = u \wedge x = y$                                                           | IC 1, 2                   |
| (4) | $(u = u \wedge x = y) \rightarrow (u \in x \leftrightarrow u \in y)$           | Mteo. 2.16                |
| (5) | $u \in x \leftrightarrow u \in y$                                              | MP 3, 4                   |
| (6) | $\bigwedge u(u \in x \leftrightarrow u \in y)$                                 | IG 5 ( $u$ no libre en 1) |
| (7) | $x = y \rightarrow \bigwedge u(u \in x \leftrightarrow u \in y)$               | Tma. deducción            |
| (8) | $\bigwedge xy(x = y \rightarrow \bigwedge u(u \in x \leftrightarrow u \in y))$ | IG 7 ( $\times 2$ )       |

**Nota 8:** ... es contradictoria ...

Ya hemos visto en la **Nota 7** pág. 85 que  $x \neq y$  es contradictoria, con lo que si  $T$  es consistente no puede ocurrir que  $x \neq y$  sea un teorema de  $T$  (pues por el Teorema 3.5 con  $\Delta \equiv x \neq y$  y  $\Gamma$  los axiomas propios de  $T$  concluiríamos que  $T$  es contradictoria). Por tanto, si  $T$  es también completa debe cumplirse que  $\vdash_T x = y$ .

## Página 88

**Nota 1:** ... extensión de  $x$  ...

Si tenemos un modelo  $M$  de  $B$ , los conjuntos en el sentido técnico de la palabra son los objetos de  $M$  y lo que se dice en el texto es que si  $a$  es uno de estos objetos, entonces podemos asociarle una colección de objetos de  $M$ , que denominaremos su extensión, y que no es más que la colección de todos los objetos  $b$  de  $M$  que satisfacen  $b M(\in) a$ <sup>11</sup> o, equivalentemente, la colección de todos los objetos  $b$  de  $M$  que cumplen que<sup>12</sup>

$$M \models (y \in x) [v_{xy}^{ab}].$$

Además, como  $M$  es un modelo de  $B$  tenemos que en él se satisface el axioma de extensionalidad y que, por tanto, si dos objetos de  $M$  tienen la misma extensión, entonces serán el mismo objeto.

En efecto, si dos objetos  $a, a'$  tienen la misma extensión, entonces tenemos que se cumple que

$$M \models \left( \bigwedge u(u \in x \leftrightarrow u \in y) \right) [v_{xy}^{aa'}]$$

luego el axioma de extensionalidad nos da que  $a \equiv a'$ .

**Nota 2: Definición ...**

Si queremos ser completamente precisos debemos especificar que variable es  $u$ :

<sup>11</sup> Como  $M(\in)$  es una relación diádica bien definida en  $M$ , la propiedad  $P$  sobre los objetos de  $M$  que es satisfecha por un objeto  $b$  de  $M$  si, y solo si, se cumple  $b M(\in) a$ , estará también bien definida, luego por la **Nota 1** pág. 4 la colección descrita está bien definida.

<sup>12</sup> Por el Teorema 1.9 tenemos que no importa la valoración  $v$  que tomemos para definir esta colección, luego podemos fijarla como la valoración trivial que a cada variable le asigna el objeto  $a$  de  $M$ .

Dadas  $x, y$  dos variables de  $\mathcal{L}_{tc}$  definimos

$$x \subset y \equiv \bigwedge u (u \in x \rightarrow u \in y)$$

donde  $u$  es la variable de menor índice distinta de  $x$  e  $y$ .

El fijar  $u$  como la variable de menor índice distinta de  $x$  e  $y$  es un mero tecnicismo para que no haya ninguna ambigüedad sobre cual es exactamente la fórmula  $x \subset y$ , pero está claro que si  $v$  es una variable distinta de  $x$  e  $y$  se cumple que

$$\vdash x \subset y \leftrightarrow \bigwedge v (v \in x \rightarrow v \in y). \quad (3.19)$$

En efecto, tenemos la siguiente demostración:

|     |                                                                         |                                        |
|-----|-------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------|
| (1) | $x \subset y \equiv \bigwedge u (u \in x \rightarrow u \in y)$          | Hipótesis                              |
| (2) | $v \in x \rightarrow v \in y$                                           | EG 1 ( $u$ no libre en $x$ ni en $y$ ) |
| (3) | $\bigwedge v (v \in x \rightarrow v \in y)$                             | IG 2 ( $v$ no libre en 1)              |
| (4) | $x \subset y \rightarrow \bigwedge v (v \in x \rightarrow v \in y)$     | Tma. deducción                         |
| (5) | $\bigwedge v (v \in x \rightarrow v \in y)$                             | Hipótesis                              |
| (6) | $u \in x \rightarrow u \in y$                                           | EG 5 ( $v$ no libre en $x$ ni en $y$ ) |
| (7) | $\bigwedge u (u \in x \rightarrow u \in y) \equiv x \subset y$          | IG 6 ( $u$ no libre en 5)              |
| (8) | $\bigwedge v (v \in x \rightarrow v \in y) \rightarrow x \subset y$     | Tma. deducción                         |
| (9) | $x \subset y \leftrightarrow \bigwedge v (v \in x \rightarrow v \in y)$ | IB 4, 8                                |

Luego queda demostrado (3.19). 

Por tanto, en la práctica es irrelevante que variable tomemos como  $u$  salvo por la condición de que sea distinta de  $x$  e  $y$ , condición completamente comprensible pues, en caso contrario, la fórmula no “significaría lo que debe”.

Tenemos entonces que  $\phi(x, y) \equiv x \subset y$  es una fórmula con las variables libres indicadas y podemos definir

$$s \subset t \equiv \phi(s, t).$$

Si queremos evitar cualquier tipo de imprecisión, podemos definir  $s \subset t$  como la sustitución en  $x \subset y$  donde  $x$  e  $y$  son las variables de menor índice que no están en  $s$  ni en  $t$ , pero esto será irrelevante pues a continuación veremos que

$$\vdash s \subset t \leftrightarrow \bigwedge u (u \in s \rightarrow u \in t), \quad (3.20)$$

pudiendo tomar la fórmula  $\phi(x, y) \equiv x \subset y$  con cualesquiera variables  $x$  e  $y$  y siendo  $u$  cualquier variable que no esté libre en  $s$  ni en  $t$ . Es decir, (3.20) justifica que las variables  $x$  e  $y$  que tomemos para definir  $s \subset t$  son irrelevantes (en el sentido de que obtenemos fórmulas equivalentes al tomar otras variables distintas) y además nos muestra que la fórmula  $s \subset t$  realmente “significa” lo que queremos.

La demostración de (3.20) es inmediata:

Tomando  $v$  una variable distinta de  $x$  e  $y$  que no esté libre en  $s$  ni en  $t$  tenemos por (3.19) que

$$\vdash x \subset y \leftrightarrow \bigwedge v (v \in x \rightarrow v \in y),$$

con lo que tomando  $z_1, z_2$  variables que no estén libres en  $s$  ni en  $t$  y distintas de  $x, y$  y  $v$ , por el Metateorema 1.18 obtenemos que

$$\vdash S_{z_1}^s S_{z_2}^t S_x^{z_1} S_y^{z_2} (x \subset y) \leftrightarrow S_{z_1}^s S_{z_2}^t S_x^{z_1} S_y^{z_2} \bigwedge v (v \in x \rightarrow v \in y),$$

luego como por el Metateorema 1.16 se tiene que

$$\vdash s \subset t \leftrightarrow S_{z_1}^s S_{z_2}^t S_x^{z_1} S_y^{z_2} (x \subset y)$$

concluimos que

$$\vdash s \subset t \leftrightarrow S_{z_1}^s S_{z_2}^t S_x^{z_1} S_y^{z_2} \bigwedge v (v \in x \rightarrow v \in y).$$

Ahora bien, por (1.36) es

$$S_{z_1}^s S_{z_2}^t S_x^{z_1} S_y^{z_2} \bigwedge v (v \in x \rightarrow v \in y) \equiv \bigwedge v (v \in s \rightarrow v \in t),$$

con lo que tenemos que

$$\vdash s \subset t \leftrightarrow \bigwedge v (v \in s \rightarrow v \in t). \quad (3.21)$$

Con una demostración completamente análoga a la dada para (3.19) se obtiene que

$$\vdash \bigwedge v (v \in s \rightarrow v \in t) \leftrightarrow \bigwedge u (u \in s \rightarrow u \in t) \quad (3.22)$$

y de (3.21) y (3.22) obtenemos lo deseado. 

El Metateorema 1.21 también nos muestra que

$$\vdash S_x^{t'} (s \subset t) \leftrightarrow \bigwedge u (u \in S_x^{t'} s \rightarrow u \in S_x^{t'} t), \quad (3.23)$$

donde por  $s \subset t$  entendemos cualquier sustitución en cualquier fórmula  $x \subset y$  y  $u$  es cualquier variable que no esté libre en  $s, t$  ni  $t'$ .

En efecto, por el Metateorema 1.21 tenemos que

$$\vdash S_x^{t'} (s \subset t) \leftrightarrow (S_x^{t'} s) \subset (S_x^{t'} t)$$

y por (3.20) tenemos que (por el Teorema 1.13 3)  $u$  no está libre en  $S_x^{t'} s$  ni en  $S_x^{t'} t$

$$\vdash (S_x^{t'} s) \subset (S_x^{t'} t) \leftrightarrow \bigwedge u (u \in S_x^{t'} s \rightarrow u \in S_x^{t'} t),$$

luego por la regla (MBB) obtenemos (3.23). 

Finalmente observemos que aunque expresemos  $s \subset t$  mediante su definición o mediante la equivalencia dada por (3.20), por el Metateorema 1.15 las variables libres que tiene la fórmula son exactamente las variables libres de  $s$  y las de  $t$ .

En general, cada vez que se le da nombre a una fórmula estará de fondo una discusión completamente análoga a la que aquí hemos visto aunque no se haga explícita, por lo que siempre que sea necesario se utilizaran resultados como los vistos sin hacer referencia a ello. A lo largo del texto no haremos más esta discusión a no ser que sea necesario, pero ante cualquier definición de una fórmula se pueden seguir los pasos aquí dados con demostraciones muy similares para obtener los resultados relevantes para dicha fórmula.

## Página 89

**Nota 1:** Veamos, por ejemplo, el segundo

Demostremos los otros dos teoremas.

Para el **primero** tenemos



- |     |                                            |          |
|-----|--------------------------------------------|----------|
| (1) | $u \in x \rightarrow u \in x$              | Tma. 2.7 |
| (2) | $\bigwedge u(u \in x \rightarrow u \in x)$ | IG 1     |
| (3) | $x \subset x$                              | R 2      |
| (4) | $\bigwedge x x \subset x$                  | IG 3     |

Mientras que para **el tercero** se tiene:

- |      |                                                                         |                                           |
|------|-------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------|
| (1)  | $x \subset y \wedge y \subset z$                                        | Hipótesis                                 |
| (2)  | $x \subset y$                                                           | EC 1                                      |
| (3)  | $y \subset z$                                                           | EC 1                                      |
| (4)  | $\bigwedge u(u \in x \rightarrow u \in y)$                              | R 2 ( $u$ no en $x, y, z$ ) <sup>13</sup> |
| (5)  | $\bigwedge u(u \in y \rightarrow u \in z)$                              | R 3                                       |
| (6)  | $u \in x \rightarrow u \in y$                                           | EG 4                                      |
| (7)  | $u \in y \rightarrow u \in z$                                           | EG 5                                      |
| (8)  | $u \in x \rightarrow u \in z$                                           | MB 6, 7                                   |
| (9)  | $\bigwedge u(u \in x \rightarrow u \in z)$                              | IG 8 ( $u$ no libre en 1)                 |
| (10) | $x \subset z$                                                           | R 9                                       |
| (11) | $x \subset y \wedge y \subset z \rightarrow x \subset z$                | Tma. deducción                            |
| (12) | $\bigwedge xyz(x \subset y \wedge y \subset z \rightarrow x \subset z)$ | IG 11 ( $\times 3$ )                      |

Esto concluye la prueba de los dos teoremas. 

### Nota 2: R 2 ... R 3 ... IG 8

Aquí, o bien se considera que  $u$  es la variable de menor índice que no está en  $x$  e  $y$ , con lo que realmente se aplica la regla (R), o bien se considera que  $u$  es una variable que no esté en  $x$  ni en  $y$  y entonces realmente se aplica la regla (SE) junto a (3.19).

Así, en el primer caso la aplicación de la regla (IG) en la línea 9 es válida porque  $u$  no está libre en la línea 1 al ser

$$x \subset y \wedge y \subset x \equiv \bigwedge u(u \in x \rightarrow u \in y) \wedge \bigwedge u(u \in y \rightarrow u \in x),$$

mientras que en el segundo caso es válido porque igualmente  $u$  no estará libre en la línea 1 ya que, o bien es la variable de menor índice que no está en  $x$  e  $y$  y estamos en el caso anterior, o bien es otra variable que no está en  $x$  e  $y$  y con ello tampoco está en  $x \subset y \wedge y \subset x$ .

Una vez aclarado este punto damos por sobreentendidas este tipo de discusiones (para la fórmula  $x \subset y$  y cualquier otra fórmula nueva que definamos, pues los argumentos serán análogos) y no volveremos a hacer referencia a estas cuestiones salvo que sea necesario.

### Nota 3: Extensionalidad

Aquí se hace uso del Metateorema 3.1 y lo discutido en la Nota 3 pág. 82 para utilizar la versión del axioma de extensionalidad con las variables que nos convengan.

<sup>13</sup> Como se discute en la Nota 2 pág. 89 aquí realmente no estamos aplicando la regla (R), sino que aplicamos la regla (SE) junto a (3.19). En general se sobreentenderá este abuso de notación y no entraremos en estos detalles a no ser que sea necesario.

De nuevo, esta discusión se da por sobreentendida y no volveremos a hacer referencia a ella a no ser que sea necesario.

## Página 90

**Nota 1:** ... razonando en B ...

Veamos formalmente que

$$\vdash_B \bigwedge xy \bigvee^1 z \bigwedge u (u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y).$$

En efecto, si  $w$  es una variable que no está en

$$\alpha \equiv \bigwedge u (u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$$

(luego también distinta de  $z$ ) tenemos la demostración:

|      |                                                                                                                          |                           |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| (1)  | $\bigwedge xy \bigvee z \bigwedge u (u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$                                          | Ax. Par                   |
| (2)  | $\bigvee z \bigwedge u (u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$                                                       | EG 1 ( $\times 2$ )       |
| (3)  | $\alpha \wedge S_z^w \alpha$                                                                                             | Hipótesis                 |
| (4)  | $u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y$                                                                               | EC, EG 3                  |
| (5)  | $u \in w \leftrightarrow u = x \vee u = y$                                                                               | EC, EG 3                  |
| (6)  | $u \in w \leftrightarrow u \in z$                                                                                        | MBB 4, 5                  |
| (7)  | $\bigwedge u (u \in w \leftrightarrow u \in z)$                                                                          | IG 6 ( $u$ no libre en 3) |
| (8)  | $\bigwedge xy (\bigwedge u (u \in x \leftrightarrow u \in y) \rightarrow x = y)$                                         | Ax. extensionalidad       |
| (9)  | $\bigwedge u (u \in w \leftrightarrow u \in z) \rightarrow w = z$                                                        | EG 8 ( $\times 2$ )       |
| (10) | $w = z$                                                                                                                  | MP 7, 9                   |
| (11) | $\alpha \wedge S_z^w \alpha \rightarrow w = z$                                                                           | Tma. deducción            |
| (12) | $\bigwedge zw (\alpha \wedge S_z^w \alpha \rightarrow w = z)$                                                            | IG 11 ( $\times 2$ )      |
| (13) | $\bigvee z \alpha \wedge \bigwedge zw (\alpha \wedge S_z^w \alpha \rightarrow w = z)$                                    | IC 2, 12                  |
| (14) | $\bigvee^1 z \alpha \leftrightarrow \bigvee z \alpha \wedge \bigwedge zw (\alpha \wedge S_z^w \alpha \rightarrow w = z)$ | Tma. 2.12                 |
| (15) | $\bigvee^1 z \alpha$                                                                                                     | SE 13, 14                 |
| (16) | $\bigwedge xy \bigvee^1 z \bigwedge u (u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$                                        | IG 15 ( $\times 2$ )      |

Esto prueba lo deseado.



## Página 91

**Nota 1:** ... para definir ...

De forma análoga a la discusión respecto a la definición de fórmulas (ver **Nota 2** pág. 88), si queremos ser totalmente precisos debemos especificar exactamente cuales son las variables auxiliares en el término  $\{x, y\}$ :

Dadas dos variables  $x$  e  $y$  de  $\mathcal{L}_{tc}$  definimos

$$\{x, y\} \equiv z \mid \bigwedge u (u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$$

donde  $z, u$  son las variables de menor índice distintas de  $x$  e  $y$ .

El fijar  $z, u$  como las variables de menor índice distintas de  $x$  e  $y$  es un mero tecnicismo para que no haya ninguna ambigüedad sobre cual es exactamente el término  $\{x, y\}$ , pues si  $w$  y  $v$  son otras variables distintas de  $x$  e  $y$  tenemos que

$$\vdash \{x, y\} = w \mid \bigwedge v (v \in w \leftrightarrow v = x \vee v = y) . \quad (3.24)$$

Para probarlo, necesitaremos previamente el cuarto apartado del siguiente resultado:

### Metateorema 3.7

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal,  $\alpha$  una fórmula y  $x, z$  variables de modo que  $z$  no está libre en  $\alpha$ . Entonces se cumplen:

- (i)  $\vdash \bigwedge x \alpha \leftrightarrow \bigwedge z S_x^z \alpha$
- (ii)  $\vdash \bigvee x \alpha \leftrightarrow \bigvee z S_x^z \alpha$
- (iii)  $\vdash \bigvee^1 x \alpha \leftrightarrow \bigvee^1 z S_x^z \alpha$
- (iv)  $\vdash x \mid \alpha = z \mid S_x^z \alpha$ .

La demostración de (i) es inmediata:

|      |                                                               |                           |
|------|---------------------------------------------------------------|---------------------------|
| (1)  | $\bigwedge x \alpha$                                          | Hipótesis                 |
| (2)  | $S_x^z \alpha$                                                | EG 1                      |
| (3)  | $\bigwedge z S_x^z \alpha$                                    | IG 2 ( $z$ no libre en 1) |
| (4)  | $\bigwedge x \alpha \rightarrow \bigwedge z S_x^z \alpha$     | Tma. deducción            |
| (5)  | $\bigwedge z S_x^z \alpha$                                    | Hipótesis                 |
| (6)  | $S_z^x S_x^z \alpha$                                          | EG 5                      |
| (7)  | $\alpha$                                                      | SE 6, Mteo. 2.2           |
| (8)  | $\bigwedge x \alpha$                                          | IG 7 ( $x$ no libre en 5) |
| (9)  | $\bigwedge z S_x^z \alpha \rightarrow \bigwedge x \alpha$     | Tma. deducción            |
| (10) | $\bigwedge x \alpha \leftrightarrow \bigwedge z S_x^z \alpha$ | IB 4, 9                   |

**Para probar (ii)** basta utilizar (i) (teniendo en cuenta que si  $z$  no está libre en  $\alpha$  tampoco lo está en  $\neg \alpha$  y que  $S_x^z \neg \alpha \equiv \neg S_x^z \alpha$ ) y la definición del particularizador:

- (1)  $\bigwedge x \neg \alpha \leftrightarrow \bigwedge z \neg S_x^z \alpha$  (i)
- (2)  $\neg \bigwedge x \neg \alpha \leftrightarrow \neg \bigwedge z \neg S_x^z \alpha$  SE 1, Tma. 2.11 1)
- (3)  $\bigvee x \alpha \leftrightarrow \bigvee z S_x^z \alpha$  R 2

**Demostraremos ahora (iii).**

Por el Teorema 2.9 3) tenemos que si  $y$  es una variable distinta de  $x$  y de  $z$  y que no está en  $\alpha$  ni en  $S_x^z \alpha$ , entonces

$$\vdash \bigvee^1 x \alpha \leftrightarrow \bigvee y \bigwedge x (\alpha \leftrightarrow y = x)$$

y

$$\vdash \bigvee^1 z S_x^z \alpha \leftrightarrow \bigvee y \bigwedge z (S_x^z \alpha \leftrightarrow y = z),$$

luego por la regla (MBB) basta ver que

$$\vdash \bigvee y \bigwedge x (\alpha \leftrightarrow y = x) \leftrightarrow \bigvee y \bigwedge z (S_x^z \alpha \leftrightarrow y = z). \quad (3.25)$$

Para esta última fórmula tenemos la demostración:

|      |                                                                                                                                   |                                 |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|
| (1)  | $\bigvee y \bigwedge x (\alpha \leftrightarrow y = x)$                                                                            | Hipótesis                       |
| (2)  | $\bigwedge x (\alpha \leftrightarrow y = x)$                                                                                      | EP 1 ( $y$ no libre en 1)       |
| (3)  | $S_x^z \alpha \leftrightarrow y = z$                                                                                              | EG 2                            |
| (4)  | $\bigwedge z (S_x^z \alpha \leftrightarrow y = z)$                                                                                | IG 3 ( $z$ no libre en 1 ni 2)  |
| (5)  | $\bigvee y \bigwedge z (S_x^z \alpha \leftrightarrow y = z)$                                                                      | IP 4 ( $y$ no libre)            |
| (6)  | $\bigvee y \bigwedge x (\alpha \leftrightarrow y = x) \rightarrow \bigvee y \bigwedge z (S_x^z \alpha \leftrightarrow y = z)$     | Tma. deducción                  |
| (7)  | $\bigvee y \bigwedge z (S_x^z \alpha \leftrightarrow y = z)$                                                                      | Hipótesis                       |
| (8)  | $\bigwedge z (S_x^z \alpha \leftrightarrow y = z)$                                                                                | EP 8 ( $y$ no libre en 7)       |
| (9)  | $S_z^x S_x^z \alpha \leftrightarrow y = x$                                                                                        | EG 8                            |
| (10) | $\alpha \leftrightarrow S_z^x S_x^z \alpha$                                                                                       | Mteo. 2.2                       |
| (11) | $\alpha \leftrightarrow y = x$                                                                                                    | MBB 9, 10                       |
| (12) | $\bigwedge x (\alpha \leftrightarrow y = x)$                                                                                      | IG 11 ( $x$ no libre en 7 ni 8) |
| (13) | $\bigvee y \bigwedge x (\alpha \leftrightarrow y = x)$                                                                            | IP 12 ( $y$ no libre)           |
| (14) | $\bigvee y \bigwedge z (S_x^z \alpha \leftrightarrow y = z) \rightarrow \bigvee y \bigwedge x (\alpha \leftrightarrow y = x)$     | Tma. deducción                  |
| (15) | $\bigvee y \bigwedge x (\alpha \leftrightarrow y = x) \leftrightarrow \bigvee y \bigwedge z (S_x^z \alpha \leftrightarrow y = z)$ | IB 6, 14                        |

**Finalmente probaremos (iv).**

Tomando  $y$  una variable que no está en  $S_x^z \alpha$ ,  $x|\alpha$  y distinta de  $z$  tenemos:

|      |                                                                                                        |                        |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| (1)  | $\bigvee^1 x \alpha$                                                                                   | Hipótesis              |
| (2)  | $\bigvee^1 z S_x^z \alpha$                                                                             | SE 1, (iii)            |
| (3)  | $S_x^{x \alpha} \alpha$                                                                                | DP 1                   |
| (4)  | $S_z^{z S_x^z \alpha} S_x^z \alpha$                                                                    | DP 2                   |
| (5)  | $S_x^{z S_x^z \alpha} \leftrightarrow S_z^{z S_x^z \alpha} S_x^z \alpha$                               | Mteo. 2.3              |
| (6)  | $S_x^{z S_x^z \alpha}$                                                                                 | SE 4, 5                |
| (7)  | $x \alpha = z S_x^z \alpha$                                                                            | Mteo. 2.4 (IC 1, 3, 6) |
| (8)  | $\bigvee^1 x \alpha \rightarrow x \alpha = z S_x^z \alpha$                                             | Tma. deducción         |
| (9)  | $\neg \bigvee^1 x \alpha$                                                                              | Hipótesis              |
| (10) | $\neg \bigvee^1 x \alpha \leftrightarrow \neg \bigvee^1 z S_x^z \alpha$                                | SE Teo. 2.11 1), (iii) |
| (11) | $\neg \bigvee^1 z S_x^z \alpha$                                                                        | SE 9, 10               |
| (12) | $x \alpha = y y = y$                                                                                   | DI 9                   |
| (13) | $z S_x^z \alpha = y y = y$                                                                             | DI 11                  |
| (14) | $y y = y = z S_x^z \alpha$                                                                             | SI 13                  |
| (15) | $x \alpha = z S_x^z \alpha$                                                                            | TI 12, 14              |
| (16) | $\neg \bigvee^1 x \alpha \rightarrow x \alpha = z S_x^z \alpha$                                        | Tma. deducción         |
| (17) | $\left( \bigvee^1 x \alpha \vee \neg \bigvee^1 x \alpha \right) \rightarrow x \alpha = z S_x^z \alpha$ | Dil 8, 16              |

$$\begin{array}{ll}
(18) & \bigvee^1 x \alpha \vee \neg \bigvee^1 x \alpha & \text{TND} \\
(19) & x | \alpha = z | S_x^z \alpha & \text{MP 17, 18}
\end{array}$$

Con esto concluye la demostración del resultado. 

Con esto podemos probar (3.24):

En general veamos que si  $w, v$  y  $z, u$  son variables que no están libres en dos términos  $s, t$ , entonces se cumple que

$$\vdash w \left| \bigwedge v (v \in w \leftrightarrow v = s \vee v = t) = z \left| \bigwedge u (u \in z \leftrightarrow u = s \vee u = t), \quad (3.26) \right.$$

pues claramente prueba el resultado deseado al tomar  $s \equiv x$  y  $t \equiv y$ .

Podemos suponer además que  $z, u$  son ambas distintas de  $w, v$ , pues si (3.26) es cierto en este caso particular, entonces tomando  $y, a$  otras variables que no estén en  $s$  ni en  $t$  y distintas de  $z, u, w, v$  tenemos que

$$\vdash w \left| \bigwedge v (v \in w \leftrightarrow v = s \vee v = t) = y \left| \bigwedge a (a \in y \leftrightarrow a = s \vee a = t), \right.$$

pues  $y, a$  son ambas distintas de  $w, v$ , y que

$$\vdash y \left| \bigwedge a (a \in y \leftrightarrow a = s \vee a = t) = z \left| \bigwedge u (u \in z \leftrightarrow u = s \vee u = t), \right.$$

pues  $z, u$  son ambas distintas de  $y, a$ , luego por (TI) concluimos con lo deseado.

Suponiendo entonces que  $w, v$  y  $z, u$  no están libres en  $s$  ni en  $t$  y que todas son distintas entre sí tenemos en primer lugar que

$$\vdash \bigwedge w \left( \bigwedge v (v \in w \leftrightarrow v = s \vee v = t) \leftrightarrow \bigwedge u (u \in w \leftrightarrow u = s \vee u = t) \right).$$

En efecto, tenemos la demostración:

|      |                                                          |                                        |
|------|----------------------------------------------------------|----------------------------------------|
| (1)  | $\bigwedge v (v \in w \leftrightarrow v = s \vee v = t)$ | Hipótesis                              |
| (2)  | $u \in w \leftrightarrow u = s \vee u = t$               | EG 1 ( $v$ no libre en $s$ ni en $t$ ) |
| (3)  | $\bigwedge u (u \in w \leftrightarrow u = s \vee u = t)$ | IG 2 ( $u$ no libre en 1)              |
| (4)  | $(1) \rightarrow (3)$                                    | Tma. deducción                         |
| (5)  | $\bigwedge u (u \in w \leftrightarrow u = s \vee u = t)$ | Hipótesis                              |
| (6)  | $v \in w \leftrightarrow v = s \vee v = t$               | EG 5 ( $u$ no libre en $s$ ni en $t$ ) |
| (7)  | $\bigwedge v (v \in w \leftrightarrow v = s \vee v = t)$ | IG 6 ( $v$ no libre en 5)              |
| (8)  | $(3) \rightarrow (1)$                                    | Tma. deducción                         |
| (9)  | $(1) \leftrightarrow (3)$                                | IB 4, 8                                |
| (10) | $\bigwedge w ((1) \leftrightarrow (3))$                  | IG 9                                   |

Por Teorema 3.31 obtenemos entonces que

$$\vdash w \left| \bigwedge v (v \in w \leftrightarrow v = s \vee v = t) = w \left| \bigwedge u (u \in w \leftrightarrow u = s \vee u = t). \quad (3.27) \right.$$

Por otra parte, como  $w$  no está libre en  $s$  ni en  $t$  se tiene que

$$z \left| \bigwedge u (u \in z \leftrightarrow u = s \vee u = t) \equiv z \left| S_w^z \left( \bigwedge u (u \in w \leftrightarrow u = s \vee u = t) \right), \right.$$

y como  $z$  no está libre en  $\bigwedge u (u \in w \leftrightarrow u = s \vee u = t)$ , por el Metateorema 3.7 obtenemos

que

$$\vdash w \mid \bigwedge u(u \in w \leftrightarrow u = s \vee u = t) = z \mid \bigwedge u(u \in z \leftrightarrow u = s \vee u = t). \quad (3.28)$$

Usando la regla (TI) junto a (3.27) y (3.28) obtenemos (3.26) tal y como buscábamos.  $\odot$

Por tanto, en la práctica es irrelevante que variables tomemos como  $z, u$  salvo por la condición de que sean distintas de  $x$  e  $y$ , condición completamente comprensible pues, en caso contrario, la fórmula no “significaría lo que debe”.

Tenemos entonces que  $l(x, y) \equiv \{x, y\}$  es un término con las variables libres indicadas y podemos definir

$$\{s, t\} \equiv l(s, t).$$

Si queremos evitar cualquier tipo de imprecisión, podemos definir  $\{s, t\}$  como la sustitución en  $\{x, y\}$  donde  $x$  e  $y$  son las variables de menor índice que no están en  $s$  ni en  $t$ , pero esto será irrelevante pues a continuación veremos que

$$\vdash \{s, t\} = z \mid \bigwedge u(u \in z \leftrightarrow u = s \vee u = t), \quad (3.29)$$

pudiendo tomar el término  $l(x, y) \equiv \{x, y\}$  con cualesquiera variables  $x$  e  $y$  y siendo  $z, u$  cualesquiera variables que no estén libres en  $s$  ni en  $t$ . Es decir, (3.29) justifica que las variables  $x$  e  $y$  que tomemos para definir  $\{s, t\}$  son irrelevantes (en el sentido de que obtenemos términos iguales al tomar otras variables distintas) y además nos muestra que el término  $\{s, t\}$  realmente “significa” lo que queremos.

La demostración de (3.29) es inmediata:

Tomando  $w, v$  variables distintas de  $x$  e  $y$  que no estén libres en  $s$  ni en  $t$  tenemos por (3.24) que

$$\vdash \{x, y\} = w \mid \bigwedge v(v \in w \leftrightarrow v = x \vee v = y),$$

con lo que tomando  $z_1, z_2$  variables que no estén libres en  $s$  ni en  $t$  y distintas de  $x, y, w$  y  $v$ , por el Metateorema 1.19 obtenemos que

$$\vdash S_{z_1}^s S_{z_2}^t S_x^{z_1} S_y^{z_2} \{x, y\} = S_{z_1}^s S_{z_2}^t S_x^{z_1} S_y^{z_2} w \mid \bigwedge v(v \in w \leftrightarrow v = x \vee v = y),$$

luego como por el Metateorema 1.16 se tiene que<sup>14</sup>

$$\vdash \{s, t\} = S_{z_1}^s S_{z_2}^t S_x^{z_1} S_y^{z_2} \{x, y\}$$

concluimos que

$$\vdash \{s, t\} = S_{z_1}^s S_{z_2}^t S_x^{z_1} S_y^{z_2} w \mid \bigwedge v(v \in w \leftrightarrow v = x \vee v = y).$$

Ahora bien, por (1.36) y (1.38) es

$$S_{z_1}^s S_{z_2}^t S_x^{z_1} S_y^{z_2} w \mid \bigwedge v(v \in w \leftrightarrow v = x \vee v = y) \equiv w \mid \bigwedge v(v \in w \leftrightarrow v = s \vee v = t),$$

con lo que tenemos que

$$\vdash \{s, t\} = w \mid \bigwedge v(v \in w \leftrightarrow v = s \vee v = t). \quad (3.30)$$

<sup>14</sup> Donde por  $\{s, t\}$  entendemos la sustitución de  $s$  y  $t$  en  $\{x, y\}$ , no necesariamente el término obtenido de sustituir  $s$  y  $t$  en el término  $\{x', y'\}$  con  $x', y'$  las variables de menor índice que no están en  $s$  ni en  $t$ .

Por (3.26) se obtiene que

$$\vdash w \mid \bigwedge v (v \in w \leftrightarrow v = s \vee v = t) = z \mid \bigwedge u (u \in z \leftrightarrow u = s \vee u = t) \quad (3.31)$$

y de (3.30) y (3.31) obtenemos lo deseado. 

El Metateorema 1.21 también nos muestra que

$$\vdash S_x^{t'} \{s, t\} = z \mid \bigwedge u (u \in z \leftrightarrow u = S_x^{t'} s \vee u = S_x^{t'} t), \quad (3.32)$$

donde por  $\{s, t\}$  entendemos cualquier sustitución en cualquier término  $\{x, y\}$  y  $z, u$  son cualesquiera variables que no estén libres en  $s, t$  ni  $t'$ .

En efecto, por el Metateorema 1.21 tenemos que

$$\vdash S_x^{t'} \{s, t\} = \{S_x^{t'} s, S_x^{t'} t\}$$

y por (3.29) tenemos que (por el Teorema 1.13 3)  $z, u$  no están libres en  $S_x^{t'} s$  ni en  $S_x^{t'} t$

$$\vdash \{S_x^{t'} s, S_x^{t'} t\} = z \mid \bigwedge u (u \in z \leftrightarrow u = S_x^{t'} s \vee u = S_x^{t'} t),$$

luego por la regla (TI) obtenemos (3.32). 

Por otra parte, observemos que aunque expresemos  $\{s, t\}$  mediante su definición o mediante la igualdad dada por (3.29), por el Metateorema 1.15 las variables libres que tiene el término son exactamente las variables libres de  $s$  y las de  $t$ .

Observemos además que si  $z, u$  son variables que no están libres en  $s$  ni en  $t$

$$\vdash \bigvee^1 z \bigwedge u (u \in z \leftrightarrow u = s \vee u = t) \rightarrow \bigwedge u (u \in \{s, t\} \leftrightarrow u = s \vee u = t). \quad (3.33)$$

Denotando por

$$\alpha \equiv \bigwedge u (u \in z \leftrightarrow u = s \vee u = t)$$

y tomando  $w$  una variable distinta de  $u$  y que no está en  $s$  ni en  $t$  tenemos:

|      |                                                                                                |                           |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| (1)  | $\bigvee^1 z \alpha$                                                                           | Hipótesis                 |
| (2)  | $S_z^{z \mid \alpha} \alpha$                                                                   | DP 1                      |
| (3)  | $\bigwedge u (u \in z \mid \alpha \leftrightarrow u = s \vee u = t)$                           | R 2                       |
| (4)  | $u \in z \mid \alpha \leftrightarrow u = s \vee u = t$                                         | EG 3                      |
| (5)  | $S_w^{z \mid \alpha} (u \in w \leftrightarrow u = s \vee u = t)$                               | R 4                       |
| (6)  | $\{s, t\} = z \mid \alpha$                                                                     | (3.29)                    |
| (7)  | $S_w^{\{s, t\}} (u \in w \leftrightarrow u = s \vee u = t)$                                    | ETI 5, 6                  |
| (8)  | $u \in \{s, t\} \leftrightarrow u = s \vee u = t$                                              | R 7                       |
| (9)  | $\bigwedge u (u \in \{s, t\} \leftrightarrow u = s \vee u = t)$                                | IG 8 ( $u$ no libre en 1) |
| (10) | $\bigvee^1 z \alpha \rightarrow \bigwedge u (u \in \{s, t\} \leftrightarrow u = s \vee u = t)$ | Tma. deducción            |

Por tanto, se obtiene lo deseado. 

Como para cualesquiera variables  $z, u$  que no están libres en  $s$  ni en  $t$  se cumple que

$$\vdash_B \bigvee^1 z \bigwedge u (u \in z \leftrightarrow u = s \vee u = t),$$

por (3.33) podemos concluir que

$$\vdash_B \bigwedge u (u \in \{s, t\} \leftrightarrow u = s \vee u = t) \quad (3.34)$$

Más aún, por la regla (ETI) es claro que cualquier término que sea igual a  $\{s, t\}$  (como por ejemplo los dados en (3.29) o los obtenidos al sustituir  $s$  y  $t$  en cualquier término de la forma  $\{x, y\}$ ) también satisfará (3.34).

Veamos en primer lugar que

$$\vdash_B \bigvee^1 z \bigwedge u (u \in z \leftrightarrow u = s \vee u = t). \quad (3.35)$$

Para ello, tenemos la siguiente demostración donde  $x', y'$  son variables distintas de  $z$  y de  $u$  que no están en  $s$  ni en  $t$  y  $w$  es una variable distinta de  $x, y, x', y', z, u$  que no está en  $s$  ni en  $t$ :

- |     |                                                                                                                          |                           |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| (1) | $\bigwedge xy \bigvee^1 z \bigwedge u (u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$                                        | Tma. B (ver Nota pág. 90) |
| (2) | $\bigvee^1 z \bigwedge u (u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$                                                     | EG 1                      |
| (3) | $\bigvee w \bigwedge z (\bigwedge u (u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y) \leftrightarrow w = z)$                   | SE 2, Tma. 2.9 3)         |
| (4) | $\bigvee w \bigwedge z (\bigwedge u (u \in z \leftrightarrow u = x' \vee u = y') \leftrightarrow w = z)$                 | Mteo. 3.1 3               |
| (5) | $\bigwedge x' y' \bigvee w \bigwedge z (\bigwedge u (u \in z \leftrightarrow u = x' \vee u = y') \leftrightarrow w = z)$ | IG 4 ( $\times 2$ )       |
| (6) | $\bigwedge y' \bigvee w \bigwedge z (\bigwedge u (u \in z \leftrightarrow u = s \vee u = y') \leftrightarrow w = z)$     | EG 5 [(1.36), (1.37)]     |
| (7) | $\bigvee w \bigwedge z (\bigwedge u (u \in z \leftrightarrow u = s \vee u = t) \leftrightarrow w = z)$                   | EG 6 [(1.36), (1.37)]     |
| (8) | $\bigvee^1 z \bigwedge u (u \in z \leftrightarrow u = s \vee u = t)$                                                     | SE 7, Tma. 2.9 3)         |

Utilizando entonces (3.33) y (3.35) es claro que se cumple (3.34). 

En general, cada vez que se define un término estará de fondo una discusión completamente análoga a la que aquí hemos visto aunque no se haga explícita, por lo que siempre que sea necesario se utilizaran resultados como los vistos sin hacer referencia a ello. A lo largo del texto no haremos más esta discusión a no ser que sea necesario, pero ante cualquier definición de un término se pueden seguir los pasos aquí dados con demostraciones muy similares para obtener los resultados relevantes sobre dicho término.

**Nota 2:** ... nos permite probar ...

Veamos formalmente que

$$\vdash_B \bigwedge x \bigvee^1 y \bigwedge u (u \in y \leftrightarrow \bigvee v (u \in v \wedge v \in x)).$$

En efecto, si  $w$  es una variable que no está en

$$\alpha \equiv \bigwedge u (u \in y \leftrightarrow \bigvee v (u \in v \wedge v \in x))$$

(luego también distinta de  $y$ ) tenemos la demostración:

- |     |                                                                                                  |           |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| (1) | $\bigwedge x \bigvee y \bigwedge u (u \in y \leftrightarrow \bigvee v (u \in v \wedge v \in x))$ | Ax. Unión |
| (2) | $\bigvee y \bigwedge u (u \in y \leftrightarrow \bigvee v (u \in v \wedge v \in x))$             | EG 1      |



|      |                                                                                                                                     |                           |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| (3)  | $\alpha \wedge S_y^w \alpha$                                                                                                        | Hipótesis                 |
| (4)  | $u \in y \leftrightarrow \forall v(u \in v \wedge v \in x)$                                                                         | EC, EG 3                  |
| (5)  | $u \in w \leftrightarrow \forall v(u \in v \wedge v \in x)$                                                                         | EC, EG 3                  |
| (6)  | $u \in w \leftrightarrow u \in y$                                                                                                   | MBB 4, 5                  |
| (7)  | $\bigwedge u(u \in w \leftrightarrow u \in y)$                                                                                      | IG 6 ( $u$ no libre en 3) |
| (8)  | $\bigwedge xy (\bigwedge u(u \in x \leftrightarrow u \in y) \rightarrow x = y)$                                                     | Ax. extensionalidad       |
| (9)  | $\bigwedge u(u \in w \leftrightarrow u \in y) \rightarrow w = y$                                                                    | EG 8 ( $\times 2$ )       |
| (10) | $w = y$                                                                                                                             | MP 7, 9                   |
| (11) | $\alpha \wedge S_y^w \alpha \rightarrow w = y$                                                                                      | Tma. deducción            |
| (12) | $\bigwedge yw(\alpha \wedge S_y^w \alpha \rightarrow w = y)$                                                                        | IG 11 ( $\times 2$ )      |
| (13) | $\forall y \alpha \wedge \bigwedge yw (\alpha \wedge S_y^w \alpha \rightarrow w = y)$                                               | IC 2, 12                  |
| (14) | $\overset{1}{\forall y} \alpha \leftrightarrow \forall y \alpha \wedge \bigwedge yw (\alpha \wedge S_y^w \alpha \rightarrow w = y)$ | Tma. 2.12                 |
| (15) | $\overset{1}{\forall y} \alpha$                                                                                                     | SE 13, 14                 |
| (16) | $\bigwedge x \overset{1}{\forall y} \bigwedge u (u \in y \leftrightarrow \forall v(u \in v \wedge v \in x))$                        | IG 15                     |

Esto prueba lo deseado.



## Página 92

**Nota 1:** ... del axioma de diferencia ...

Veamos formalmente que

$$\vdash_B \bigwedge xy \overset{1}{\forall z} \bigwedge u (u \in z \leftrightarrow u \in x \wedge u \notin y).$$

En efecto, si  $w$  es una variable que no está en

$$\alpha \equiv \bigwedge u (u \in z \leftrightarrow u \in x \wedge u \notin y)$$

(luego también distinta de  $z$ ) tenemos la demostración:

|      |                                                                                                                                    |                           |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| (1)  | $\bigwedge xy \forall z \bigwedge u (u \in z \leftrightarrow u \in x \wedge u \notin y)$                                           | Ax. Diferencia            |
| (2)  | $\forall z \bigwedge u (u \in z \leftrightarrow u \in x \wedge u \notin y)$                                                        | EG 1 ( $\times 2$ )       |
| (3)  | $\alpha \wedge S_z^w \alpha$                                                                                                       | Hipótesis                 |
| (4)  | $u \in z \leftrightarrow u \in x \wedge u \notin y$                                                                                | EC, EG 3                  |
| (5)  | $u \in w \leftrightarrow u \in x \wedge u \notin y$                                                                                | EC, EG 3                  |
| (6)  | $u \in w \leftrightarrow u \in z$                                                                                                  | MBB 4, 5                  |
| (7)  | $\bigwedge u(u \in w \leftrightarrow u \in z)$                                                                                     | IG 6 ( $u$ no libre en 3) |
| (8)  | $\bigwedge xy (\bigwedge u(u \in x \leftrightarrow u \in y) \rightarrow x = y)$                                                    | Ax. extensionalidad       |
| (9)  | $\bigwedge u(u \in w \leftrightarrow u \in z) \rightarrow w = z$                                                                   | EG 8 ( $\times 2$ )       |
| (10) | $w = z$                                                                                                                            | MP 7, 9                   |
| (11) | $\alpha \wedge S_z^w \alpha \rightarrow w = z$                                                                                     | Tma. deducción            |
| (12) | $\bigwedge zw(\alpha \wedge S_z^w \alpha \rightarrow w = z)$                                                                       | IG 11 ( $\times 2$ )      |
| (13) | $\forall z \alpha \wedge \bigwedge zw(\alpha \wedge S_z^w \alpha \rightarrow w = z)$                                               | IC 2, 12                  |
| (14) | $\overset{1}{\forall z} \alpha \leftrightarrow \forall z \alpha \wedge \bigwedge zw(\alpha \wedge S_z^w \alpha \rightarrow w = z)$ | Tma. 2.12                 |

- (15)  $\overset{1}{\forall} z \alpha$  SE 13, 14  
 (16)  $\bigwedge xy \overset{1}{\forall} z \bigwedge u (u \in z \leftrightarrow u \in x \wedge u \notin y)$  IG 15 ( $\times 2$ )

Esto prueba lo deseado. 

**Nota 2:** En particular ... luego ...

Tenemos por lo anterior que

$$\vdash_B \bigwedge xu (u \in x \setminus x \leftrightarrow u \in x \wedge u \notin x)$$

y así podemos formar la siguiente demostración:

- |     |                                                                                |                         |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
| (1) | $\bigwedge xu (u \in x \setminus x \leftrightarrow u \in x \wedge u \notin x)$ | Tma. B                  |
| (2) | $u \in x \setminus x$                                                          | Hipótesis (Red. abs.)   |
| (3) | $u \in x \setminus x \leftrightarrow u \in x \wedge u \notin x$                | EG 1 ( $\times 2$ )     |
| (4) | $u \in x \wedge u \notin x$                                                    | SE 2, 3 (Contradicción) |
| (5) | $u \notin x \setminus x$                                                       | Red. absurdo            |
| (6) | $\bigwedge xu u \notin x \setminus x$                                          | IG 5 ( $\times 2$ )     |

Esto prueba que

$$\bigwedge xu u \notin x \setminus x$$

y con ello tenemos que tomando  $y$  distinta de  $u$  es:

- |     |                                                |        |
|-----|------------------------------------------------|--------|
| (1) | $\bigwedge xu u \notin x \setminus x$          | Tma. B |
| (2) | $\bigwedge u u \notin x \setminus x$           | EG 1   |
| (3) | $S_y^{x \setminus x} (\bigwedge u u \notin y)$ | R 2    |
| (4) | $\forall y \bigwedge u u \notin y$             | IP 3   |

Observemos que la línea 3 está justificada pues la única variable libre de  $x \setminus x$  es  $x$ , luego  $u$  no está libre en  $x \setminus x$  y es claro que

$$S_y^{x \setminus x} (\bigwedge u u \notin y) \equiv \bigwedge u u \notin x \setminus x.$$

**Nota 3:** ... por el axioma de extensionalidad ...

Tenemos la siguiente demostración (donde  $w$  es una variable que no está en  $\bigwedge u u \notin y$ ):

- |     |                                                        |                |
|-----|--------------------------------------------------------|----------------|
| (1) | $\forall y \bigwedge u u \notin y$                     | Tma. B         |
| (2) | $\bigwedge u u \notin y \wedge \bigwedge u u \notin w$ | Hipótesis      |
| (3) | $u \notin y$                                           | Hipótesis      |
| (4) | $u \notin w$                                           | EC, EG 2       |
| (5) | $u \notin y \rightarrow u \notin w$                    | Tma. deducción |
| (6) | $u \notin w$                                           | Hipótesis      |
| (7) | $u \notin y$                                           | EC, EG 2       |
| (8) | $u \notin w \rightarrow u \notin y$                    | Tma. deducción |
| (9) | $u \notin w \leftrightarrow u \notin y$                | IB 5, 8        |

|      |                                                                                                                              |                         |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
| (10) | $u \in w \leftrightarrow u \in y$                                                                                            | SE 9, Tma. 2.11 1)      |
| (11) | $\bigwedge u (u \in w \leftrightarrow u \in y)$                                                                              | IG 10 ( $u$ no libre 2) |
| (12) | $\bigwedge wy (\bigwedge u (u \in w \leftrightarrow u \in y) \rightarrow w = y)$                                             | Ax. extensionalidad     |
| (13) | $\bigwedge u (u \in w \leftrightarrow u \in y) \rightarrow w = y$                                                            | EG 12                   |
| (14) | $w = y$                                                                                                                      | MP 11, 13               |
| (15) | $\bigwedge uu \notin y \wedge \bigwedge uu \notin w \rightarrow w = y$                                                       | Tma. deducción          |
| (16) | $\bigwedge yw (\bigwedge uu \notin y \wedge \bigwedge uu \notin w \rightarrow w = y)$                                        | IG 15                   |
| (17) | $\bigvee y \bigwedge uu \notin y \wedge \bigwedge yw (\bigwedge uu \notin y \wedge \bigwedge uu \notin w \rightarrow w = y)$ | IC 1, 16                |
| (18) | $\bigvee^1 y \bigwedge uu \notin y$                                                                                          | SE 17, Tma. 2.12        |

Esto prueba lo deseado. 

**Nota 4:** ... en B podemos demostrar ...

Veamos formalmente que

$$\vdash_B \bigwedge xy \bigvee^1 z \bigwedge u (u \in z \leftrightarrow u \in x \vee u \in y).$$

Comencemos probando un resultado obvio, pero que nos ahorrará varias líneas en la demostración:

$$\vdash_B \bigwedge xy (x \in \{x, y\} \wedge y \in \{x, y\}). \quad (3.36)$$

La demostración es inmediata (teniendo en cuenta que las únicas variables libres en  $\{x, y\}$  son  $x$  e  $y$ ):

|      |                                                                 |                      |
|------|-----------------------------------------------------------------|----------------------|
| (1)  | $\bigwedge u (u \in \{x, y\} \leftrightarrow u = x \vee u = y)$ | Tma. B               |
| (2)  | $x \in \{x, y\} \leftrightarrow x = x \vee x = y$               | EG 1                 |
| (3)  | $x = x$                                                         | I                    |
| (4)  | $x = x \vee x = y$                                              | ID 3                 |
| (5)  | $x \in \{x, y\}$                                                | SE 2, 4              |
| (6)  | $y \in \{x, y\} \leftrightarrow y = x \vee y = y$               | EG 1                 |
| (7)  | $y = y$                                                         | I                    |
| (8)  | $y = x \vee y = y$                                              | ID 7                 |
| (9)  | $y \in \{x, y\}$                                                | SE 6, 8              |
| (10) | $x \in \{x, y\} \wedge y \in \{x, y\}$                          | IC 5, 9              |
| (11) | $\bigwedge xy (x \in \{x, y\} \wedge y \in \{x, y\})$           | IG 10 ( $\times 2$ ) |

Probaremos a continuación el siguiente teorema de B que, en esencia, prueba lo deseado

$$\vdash_B \bigwedge u (u \in \bigcup \{x, y\} \leftrightarrow u \in x \vee u \in y). \quad (3.37)$$

Su demostración es la siguiente:

|     |                                                                                                  |                           |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| (1) | $\bigwedge u (u \in \bigcup \{x, y\} \leftrightarrow \bigvee v (u \in v \wedge v \in \{x, y\}))$ | Tma. B                    |
| (2) | $\bigvee v (u \in v \wedge v \in \{x, y\})$                                                      | Hipótesis                 |
| (3) | $u \in v \wedge v \in \{x, y\}$                                                                  | EP 2 ( $v$ no libre en 2) |
| (4) | $v \in \{x, y\}$                                                                                 | EC 3                      |

|      |                                                                                  |                          |
|------|----------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|
| (5)  | $v \in \{x, y\} \leftrightarrow v = x \vee v = y$                                | Tma. B                   |
| (6)  | $v = x \vee v = y$                                                               | SE 4, 5                  |
| (7)  | $u \in v$                                                                        | EC 3                     |
| (8)  | $v = x$                                                                          | Hipótesis                |
| (9)  | $x = v$                                                                          | SI 8                     |
| (10) | $u \in x$                                                                        | ETI 7, 9                 |
| (11) | $u \in x \vee u \in y$                                                           | ID 10                    |
| (12) | $v = x \rightarrow (u \in x \vee u \in y)$                                       | Tma. deducción           |
| (13) | $v = y$                                                                          | Hipótesis                |
| (14) | $y = v$                                                                          | SI 13                    |
| (15) | $u \in y$                                                                        | ETI 7, 14                |
| (16) | $u \in x \vee u \in y$                                                           | ID 15                    |
| (17) | $v = y \rightarrow (u \in x \vee u \in y)$                                       | Tma. deducción           |
| (18) | $(v = x \vee v = y) \rightarrow (u \in x \vee u \in y)$                          | Dil 12, 17               |
| (19) | $u \in x \vee u \in y$                                                           | MP 6, 18 ( $v$ no libre) |
| (20) | $\forall v (u \in v \wedge v \in \{x, y\}) \rightarrow u \in x \vee u \in y$     | Tma. deducción           |
| (21) | $u \in x \vee u \in y$                                                           | Hipótesis                |
| (22) | $u \in x$                                                                        | Hipótesis                |
| (23) | $x \in \{x, y\}$                                                                 | EG, EC (3.36)            |
| (24) | $u \in x \wedge x \in \{x, y\}$                                                  | IC 22, 23                |
| (25) | $S_v^x (u \in v \wedge v \in \{x, y\})$                                          | R 24                     |
| (26) | $\forall v (u \in v \wedge v \in \{x, y\})$                                      | IP 25                    |
| (27) | $u \in x \rightarrow \forall v (u \in v \wedge v \in \{x, y\})$                  | Tma. deducción           |
| (28) | $u \in y$                                                                        | Hipótesis                |
| (29) | $y \in \{x, y\}$                                                                 | EG, EC (3.36)            |
| (30) | $u \in y \wedge y \in \{x, y\}$                                                  | IC 28, 29                |
| (31) | $S_v^y (u \in v \wedge v \in \{x, y\})$                                          | R 30                     |
| (32) | $\forall v (u \in v \wedge v \in \{x, y\})$                                      | IP 31                    |
| (33) | $u \in y \rightarrow \forall v (u \in v \wedge v \in \{x, y\})$                  | Tma. deducción           |
| (34) | $(u \in x \vee u \in y) \rightarrow \forall v (u \in v \wedge v \in \{x, y\})$   | Dil 27, 33               |
| (35) | $\forall v (u \in v \wedge v \in \{x, y\})$                                      | MP 21, 34                |
| (36) | $u \in x \vee u \in y \rightarrow \forall v (u \in v \wedge v \in \{x, y\})$     | Tma. deducción           |
| (37) | $\forall v (u \in v \wedge v \in \{x, y\}) \leftrightarrow u \in x \vee u \in y$ | IB 20, 36                |
| (38) | $u \in \cup\{x, y\} \leftrightarrow \forall v (u \in v \wedge v \in \{x, y\})$   | EG 1                     |
| (39) | $u \in \cup\{x, y\} \leftrightarrow u \in x \vee u \in y$                        | MBB 37, 38               |
| (40) | $\bigwedge u (u \in \cup\{x, y\} \leftrightarrow u \in x \vee u \in y)$          | IG 39                    |

Finalmente, si  $w$  es una variable que no está en

$$\alpha \equiv \bigwedge u (u \in z \leftrightarrow u \in x \vee u \in y)$$

(luego también distinta de  $z$ ) tenemos la demostración buscada:

|     |                                                                                   |           |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| (1) | $S_z^{\cup\{x, y\}} (\bigwedge u (u \in z \leftrightarrow u \in x \vee u \in y))$ | R (3.37)  |
| (2) | $\forall z \bigwedge u (u \in z \leftrightarrow u \in x \vee u \in y)$            | IP 1      |
| (3) | $\alpha \wedge S_z^w \alpha$                                                      | Hipótesis |
| (4) | $u \in z \leftrightarrow u \in x \vee u \in y$                                    | EC, EG 3  |
| (5) | $u \in w \leftrightarrow u \in x \vee u \in y$                                    | EC, EG 3  |

|      |                                                                                                                       |                           |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| (6)  | $u \in w \leftrightarrow u \in z$                                                                                     | MBB 4, 5                  |
| (7)  | $\bigwedge u(u \in w \leftrightarrow u \in z)$                                                                        | IG 6 ( $u$ no libre en 3) |
| (8)  | $\bigwedge xy(\bigwedge u(u \in x \leftrightarrow u \in y) \rightarrow x = y)$                                        | Ax. extensionalidad       |
| (9)  | $\bigwedge u(u \in w \leftrightarrow u \in z) \rightarrow w = z$                                                      | EG 8 ( $\times 2$ )       |
| (10) | $w = z$                                                                                                               | MP 7, 9                   |
| (11) | $\alpha \wedge S_z^w \alpha \rightarrow w = z$                                                                        | Tma. deducción            |
| (12) | $\bigwedge zw(\alpha \wedge S_z^w \alpha \rightarrow w = z)$                                                          | IG 11 ( $\times 2$ )      |
| (13) | $\bigvee z\alpha \wedge \bigwedge zw(\alpha \wedge S_z^w \alpha \rightarrow w = z)$                                   | IC 2, 12                  |
| (14) | $\bigvee^1 z\alpha \leftrightarrow \bigvee z\alpha \wedge \bigwedge zw(\alpha \wedge S_z^w \alpha \rightarrow w = z)$ | Tma. 2.12                 |
| (15) | $\bigvee^1 z\alpha$                                                                                                   | SE 13, 14                 |
| (16) | $\bigwedge xy \bigvee^1 z \bigwedge u(u \in z \leftrightarrow u \in x \vee u \in y)$                                  | IG 15 ( $\times 2$ )      |

Esto prueba lo deseado. 

**Nota 5:** ... demostramos que ...

Veamos formalmente que

$$\vdash_B \bigwedge xy \bigvee^1 z \bigwedge u(u \in z \leftrightarrow u \in x \wedge u \in y).$$

Para ello comencemos probando el siguiente teorema que necesitaremos en la prueba:

$$\bigwedge vwu(u \notin v \setminus w \leftrightarrow u \notin v \vee u \in w). \quad (3.38)$$

La demostración es inmediata:

|     |                                                                                     |                     |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|
| (1) | $u \in v \setminus w \leftrightarrow u \in v \wedge u \notin w$                     | Tma. B              |
| (2) | $u \notin v \setminus w \leftrightarrow \neg(u \in v \wedge u \notin w)$            | SE 1, Tma. 2.11 1)  |
| (3) | $\neg(u \in v \wedge u \notin w) \leftrightarrow u \notin v \vee \neg \neg u \in w$ | DM                  |
| (4) | $u \notin v \vee \neg \neg u \in w \leftrightarrow u \notin v \vee u \in w$         | DN, Tma. 2.11 3)    |
| (5) | $\neg(u \in v \wedge u \notin w) \leftrightarrow u \notin v \vee u \in w$           | MBB 3, 4            |
| (6) | $u \notin v \setminus w \leftrightarrow u \notin v \vee u \in w$                    | MBB 2, 5            |
| (7) | $\bigwedge vwu(u \notin v \setminus w \leftrightarrow u \notin v \vee u \in w)$     | IG 6 ( $\times 3$ ) |

Con esto también podemos probar fácilmente el siguiente teorema de B:

$$\bigwedge u(u \notin (x \setminus y) \cup (y \setminus x) \leftrightarrow (u \notin x \vee u \in y) \wedge (u \notin y \vee u \in x)) \quad (3.39)$$

En efecto, su demostración es

|     |                                                                                                                                        |                            |
|-----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|
| (1) | $u \in (x \setminus y) \cup (y \setminus x) \leftrightarrow u \in x \setminus y \vee u \in y \setminus x$                              | Tma. B                     |
| (2) | $u \notin (x \setminus y) \cup (y \setminus x) \leftrightarrow \neg(u \in x \setminus y \vee u \in y \setminus x)$                     | SE 1, Tma. 2.11 1)         |
| (3) | $\neg(u \in x \setminus y \vee u \in y \setminus x) \leftrightarrow u \notin x \setminus y \wedge u \notin y \setminus x$              | DM                         |
| (4) | $u \notin x \setminus y \leftrightarrow u \notin x \vee u \in y$                                                                       | EG (3.38) ( $\times 3$ )   |
| (5) | $u \notin y \setminus x \leftrightarrow u \notin y \vee u \in x$                                                                       | EG (3.38) ( $\times 3$ )   |
| (6) | $u \notin x \setminus y \wedge u \notin y \setminus x \leftrightarrow$<br>$(u \notin x \vee u \in y) \wedge (u \notin y \vee u \in x)$ | MP Tma. 2.11 4), (IC 4, 5) |
| (7) | $u \notin (x \setminus y) \cup (y \setminus x) \leftrightarrow u \notin x \setminus y \wedge u \notin y \setminus x$                   | MBB 2, 3                   |

- (8)  $u \notin (x \setminus y) \cup (y \setminus x) \leftrightarrow$  MBB 6, 7  
 $(u \notin x \vee u \in y) \wedge (u \notin y \vee u \in x)$   
 (9)  $\wedge u(u \notin (x \setminus y) \cup (y \setminus x) \leftrightarrow$  IG 8  
 $(u \notin x \vee u \in y) \wedge (u \notin y \vee u \in x))$

Más aún, este último teorema nos permite probar de forma cómoda el siguiente resultado que es el corazón de la demostración buscada:

$$\vdash_B \wedge u(u \in (x \cup y) \setminus ((x \setminus y) \cup (y \setminus x)) \leftrightarrow u \in x \wedge u \in y). \quad (3.40)$$

Su demostración es la siguiente:

- |      |                                                                                                                            |                   |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|
| (1)  | $u \in (x \cup y) \setminus ((x \setminus y) \cup (y \setminus x)) \leftrightarrow$                                        | Tma. B            |
|      | $u \in x \cup y \wedge u \notin (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$                                                      |                   |
| (2)  | $u \in x \cup y \leftrightarrow u \in x \vee u \in y$                                                                      | Tma. B            |
| (3)  | $u \notin (x \setminus y) \cup (y \setminus x) \leftrightarrow (u \notin x \vee u \in y) \wedge (u \notin y \vee u \in x)$ | EG (3.39)         |
| (4)  | $u \in x \cup y \wedge u \notin (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$                                                      | Hipótesis         |
| (5)  | $u \in x \cup y$                                                                                                           | EC 4              |
| (6)  | $u \in x \vee u \in y$                                                                                                     | SE 2, 5           |
| (7)  | $u \notin (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$                                                                            | EC 4              |
| (8)  | $(u \notin x \vee u \in y) \wedge (u \notin y \vee u \in x)$                                                               | SE 3, 7           |
| (9)  | $u \notin x$                                                                                                               | Hipótesis         |
| (10) | $u \in y$                                                                                                                  | MTP 6, 9          |
| (11) | $u \notin x \rightarrow u \in y$                                                                                           | Tma. deducción    |
| (12) | $u \in y \rightarrow u \in y$                                                                                              | Tma. 2.7          |
| (13) | $(u \notin x \vee u \in y) \rightarrow u \in y$                                                                            | Dil 11, 12        |
| (14) | $u \in y$                                                                                                                  | MP (EC 8) 13      |
| (15) | $u \notin y$                                                                                                               | Hipótesis         |
| (16) | $u \in x$                                                                                                                  | MTP 6, 15         |
| (17) | $u \notin y \rightarrow u \in x$                                                                                           | Tma. deducción    |
| (18) | $u \in x \rightarrow u \in x$                                                                                              | Tma. 2.7          |
| (19) | $(u \notin y \vee u \in x) \rightarrow u \in x$                                                                            | Dil 17, 18        |
| (20) | $u \in x$                                                                                                                  | MP (EC 8) 19      |
| (21) | $u \in x \wedge u \in y$                                                                                                   | IC 14, 20         |
| (21) | $(u \in x \cup y \wedge u \notin (x \setminus y) \cup (y \setminus x)) \rightarrow (u \in x \wedge u \in y)$               | Tma. deducción    |
| (22) | $u \in x \wedge u \in y$                                                                                                   | Hipótesis         |
| (23) | $u \in x$                                                                                                                  | EC 22             |
| (24) | $u \in x \vee u \in y$                                                                                                     | ID 23             |
| (25) | $u \in x \cup y$                                                                                                           | SE 2, 24          |
| (26) | $u \in y$                                                                                                                  | EC 22             |
| (27) | $u \notin x \vee u \in y$                                                                                                  | ID 26             |
| (28) | $u \notin y \vee u \in x$                                                                                                  | ID 23             |
| (29) | $u \notin (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$                                                                            | SE 3, (IC 27, 28) |
| (30) | $u \in x \cup y \wedge u \notin (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$                                                      | IC 24, 29         |
| (31) | $(u \in x \wedge u \in y) \rightarrow (u \in x \cup y \wedge u \notin (x \setminus y) \cup (y \setminus x))$               | Tma. deducción    |
| (32) | $(u \in x \cup y \wedge u \notin (x \setminus y) \cup (y \setminus x)) \leftrightarrow (u \in x \wedge u \in y)$           | IB 21, 31         |
| (33) | $u \in (x \cup y) \setminus ((x \setminus y) \cup (y \setminus x)) \leftrightarrow u \in x \wedge u \in y$                 | MBB 1, 32         |
| (34) | $\wedge u(u \in (x \cup y) \setminus ((x \setminus y) \cup (y \setminus x)) \leftrightarrow u \in x \wedge u \in y)$       | IG 33             |

Finalmente, si  $w$  es una variable que no está en

$$\alpha \equiv \bigwedge u (u \in z \leftrightarrow u \in x \wedge u \in y)$$

(luego también distinta de  $z$ ) y denotamos por

$$\beta \equiv (x \cup y) \setminus ((x \setminus y) \cup (y \setminus x))$$

tenemos la demostración buscada:

|      |                                                                                                                          |                           |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| (1)  | $S_z^\beta (\bigwedge u (u \in z \leftrightarrow u \in x \wedge u \in y))$                                               | (3.40)                    |
| (2)  | $\forall z \bigwedge u (u \in z \leftrightarrow u \in x \wedge u \in y)$                                                 | IP 1                      |
| (3)  | $\alpha \wedge S_z^w \alpha$                                                                                             | Hipótesis                 |
| (4)  | $u \in z \leftrightarrow u \in x \wedge u \in y$                                                                         | EC, EG 3                  |
| (5)  | $u \in w \leftrightarrow u \in x \wedge u \in y$                                                                         | EC, EG 3                  |
| (6)  | $u \in w \leftrightarrow u \in z$                                                                                        | MBB 4, 5                  |
| (7)  | $\bigwedge u (u \in w \leftrightarrow u \in z)$                                                                          | IG 6 ( $u$ no libre en 3) |
| (8)  | $\bigwedge xy (\bigwedge u (u \in x \leftrightarrow u \in y) \rightarrow x = y)$                                         | Ax. extensionalidad       |
| (9)  | $\bigwedge u (u \in w \leftrightarrow u \in z) \rightarrow w = z$                                                        | EG 8 ( $\times 2$ )       |
| (10) | $w = z$                                                                                                                  | MP 7, 9                   |
| (11) | $\alpha \wedge S_z^w \alpha \rightarrow w = z$                                                                           | Tma. deducción            |
| (12) | $\bigwedge zw (\alpha \wedge S_z^w \alpha \rightarrow w = z)$                                                            | IG 11 ( $\times 2$ )      |
| (13) | $\forall z \alpha \wedge \bigwedge zw (\alpha \wedge S_z^w \alpha \rightarrow w = z)$                                    | IC 2, 12                  |
| (14) | $\bigvee^1 z \alpha \leftrightarrow \forall z \alpha \wedge \bigwedge zw (\alpha \wedge S_z^w \alpha \rightarrow w = z)$ | Tma. 2.12                 |
| (15) | $\bigvee^1 z \alpha$                                                                                                     | SE 13, 14                 |
| (16) | $\bigwedge xy \bigvee^1 z \bigwedge u (u \in z \leftrightarrow u \in x \wedge u \in y)$                                  | IG 15 ( $\times 2$ )      |

Esto prueba lo deseado. 

**Nota 6:** ... comprobar que ...

Comencemos probando que

$$\vdash_B \bigwedge xyx' (\{x'\} = \{x, y\} \rightarrow x = x' \wedge y = x'). \quad (3.41)$$

En efecto, tenemos la siguiente demostración (donde  $u$  es una variable distinta de  $x, y, x'$ ):

|      |                                                     |               |
|------|-----------------------------------------------------|---------------|
| (1)  | $\{x'\} = \{x, y\}$                                 | Hipótesis     |
| (2)  | $x \in \{x, y\}$                                    | EG, EC (3.36) |
| (3)  | $S_u^{\{x, y\}}(x \in u)$                           | R 2           |
| (4)  | $S_u^{\{x'\}}(x \in u)$                             | ETI 1, 3      |
| (5)  | $x \in \{x'\}$                                      | R 4           |
| (6)  | $\bigwedge u (u \in \{x'\} \leftrightarrow u = x')$ | Tma. B        |
| (7)  | $x \in \{x'\} \leftrightarrow x = x'$               | EG 6          |
| (8)  | $x = x'$                                            | SE 5, 7       |
| (9)  | $y \in \{x, y\}$                                    | EG, EC (3.36) |
| (10) | $S_u^{\{x, y\}}(y \in u)$                           | R 9           |
| (11) | $S_u^{\{x'\}}(y \in u)$                             | ETI 1, 10     |

|      |                                                                       |                      |
|------|-----------------------------------------------------------------------|----------------------|
| (12) | $y \in \{x'\}$                                                        | R 11                 |
| (13) | $y \in \{x'\} \leftrightarrow y = x'$                                 | EG 6                 |
| (14) | $y = x'$                                                              | SE 12, 13            |
| (15) | $x = x' \wedge y = x'$                                                | IC 8, 14             |
| (16) | $\{x'\} = \{x, y\} \rightarrow x = x' \wedge y = x'$                  | Tma. deducción       |
| (17) | $\bigwedge xyx' (\{x'\} = \{x, y\} \rightarrow x = x' \wedge y = x')$ | IG 16 ( $\times 3$ ) |

Por otra parte también tenemos que

$$\vdash_{\mathbf{B}} \bigwedge xyx' (\{x, y\} = \{x, x'\} \rightarrow x' = y). \quad (3.42)$$

En efecto, tenemos la siguiente demostración (donde  $u, v, w$  son variables distintas de  $x, y, x'$ ):

|      |                                                                   |                       |
|------|-------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| (1)  | $\{x, y\} = \{x, x'\}$                                            | Hipótesis             |
| (2)  | $x' \neq y$                                                       | Hipótesis (Red. abs.) |
| (3)  | $x' \in \{x, x'\}$                                                | EG, EC (3.36)         |
| (4)  | $S_u^{\{x, x'\}}(x' \in u)$                                       | R 3                   |
| (5)  | $S_u^{\{x, y\}}(x' \in u)$                                        | ETI 1, 4              |
| (6)  | $x' \in \{x, y\}$                                                 | R 5                   |
| (7)  | $\bigwedge u(u \in \{x, y\} \leftrightarrow u = x \vee u = y)$    | Tma. B                |
| (8)  | $x' \in \{x, y\} \leftrightarrow x' = x \vee x' = y$              | EG 7                  |
| (9)  | $x' = x \vee x' = y$                                              | SE 6, 8               |
| (10) | $x' = x$                                                          | MTP 2, 9              |
| (11) | $S_u^{x'}\{x, u\} = S_u^x\{x, u\}$                                | ETI 10                |
| (12) | $\{x, x'\} = \{x\}$                                               | R 11 <sup>15</sup>    |
| (13) | $\{x, y\} = \{x\}$                                                | TI 1, 12              |
| (14) | $\bigwedge uvw (\{w\} = \{u, v\} \rightarrow u = w \wedge v = w)$ | (3.41)                |
| (15) | $\{x\} = \{x, y\} \rightarrow x = x \wedge y = x$                 | EG 14 ( $\times 3$ )  |
| (16) | $\{x\} = \{x, y\}$                                                | SI 13                 |
| (17) | $x = x \wedge y = x$                                              | MP 15, 16             |
| (18) | $y = x$                                                           | EC 17                 |
| (19) | $x = y$                                                           | SI 18                 |
| (20) | $x' = y$                                                          | TI 10, 19 (Contr. 2)  |
| (21) | $x' = y$                                                          | Red. absurdo          |
| (22) | $\{x, y\} = \{x, x'\} \rightarrow x' = y$                         | Tma. deducción        |
| (23) | $\bigwedge xyx' (\{x, y\} = \{x, x'\} \rightarrow x' = y)$        | IG 23 ( $\times 3$ )  |

Finalmente veamos ya la prueba buscada (donde  $u, v, w, z$  son variables distintas de  $x, y, x', y'$ ):

<sup>15</sup> Comentamos aquí, por última vez, que en esta línea se está cometiendo un abuso de la notación. Realmente, tenemos que por (3.24)

$$\vdash \{x, u\} = z \mid \bigwedge v (v \in z \leftrightarrow v = x \vee v = u),$$

luego por el Metateorema 1.19 tenemos que

$$\vdash S_u^{x'}\{x, u\} = S_u^x \left( z \mid \bigwedge v (v \in z \leftrightarrow v = x \vee v = u) \right) \quad (3.43)$$

siendo

$$S_u^{x'} \left( z \mid \bigwedge v (v \in z \leftrightarrow v = x \vee v = u) \right) \equiv z \mid \bigwedge v (v \in z \leftrightarrow v = x \vee v = x').$$



|      |                                                                                             |                |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| (1)  | $(x, y) = (x', y')$                                                                         | Hipótesis      |
| (2)  | $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\}$                                              | R 1            |
| (3)  | $\bigwedge uv (u \in \{u, v\} \wedge v \in \{u, v\})$                                       | (3.36)         |
| (4)  | $\{x\} \in \{\{x\}, \{x, y\}\} \wedge \{x, y\} \in \{\{x\}, \{x, y\}\}$                     | EG 3           |
| (5)  | $\{x\} \in \{\{x\}, \{x, y\}\}$                                                             | EC 4           |
| (6)  | $\{x\} \in \{\{x'\}, \{x', y'\}\}$                                                          | ETI (SI 2), 5  |
| (7)  | $\bigwedge u (u \in \{\{x'\}, \{x', y'\}\} \leftrightarrow u = \{x'\} \vee u = \{x', y'\})$ | Tma. B         |
| (8)  | $\{x\} \in \{\{x'\}, \{x', y'\}\} \leftrightarrow \{x\} = \{x'\} \vee \{x\} = \{x', y'\}$   | EG 7           |
| (9)  | $\{x\} = \{x'\} \vee \{x\} = \{x', y'\}$                                                    | SE 6, 8        |
| (10) | $\bigwedge uvw (\{w\} = \{u, v\} \rightarrow u = w \wedge v = w)$                           | (3.41)         |
| (11) | $\{x\} = \{x'\}$                                                                            | Hipótesis      |
| (12) | $\{x\} = \{x', x'\} \rightarrow x' = x \wedge x' = x$                                       | EG 10          |
| (13) | $x' = x$                                                                                    | EC (MP 11, 12) |
| (14) | $S_u^{\{x'\}}\{u, \{x, y\}\} = S_u^{\{x\}}\{u, \{x, y\}\}$                                  | ETI (SI 11)    |
| (15) | $\{\{x'\}, \{x, y\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\}$                                                | R 14           |
| (16) | $\{\{x'\}, \{x, y\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\}$                                             | TI 2, 15       |
| (17) | $\bigwedge uvw (\{u, v\} = \{u, w\} \rightarrow w = v)$                                     | (3.42)         |
| (18) | $\{\{x'\}, \{x, y\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\} \rightarrow \{x', y'\} = \{x, y\}$           | EG 17          |
| (19) | $\{x, y\} = \{x', y'\}$                                                                     | SI (MP 16, 18) |
| (20) | $S_u^x\{u, y'\} = S_u^x\{u, y'\}$                                                           | ETI 13         |
| (21) | $\{x', y'\} = \{x, y'\}$                                                                    | R 20           |
| (22) | $\{x, y\} = \{x, y'\}$                                                                      | TI 19, 21      |
| (23) | $\{x, y\} = \{x, y'\} \rightarrow y' = y$                                                   | EG 17          |
| (24) | $y' = y$                                                                                    | MP 22, 23      |
| (25) | $x = x' \wedge y = y'$                                                                      | SI, IC 13, 24  |
| (26) | $\{x\} = \{x'\} \rightarrow (x = x' \wedge y = y')$                                         | Teo. deducción |
| (27) | $\{x\} = \{x', y'\}$                                                                        | Hipótesis      |
| (28) | $\{x\} = \{x', y'\} \rightarrow x' = x \wedge y' = x$                                       | EG 10          |
| (29) | $x' = x \wedge y' = x$                                                                      | MP 27, 28      |
| (30) | $S_u^{x'}\{u\} = S_u^x\{u\}$                                                                | EC, ETI 29     |
| (31) | $\{x'\} = \{x\}$                                                                            | R 30           |
| (32) | $\{x\} = \{x'\}$                                                                            | SI 31          |
| (33) | $x = x' \wedge y = y'$                                                                      | MP 26, 32      |
| (34) | $\{x\} = \{x', y'\} \rightarrow (x = x' \wedge y = y')$                                     | Teo. deducción |
| (35) | $(\{x\} = \{x'\} \vee \{x\} = \{x', y'\}) \rightarrow x = x' \wedge y = y'$                 | Dil 26, 34     |
| (36) | $x = x' \wedge y = y'$                                                                      | MP 9, 35       |

Utilizando de nuevo (3.24) también sabemos que

$$\vdash \{x, x'\} = z \mid \bigwedge v (v \in z \leftrightarrow v = x \vee v = x') \quad (3.44)$$

y por la regla (TI) aplicada a (3.43) y (3.44) (tras aplicarle (SI)) se obtiene que

$$\vdash S_u^{x'}\{x, u\} = \{x, x'\}.$$

De forma análoga se ve que

$$\vdash S_u^x\{x, u\} = \{x, x\}$$

y aplicando (TI) con la línea 11 y lo visto se obtiene la línea 12.

- (37)  $(x, y) = (x', y') \rightarrow x = x' \wedge y = y'$  Tma. deducción  
 (38)  $\bigwedge xyx'y' ((x, y) = (x', y') \rightarrow x = x' \wedge y = y')$  IG 37 ( $\times 4$ )

Esto finaliza (por fin) la demostración.



## Página 93

**Nota 1:** ... no puede demostrarse ...

Ya hemos dicho en la **Nota 6** **pág. 86** que  $\mathbb{N}$  es un modelo de  $B$ , pero aún más se tiene que  $\mathbb{N}$  será un modelo de  $B \cup \{\neg\alpha\}$  siendo  $\alpha \equiv \forall y \bigwedge x x \in y$ <sup>16</sup>. Así, por el Teorema 3.4 se tiene que  $B \cup \{\neg\alpha\}$  es consistente y por el Metateorema 3.2 (obsérvese que  $\alpha$  es una sentencia) que no  $\vdash_B \alpha$ .

Por otra parte, existen teorías de conjuntos consistentes que extienden a  $B$  (es decir, donde se prueban todos los axiomas de  $B$ ) y en las cuales se puede demostrar  $\alpha$ <sup>17</sup>. Por tanto, el Teorema 3.5 nos da que  $B \cup \{\alpha\}$  es consistente y el Teorema 3.6 nos permite concluir que no  $\vdash_B \neg\alpha$ .

**Nota 2:** ... la notación ...

Observemos que la notación para las clases es coherente, pues si tenemos una descripción propia  $x|\phi(x)$ , es decir, tal que en  $B$  podamos demostrar

$$\bigvee^1 x \phi(x),$$

se tiene que la clase  $A = \{x|\phi(x)\}$  cumple realmente que  $A = \{x|\phi(x)\}$  entendido el segundo miembro como un par no ordenado, es decir, que

$$\vdash_B \bigwedge u (u \in \{x|\phi(x)\} \leftrightarrow \phi(u)). \quad (3.45)$$

En efecto, (3.45) es equivalente en  $B$  a

$$\bigwedge u (u = x|\phi(x) \leftrightarrow \phi(u)),$$

luego basta demostrar esta última fórmula para obtener lo deseado. Sin más, si  $u = x|\phi(x)$ , aplicando (DP) y (ETI) obtenemos que se cumple  $S_x^u \phi(x)$ , es decir,  $\phi(u)$  y, recíprocamente, si se cumple  $\phi(u)$ , como por (DP) también se cumple  $\phi(x|\phi(x))$  podemos utilizar el Metateorema 2.4 y obtener que  $u = x|\phi(x)$ .

Además, en este caso es claro que  $A$  es un conjunto (ver **pág. 94**), pues basta aplicar la regla (IP) a (3.45).

<sup>16</sup> Es fácil ver que  $\vdash_{ZF-AI} \neg\alpha$ , donde ZF-AI es la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel sin el axioma de infinitud. Así, como en la sección 5.5.3 se ve que  $\mathbb{N}$  es un modelo de ZF-AI (ver **Nota 6** **pág. 86**), por el teorema de corrección tenemos que  $\mathbb{N} \models \neg\alpha$ .

<sup>17</sup> Una teoría de este tipo es NFA (Nuevos fundamentos de Quine con átomos).

## Página 94

**Nota 1:** ... “ $A$  es un conjunto” ...

Observemos que la fórmula expresada en términos de clases es  $\forall y y = A$ .

**Nota 2:** ... único por el axioma de extensionalidad ...

Es decir, tenemos que para cualquier fórmula  $\phi$  de  $\mathcal{L}_{tc}$ , si  $y$  no está libre en  $\phi$  se cumple que

$$\vdash_B \forall y \bigwedge x (x \in y \leftrightarrow \phi) \rightarrow \overset{1}{\forall y \bigwedge x (x \in y \leftrightarrow \phi)}.$$

En efecto, si denotamos por  $\alpha \equiv \bigwedge x (x \in y \leftrightarrow \phi)$  y  $z$  es una variable que no está en  $\alpha$  tenemos la siguiente demostración:

|      |                                                                                                                                      |                                       |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------|
| (1)  | $\forall y \bigwedge x (x \in y \leftrightarrow \phi)$                                                                               | Hipótesis                             |
| (2)  | $\alpha \wedge S_y^z \alpha$                                                                                                         | Hipótesis                             |
| (3)  | $x \in y \leftrightarrow \phi$                                                                                                       | EC, EG 2                              |
| (4)  | $x \in z \leftrightarrow \phi$                                                                                                       | EC, EG 2 ( $S_y^z \phi \equiv \phi$ ) |
| (5)  | $x \in z \leftrightarrow x \in y$                                                                                                    | MBB 3, 4                              |
| (6)  | $\bigwedge x (x \in z \leftrightarrow x \in y)$                                                                                      | IG 5 ( $x$ no libre en 1 ni 2)        |
| (7)  | $\bigwedge zy (\bigwedge x (x \in z \leftrightarrow x \in y) \rightarrow z = y)$                                                     | Ax. extensionalidad                   |
| (8)  | $\bigwedge x (x \in z \leftrightarrow x \in y) \rightarrow z = y$                                                                    | EG 7 ( $\times 2$ )                   |
| (9)  | $z = y$                                                                                                                              | MP 6, 8                               |
| (10) | $\alpha \wedge S_y^z \alpha \rightarrow z = y$                                                                                       | Tma. deducción                        |
| (11) | $\bigwedge yz (\alpha \wedge S_y^z \alpha \rightarrow z = y)$                                                                        | IG 10 ( $y, z$ no libres en 1)        |
| (12) | $\forall y \alpha \wedge \bigwedge yz (\alpha \wedge S_y^z \alpha \rightarrow z = y)$                                                | IC 1, 11                              |
| (13) | $\overset{1}{\forall y \alpha}$                                                                                                      | SE 12, Tma. 2.12                      |
| (14) | $\forall y \bigwedge x (x \in y \leftrightarrow \phi) \rightarrow \overset{1}{\forall y \bigwedge x (x \in y \leftrightarrow \phi)}$ | Tma. deducción                        |

## Página 95

**Nota 1:** ... que será relevante si  $\phi$  tiene ...

Es decir, que la extensión de una clase no dependerá únicamente del modelo de  $B$  que tomemos como ocurre con la extensión de un conjunto, sino que si  $\phi$  tiene otras variables libres a parte de  $x$ , entonces también dependerá de la valoración que tomemos, es decir, de los objetos de  $M$  que queramos que “entren en juego” en la satisfacción de la fórmula  $\phi$ . Cabe remarcar que si  $\phi$  no tiene otras variables libres a parte de  $x$ , por el Teorema 1.9 está claro que la extensión de dicha clase si dependerá únicamente del modelo elegido.

**Nota 2:** ... estará perfectamente definida ...

Basta aplicar lo dicho en la **Nota 1** **pág. 4** con la propiedad  $P$  que para cada objeto  $a$  de  $M$  se cumple si, y solo si,  $M \models \phi[v_x^a]$ .

**Nota 3:** ...  $A$  sea o no un conjunto ...

Si  $A$  es formalmente un conjunto, entonces se cumple que (para cualquier valoración  $v$  de  $M$ )

$$M \models \left( \bigvee y \bigwedge x (x \in y \leftrightarrow \phi) \right) [v],$$

luego existe un conjunto  $a$  de  $M$  para el cual se satisface que un objeto  $b$  de  $M$  es un elemento de  $a$  si, y solo si,  $M \models \phi[v_x^b]$ , luego la extensión de  $A$  es justamente la extensión de  $a$ .

Por tanto, si  $A$  es formalmente un conjunto, entonces su extensión en  $M$  es la extensión de un conjunto de  $M$ .

Por el contrario, si  $A$  es formalmente una clase propia, entonces se cumple que (para cualquier valoración  $v$  de  $M$ )

$$M \models \left( \neg \bigvee y \bigwedge x (x \in y \leftrightarrow \phi) \right) [v],$$

luego no existe ningún conjunto  $a$  de  $M$  para el cual se satisfaga que un objeto  $b$  de  $M$  es un elemento de  $a$  si, y solo si,  $M \models \phi[v_x^b]$ , es decir, que la extensión de  $A$  no será un conjunto de  $M$ .

Por tanto, si  $A$  es formalmente una clase propia, entonces su extensión en  $M$  no es la extensión de ningún conjunto de  $M$ .

**Nota 4:** ... puntos de vista semántico ...

Veamos que semánticamente las definiciones para la igualdad y la relación de pertenencia entre clases significan justo lo que deberían.

En efecto, si  $A = \{x | \phi(x)\}$  y  $B = \{x | \psi(x)\}$  son clases,  $t$  un término de  $\mathcal{L}_{tc}$ ,  $M$  es un modelo de  $B$  y  $v$  una valoración de  $M$  tenemos:

- $t \in A \equiv \phi(t)$ , luego por el Teorema 1.12  $M \models (t \in A)[v]$  syss

$$M \models \phi \left[ v_x^{M(t)[v]} \right],$$

es decir, si y solo si, la interpretación de  $t$  en  $M$  está en la extensión de  $A$  en  $M$ .

- $t = A \equiv \bigwedge x (x \in t \leftrightarrow \phi(x))$ , luego  $M \models (t = A)[v]$  syss para cada objeto  $a$  de  $M$  se cumple que

$$a \bar{\in} M(t)[v] \text{ syss } M \models \phi[v_x^a],$$

es decir, si y solo si, la interpretación de  $t$  en  $M$  tiene la misma extensión que la clase  $A$  en  $M$ .

- $A = B \equiv \bigwedge x (\phi(x) \leftrightarrow \psi(x))$ , luego  $M \models (A = B)[v]$  syss para cada objeto  $a$  de  $M$  se cumple que

$$M \models \phi[v_x^a] \text{ syss } M \models \psi[v_x^a],$$

es decir, si y solo si, la extensión de ambas clases en  $M$  es la misma.

- $A \in t \equiv \forall y(y \in t \wedge \bigwedge x(x \in y \leftrightarrow \phi(x)))$ , luego  $M \models (A \in t)[v]$  syss<sup>18</sup> existe un objeto  $b$  de  $M$  tal que  $b \bar{\in} M(t)[v]$  y para cada objeto  $a$  de  $M$  se cumple que

$$a \bar{\in} b \text{ syss } M \models \phi[v_x^a],$$

es decir, si, y solo si, existe un conjunto  $b$  de  $M$  que pertenece a la interpretación de  $t$  en  $M$  y tiene la misma extensión que la clase  $A$  en  $M$ .

- $A \in B \equiv \forall y(\bigwedge x(x \in y \leftrightarrow \phi(x)) \wedge \psi(y))$ , luego  $M \models (A \in B)[v]$  syss<sup>19</sup> existe un objeto  $b$  de  $M$  tal que  $M \models \psi[v_x^b]$  y para cada objeto  $a$  de  $M$  se cumple que

$$a \bar{\in} b \text{ syss } M \models \phi[v_x^a],$$

es decir, si y solo si, existe un conjunto  $b$  de  $M$  que está en la extensión de  $B$  en  $M$  y que tiene la misma extensión que  $A$  en  $M$ .

**Nota 5:** ... es un conjunto ...

Veamos en primer lugar que si existe un conjunto  $z$  tal que  $A \in z$ , entonces  $A$  es un conjunto, es decir, veamos que si  $z$  no está libre en  $\phi$

$$\vdash_B \forall zy (y \in z \wedge \bigwedge x(x \in y \leftrightarrow \phi)) \rightarrow \forall y \bigwedge x(x \in y \leftrightarrow \phi). \quad (3.46)$$

La demostración es inmediata:

|     |                                                                                                                                        |                                   |
|-----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|
| (1) | $\forall zy(y \in z \wedge \bigwedge x(x \in y \leftrightarrow \phi))$                                                                 | Hipótesis                         |
| (2) | $\forall y(y \in z \wedge \bigwedge x(x \in y \leftrightarrow \phi))$                                                                  | EP 1 ( $z$ no libre en 1)         |
| (3) | $y \in z \wedge \bigwedge x(x \in y \leftrightarrow \phi)$                                                                             | EP 2 ( $y$ no libre en 1 ni en 2) |
| (4) | $\bigwedge x(x \in y \leftrightarrow \phi)$                                                                                            | EC 3                              |
| (5) | $\forall y \bigwedge x(x \in y \leftrightarrow \phi)$                                                                                  | IP 4 ( $z, y$ no libres)          |
| (6) | $\forall zy(y \in z \wedge \bigwedge x(x \in y \leftrightarrow \phi)) \rightarrow \forall y \bigwedge x(x \in y \leftrightarrow \phi)$ | Tma. deducción                    |

También se cumple que si  $A \in B$ , entonces  $A$  es un conjunto, es decir, veamos que

$$\vdash_B \forall y (\bigwedge x(x \in y \leftrightarrow \phi) \wedge S_x^y \psi) \rightarrow \forall y \bigwedge x(x \in y \leftrightarrow \phi). \quad (3.47)$$

La demostración es inmediata:

|     |                                                                                                                                          |                           |
|-----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| (1) | $\forall y(\bigwedge x(x \in y \leftrightarrow \phi) \wedge S_x^y \psi)$                                                                 | Hipótesis                 |
| (2) | $\bigwedge x(x \in y \leftrightarrow \phi) \wedge S_x^y \psi$                                                                            | EP 1 ( $y$ no libre en 1) |
| (3) | $\bigwedge x(x \in y \leftrightarrow \phi)$                                                                                              | EC 2                      |
| (4) | $\forall y \bigwedge x(x \in y \leftrightarrow \phi)$                                                                                    | IP 3 ( $y$ no libre)      |
| (5) | $\forall y(\bigwedge x(x \in y \leftrightarrow \phi) \wedge S_x^y \psi) \rightarrow \forall y \bigwedge x(x \in y \leftrightarrow \phi)$ | Tma. deducción            |

Esto finaliza la prueba. 

<sup>18</sup> Considerando que  $y$  no está libre en  $t$  ni en  $\phi$  y aplicando el Teorema 1.9.

<sup>19</sup> Considerando que  $y$  no está libre en  $\phi$  ni en  $\psi$  y aplicando el Teorema 1.9 y el Teorema 1.12.

**Nota 6:** ... si y solo si ...

Veamos que una clase es un conjunto si, y solo si, pertenece a otra clase o conjunto, es decir, veamos que si  $z$  no está libre en  $\phi$

$$\vdash_B \forall y \bigwedge x (x \in y \leftrightarrow \phi) \leftrightarrow \forall zy \left( y \in z \wedge \bigwedge x (x \in y \leftrightarrow \phi) \right) \vee \forall y \left( \bigwedge x (x \in y \leftrightarrow \phi) \wedge S_x^y \psi \right). \quad (3.48)$$

Para probarlo necesitamos el siguiente resultado:

$$\vdash_B \bigwedge x \forall z x \in z \quad (3.49)$$

La demostración es inmediata:

- |     |                                 |               |
|-----|---------------------------------|---------------|
| (1) | $x \in \{x\}$                   | EG, EC (3.36) |
| (2) | $S_z^{\{x\}}(x \in z)$          | R 1           |
| (3) | $\forall z x \in z$             | IP 2          |
| (4) | $\bigwedge x \forall z x \in z$ | IG 3          |

Denotando por

$$\beta \equiv \forall zy \left( y \in z \wedge \bigwedge x (x \in y \leftrightarrow \phi) \right) \vee \forall y \left( \bigwedge x (x \in y \leftrightarrow \phi) \wedge S_x^y \psi \right)$$

ya podemos demostrar (3.48):

- |      |                                                                              |                                |
|------|------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|
| (1)  | $\beta \rightarrow \forall y \bigwedge x (x \in y \leftrightarrow \phi)$     | Dil (3.46), (3.47)             |
| (2)  | $\forall y \bigwedge x (x \in y \leftrightarrow \phi)$                       | Hipótesis                      |
| (3)  | $\bigwedge x (x \in y \leftrightarrow \phi)$                                 | EP 2 ( $y$ no libre en 2)      |
| (4)  | $\forall z y \in z$                                                          | EG (3.49)                      |
| (5)  | $y \in z$                                                                    | EP 4 ( $z$ no libre en 2 ni 3) |
| (6)  | $y \in z \wedge \bigwedge x (x \in y \leftrightarrow \phi)$                  | IC 3, 5                        |
| (7)  | $\forall zy (y \in z \wedge \bigwedge x (x \in y \leftrightarrow \phi))$     | IP 6 ( $z, y$ no libres)       |
| (8)  | $\beta$                                                                      | ID 7                           |
| (9)  | $\forall y \bigwedge x (x \in y \leftrightarrow \phi) \rightarrow \beta$     | Tma. deducción                 |
| (10) | $\forall y \bigwedge x (x \in y \leftrightarrow \phi) \leftrightarrow \beta$ | IB 1, 9                        |

Esto finaliza la prueba. 

**Nota 7:** ... demostración en B ...

Veamos que

$$\vdash_B \neg \forall y \bigwedge u (u \in y \leftrightarrow u \notin u).$$

La demostración es inmediata tal y como se ha visto en el texto:

- |     |                                                                   |                               |
|-----|-------------------------------------------------------------------|-------------------------------|
| (1) | $\forall y \bigwedge u (u \in y \leftrightarrow u \notin u)$      | Hipótesis (Red. abs.)         |
| (2) | $\bigwedge u (u \in y \leftrightarrow u \notin u)$                | EP 1 ( $y$ no libre en 1)     |
| (3) | $y \in y \leftrightarrow y \notin y$                              | EG 2                          |
| (4) | $\neg \forall y \bigwedge u (u \in y \leftrightarrow u \notin u)$ | C 3 ( $y$ no libre; Contr. 1) |
| (5) | $\neg \forall y \bigwedge u (u \in y \leftrightarrow u \notin u)$ | Red. absurdo                  |

Esto finaliza la prueba.



**Nota 8:** ... En particular  $R \notin R$  ...

En efecto, por definición

$$R \in R \equiv \bigvee y \left( \bigwedge x (x \in y \leftrightarrow x \notin x) \wedge y \notin y \right),$$

pero si esta fórmula fuera demostrable en B, por (MP) y (3.47) obtendríamos que

$$\vdash_B \bigvee y \bigwedge u (u \in y \leftrightarrow u \notin u)$$

contradiciendo lo demostrado en la nota anterior, luego por reducción al absurdo probamos que  $R \notin R$ .

Es decir, que  $R \notin R$  porque la nota anterior prueba que  $R$  no es un conjunto y (3.47) prueba que si  $R \in R$ , entonces  $R$  es un conjunto.

Como se ha podido observar las demostraciones en B empiezan a ser muy largas, pero no por su complejidad, sino por la cantidad de conceptos no primitivos que aparecen que precisan varias líneas de la demostración para describir sus propiedades. Por tanto, teniendo en cuenta que en este texto existen ya una gran cantidad de demostraciones formales que sirven como ejemplo, desde este momento no razonaremos más en teorías axiomáticas concretas (como por ejemplo B) enumerando líneas y aplicando reglas de inferencia (aunque si seguiremos haciéndolo a la hora de demostrar algunos resultados teóricos que no involucren a una teoría axiomática concreta o fórmulas específicas de una). En su lugar seguiremos las mismas directrices que [Ivob] y razonaremos como habitualmente se hace en matemáticas, es decir, daremos argumentos lo más detallados posibles para que sirvan de guía a quien quiera “bajar al barro” y escribir una demostración formal.

## Página 96

**Nota 1:** ... ser formalizados en B ...

Ver el Anexo B.

**Nota 2:** ...  $3 \equiv 2' = \{0, 1, 2\}$  ...

Aquí se utiliza la notación  $\{0, 1, 2\}$  para denotar al único conjunto cuyos elementos son exactamente el 0, el 1 y el 2, pero no hemos visto que dicho conjunto realmente pueda definirse en B. En general, tenemos el siguiente resultado:

### Metateorema 3.8: Existencia de $n$ -tuplas no ordenadas en B

Para cada natural  $n^a$  no nulo se cumple

$$\vdash_B \bigwedge x_1 \cdots x_n \bigvee^1 z \bigwedge u (u \in z \leftrightarrow u = x_1 \vee u = x_2 \vee \cdots \vee u = x_n).$$

<sup>a</sup> ¡OJO!  $n$  es un natural metamatemático, no es un natural de los que se está intentando definir en B. Confundir ambos es un error garrafal.

Denotando entonces

$$\{x_1, \dots, x_n\} \equiv z \mid \bigwedge u (u \in z \leftrightarrow u = x_1 \vee u = x_2 \vee \dots \vee u = x_n),$$

la regla (DP) nos da que

$$\vdash_B \bigwedge x_1 \dots x_n u (u \in \{x_1, \dots, x_n\} \leftrightarrow u = x_1 \vee u = x_2 \vee \dots \vee u = x_n).$$

Demostraremos el resultado por inducción (metamatemática) en  $n$ .

Para  $n = 1$  ya sabemos que el resultado es cierto, luego supongamos que es cierto para  $n$  variables, es decir, que tenemos que

$$\vdash_B \bigwedge x_1 \dots x_n \bigvee^1 z \bigwedge u (u \in z \leftrightarrow u = x_1 \vee u = x_2 \vee \dots \vee u = x_n), \quad (3.50)$$

y veamos que entonces se cumple

$$\vdash_B \bigwedge x_1 \dots x_n x_{n+1} \bigvee^1 z \bigwedge u (u \in z \leftrightarrow u = x_1 \vee u = x_2 \vee \dots \vee u = x_n \vee u = x_{n+1}). \quad (3.51)$$

Para ello, basta observar que si es  $z$  el conjunto que nos da (3.50)<sup>20</sup>, la existencia en (3.51) nos la da  $z \cup \{x_{n+1}\}$  y la unicidad la da claramente el axioma de extensionalidad.

En efecto, tenemos que  $u \in z \cup \{x_{n+1}\}$  si, y solo si,  $u \in z$  o  $u = x_{n+1}$  y como tenemos que

$$u \in z \leftrightarrow u = x_1 \vee \dots \vee u = x_n,$$

concluimos que  $u \in z \cup \{x_{n+1}\}$  si, y solo si,  $u = x_1 \vee \dots \vee u = x_n \vee u = x_{n+1}$ .

Esto prueba el paso inductivo y con ello concluimos la demostración. 

## Página 97

**Nota 1:** ... forma equivalente ...

Si  $x$  es transitivo y son  $u, v$  dos conjuntos que cumplen que  $u \in v$  y  $v \in x$ , entonces por la transitividad se tiene que  $v$  es un subconjunto de  $x$ . Entonces, como  $u \in v$  y  $v \subset x$ , por definición obtenemos que  $u \in x$ .

Recíprocamente, supongamos que  $\bigwedge uv (u \in v \wedge v \in x \rightarrow u \in x)$  y veamos que dado  $w \in x$  se cumple que  $w \subset x$ , es decir, que dado  $u \in w$  se tiene que  $u \in x$ . Sin más, dado  $u \in w$  (y teniendo en cuenta que estamos suponiendo que  $w \in x$ ) la hipótesis nos da que  $u \in x$  tal y como queríamos ver. 

<sup>20</sup> Es decir, el conjunto

$$z \mid \bigwedge u (u \in z \leftrightarrow u = x_1 \vee u = x_2 \vee \dots \vee u = x_n).$$



**Nota 2:** ... tal que ningún elemento ...

Veamos que

$$\vdash_B \bigwedge_{uv} (v \cap u = \emptyset \leftrightarrow \bigwedge w \in u \, w \notin v). \quad (3.52)$$

En efecto, si  $v \cap u = \emptyset$ , entonces dado  $w \in u$  no puede ocurrir que  $w \in v$  pues, en dicho caso, se tendría que  $w \in v \cap u$ , luego que  $w \in \emptyset$ . Recíprocamente, si ningún elemento de  $u$  pertenece a  $v$ , entonces  $v \cap u$  debe ser vacío pues de no ser así tendríamos que existe un conjunto  $w$  que pertenece a  $v \cap u$ , pero entonces por ser en particular  $w \in u$  deberíamos tener que  $w \notin v$  y esto contradice que  $w \in v \cap u$ . 

## Página 98

**Nota 1:** ... es porque ...

En efecto, si fuera  $u \cap x = \emptyset$ , entonces dado  $v \in u$  tenemos que  $v \notin x$ , pero como  $v \in x \cup \{x\}$  (por ser  $u \subset x \cup \{x\}$ ) se tiene que  $v \in x$  o  $v \in \{x\}$ , luego concluimos que  $v \in \{x\}$ . Es decir, hemos probado que  $u \subset \{x\}$ , luego debe ser  $u = \emptyset$  o  $u = \{x\}$  y, como  $u$  no es vacío, concluimos que  $u = \{x\}$ .

**Nota 2:** ... igualmente ...

Como ya se ha probado que  $v \in y$  y tenemos que  $u \in v$ , la transitividad de  $y$  nos da que  $u \in y$ .

**Nota 3:** ... definir una clase ...

En general, si  $A = \{x | \phi(x)\}$  y  $B = \{x | \psi(x)\}$  son dos clases, podemos definir su producto cartesiano como (ver el Apéndice A.1 de [Ivob])

$$A \times B = \left\{ x \mid \bigvee_{uv} (u \in A \wedge v \in B \wedge x = (u, v)) \right\} \equiv \bigvee_{uv} (\phi(u) \wedge \psi(v) \wedge x = (u, v)).$$

Así, se tiene que

$$\leq \equiv \{(x, y) \in \Omega \times \Omega \mid x \subset y\} \equiv \bigvee xy (x \in \Omega \wedge y \in \Omega \wedge z = (x, y) \wedge x \subset y).$$

## Página 99

**Nota 1:** ... entonces ...

En efecto, tenemos que  $x \leq y$ , es decir, que  $x \subset y$  y que  $x \neq y$ , luego por la antisimetría (ver pág. 89) de la inclusión obtenemos que  $y \not\subset x$ , es decir, que existe cierto conjunto  $u$  tal que  $u \in y$ , pero  $u \notin x$ , luego  $u \in y \setminus x$ .

**Nota 2:** ... tenemos ...

Recordemos que estamos suponiendo que  $x \leq y$ , es decir, que  $x \subset y$ , luego si  $z \in x$  es claro que por la definición de inclusión se tiene que  $z \in y$ .

## Página 100

**Nota 1:** DEMOSTRACIÓN ...

Si  $\Omega$  es un conjunto, entonces existe un conjunto  $y$  tal que

$$\bigwedge u (u \in y \leftrightarrow u \in \Omega), \quad (3.53)$$

es decir, un conjunto  $y$  tal que sus elementos son exactamente los ordinales. Ahora, bien, por el Teorema 3.12  $y$  es transitivo, por el Teorema 3.17  $y$  es  $\in$ -conexo y calcando la demostración del Teorema 3.18 se obtiene que  $y$  está bien fundado. Por tanto,  $y$  es un ordinal. El Teorema 3.11 nos da entonces que  $y'$  es un ordinal, luego por (3.53) se cumple que  $y' \in y$ . Así pues, tenemos que  $y \in y'$  (pues  $y' \equiv y \cup \{y\}$ ) y que  $y' \in y$ , luego como  $y$  es transitivo obtenemos que  $y \in y$  y esto contradice el Teorema 3.10. 

## Página 101

**Nota 1:** ... El error estaba ...

Observemos que si  $\Omega$  es una clase propia entonces no hay contradicción ninguna pues a continuación veremos que  $\Omega \cup \{\Omega\}$  es también una clase propia y, por tanto,  $\Omega \cup \{\Omega\} \notin \Omega$  lo que evita la contradicción.

Si  $A = \{x | \phi(x)\}$  es una clase entonces para interpretar  $\{A\}$  lo que hacemos es observar que

$$u \in \{x\} \leftrightarrow u = x,$$

luego interpretamos que

$$u \in \{A\} \leftrightarrow u = A \equiv \bigwedge x (x \in u \leftrightarrow \phi(x))$$

y así obtenemos que

$$\{A\} = \{u | \bigwedge x (x \in u \leftrightarrow \phi)\} \equiv \bigwedge x (x \in u \leftrightarrow \phi(x)). \quad (3.54)$$

Así, si  $A$  es una clase propia sabemos que

$$\vdash_B \neg \bigvee u \bigwedge x (x \in u \leftrightarrow \phi(x)),$$

luego que (por (NP))

$$\vdash_B \bigwedge u \neg \bigwedge x (x \in u \leftrightarrow \phi(x))$$

y por (3.54) podemos expresar

$$\bigwedge u \neg \bigwedge x (x \in u \leftrightarrow \phi(x)) \equiv \bigwedge u u \notin \{A\} \equiv \{A\} = \emptyset.$$

Esto último nos indica que se debe cumplir que  $A \cup \{A\} = A$ , es decir, que

$$\vdash_B \bigwedge u \left( \left( \phi(u) \vee \bigwedge x (x \in u \leftrightarrow \phi(x)) \right) \leftrightarrow \phi(u) \right),$$

y esto es claramente cierto<sup>21</sup>.

En resumen, tenemos que si  $A$  es una clase propia, entonces  $A \cup \{A\} = A$  y para ver que  $A \cup \{A\}$  es una clase propia basta ver que, en general, si  $A = \{x | \phi(x)\}$  y  $B = \{x | \psi(x)\}$  son dos clases iguales y una de ellas es propia, entonces la otra también lo es.

En efecto, como  $A = B$  tenemos que  $\bigwedge x (\phi(x) \leftrightarrow \psi(x))$  y si  $A$  es una clase propia se cumple que

$$\vdash_B \neg \bigvee u \bigwedge x (x \in u \leftrightarrow \phi(x)),$$

luego por el Teorema 2.11 1), 2), 6) y 7) obtenemos que

$$\vdash_B \neg \bigvee u \bigwedge x (x \in u \leftrightarrow \psi(x)),$$

es decir, que  $B$  es una clase propia.

**Nota 2:** ... hemos probado ...

También tenemos que  $\alpha < \alpha'$  pues  $\alpha \in \alpha \cup \{\alpha\} \equiv \alpha'$ .

**Nota 3:** ... es claro que ...

En efecto, si  $u \in \sigma$  entonces existe un  $\beta \in x$  (luego  $\beta$  es un ordinal al ser  $x$  un conjunto de ordinales) tal que  $u \in \beta$ , luego por el Teorema 3.12 concluimos que  $u$  es un ordinal.

**Nota 4:** ... luego ...

En general, si  $\sigma \subset \Omega$  (pudiendo ser  $\sigma$  una clase propia) entonces  $\sigma$  es  $\in$ -conexa y bien fundada.

En efecto, al ser los elementos de  $\sigma$  ordinales el Teorema 3.17 nos da que  $\sigma$  es  $\in$ -conexo y el Teorema 3.18 nos da que está bien fundado (pues que  $\Omega$  esté bien fundado significa que todo conjunto no vacío de ordinales tiene un elemento  $\in$ -minimal y todos los subconjuntos no vacíos de  $\sigma$  son conjuntos de ordinales).

**Nota 5:** ... es inmediato ...

Si  $\alpha \in x$ , entonces es claro que  $\alpha \subset \bigcup x \equiv \sigma$ , luego que  $\alpha \leq \sigma$ . Por tanto,  $\sigma$  es una cota superior de  $x$  en  $\Omega$  y resta ver que es la menor cota superior.

---

<sup>21</sup> En efecto, por (ID) es clara la implicación de derecha a izquierda y para la otra basta ver (por (Dil) y el Teorema 2.7) que

$$\vdash_B \bigwedge x (x \in u \leftrightarrow \phi(x)) \rightarrow \phi(u).$$

Ahora bien, si suponemos que  $\bigwedge x (x \in u \leftrightarrow \phi(x))$ , como tenemos que  $\neg \bigwedge x (x \in u \leftrightarrow \phi(x))$  es un teorema de B, basta aplicar la regla (C) para obtener  $\phi(u)$ .

Sea pues  $\beta \in \Omega$  otra cota superior de  $x$  y veamos que  $\sigma \leq \beta$ , es decir, que  $\sigma \subset \beta$ . Sin más, si  $\gamma \in \sigma$  entonces existe un  $\alpha \in x$  tal que  $\gamma \in \alpha$  y como  $\alpha \subset \beta$  (por ser  $\beta$  cota superior de  $x$ ) concluimos que  $\gamma \in \beta$ . Esto prueba que  $\sigma \subset \beta$  y con ello que es el supremo de  $x$  como queríamos ver.

**Nota 6:** ... los ordinales  $0 < \alpha \leq n$  ...

Observemos que, en general, si  $\alpha, \beta$  son ordinales se tiene que

$$\vdash_B \alpha < \beta' \leftrightarrow \alpha \leq \beta.$$

En efecto, si  $\alpha < \beta'$  entonces  $\alpha \in \beta'$ , luego  $\alpha \in \beta$  o  $\alpha = \beta$  y en cualquier caso (en el primero por la transitividad de  $\beta$ ) concluimos que  $\alpha \subset \beta$ , es decir, que  $\alpha \leq \beta$ .

Recíprocamente, si  $\alpha \leq \beta$ , entonces por el Teorema 3.15 tenemos que  $\alpha \in \beta$  o  $\alpha = \beta$ , luego que  $\alpha \in \beta'$ , es decir, que  $\alpha < \beta'$ .

## Página 102

**Nota 1:** ... se cumple que ...

Por el Teorema 3.20 2).

**Nota 2:** ... en particular ...

Como  $u' \leq v < v'$  tenemos que  $u' \leq v'$ , luego si  $\alpha \in u'$  entonces  $\alpha \in v'$  y por ser  $v$  un natural se tiene que  $\alpha = 0 \vee \forall \beta \in \alpha \alpha = \beta'$ .

**Nota 3:** ... luego ...

Está claro que  $u$  es un ordinal pues  $u \in v$  y  $v$  es un ordinal (aplicamos el Teorema 3.12), luego como también hemos probado que se cumple la segunda condición en la definición de número natural podemos concluir que, en efecto,  $u \in \omega$ .

**Nota 4:** ... es trivial ...

Ya sabemos que  $0 \in \Omega$  (Teorema 3.11) y si  $\alpha \in 0' \equiv \emptyset \cup \{0\} = \{0\}$ , entonces claramente  $\alpha = 0$ , luego  $0$  cumple la definición de número natural. 

**Nota 5:** ...  $0 \leq n < n'$  ...

Por el Teorema 3.20 1) y 2).

**Nota 6:** ... entonces ...

Por el Teorema 3.20 2).

**Nota 7:** ... Entonces ...

Luego  $z' \setminus y$  es no vacío y por estar contenido en  $z'$ , que es un ordinal, tendrá un elemento  $\in$ -minimal.

**Nota 8:** ... es un número natural ...

Al ser  $n$  un número natural sabemos que si  $\alpha \in n'$ , entonces  $\alpha = 0$  o  $\forall \beta \in \alpha \alpha = \beta'$ . Considerando  $\alpha = n$  es claro que  $\alpha \in n'$  con lo que, como ya hemos visto que  $n \neq 0$ , obtenemos que existe un  $m \in n$  tal que  $n = m'$ .

**Nota 9:** ... sea un conjunto ...

Denotemos por  $\alpha \equiv$  “ $\omega$  es un conjunto”.

Como todos los axiomas de B son teoremas de ZF-AI<sup>22</sup>, por el Metateorema 2.1 tenemos que basta ver que  $\alpha$  no es un teorema de ZF-AI para concluir que no lo es de B.

Si  $\alpha$  fuera un teorema de ZF-AI tendríamos que en ZF-AI se prueba la existencia de un conjunto infinito<sup>23</sup>, luego la teoría ZF-AI + “todo conjunto es finito” sería contradictoria. Sin embargo, los teoremas 5.56 y 6.22 muestran que  $\mathbb{N}$  es un modelo de ZF-AI + “todo conjunto es finito”<sup>24</sup>, luego esta teoría es consistente por el Teorema 3.4 y esto nos muestra que, en efecto,  $\alpha$  no es un teorema de ZF-AI tal y como queríamos ver.

Este resultado tiene una curiosa consecuencia y es que aunque el Teorema 3.23 5) es realmente un teorema de B, nunca podremos “encontrar” un conjunto que cumpla las hipótesis, pues entonces obtendríamos que existe un conjunto tal que  $y = \omega$  y esto probaría que  $\omega$  es un conjunto. Con más detalle, la fórmula

$$\forall y (y \subset \omega \wedge 0 \in y \wedge \bigwedge n \in y n' \in y)$$

no es un teorema de B, pues si lo fuera tendríamos la siguiente demostración en B de que  $\omega$  es un conjunto:

|     |                                                                                            |                      |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|
| (1) | $\forall y (y \subset \omega \wedge 0 \in y \wedge \bigwedge n \in y n' \in y)$            | Tma. B               |
| (2) | $y \subset \omega \wedge 0 \in y \wedge \bigwedge n \in y n' \in y$                        | EP 1                 |
| (3) | $y \subset \omega \wedge 0 \in y \wedge \bigwedge n \in y n' \in y \rightarrow y = \omega$ | EG Tma. 3.23 5)      |
| (4) | $y = \omega$                                                                               | MP 2, 3              |
| (5) | $\forall y y = \omega$                                                                     | IP 4 ( $y$ no libre) |

<sup>22</sup> La teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel sin el axioma de infinitud.

<sup>23</sup> En efecto, si  $\omega$  es un conjunto entonces en ZF-AI se prueba que es infinito. Una forma de ver esto es, por ejemplo, utilizando el Teorema 6.28 2) (que dice que todo conjunto finito no vacío tiene un elemento maximal) y observando que  $\omega$  no tiene elemento maximal (pues si  $n \in \omega$  fuera maximal, como  $n \leq n'$  y  $n' \in \omega$  debería cumplirse que  $n = n'$  y esto no es cierto).

<sup>24</sup> En la **Nota 6** **pág. 86** ya hemos visto que  $\mathbb{N}$  es un modelo de ZF-AI porque esta teoría se interpreta en AP con el universo de la interpretación dado por la fórmula  $x = x$ . Además, el Teorema 6.22 nos dice que la traducción en  $\mathcal{L}_a$  de la sentencia “todo conjunto es finito” es un teorema de AP, luego el teorema de corrección nos dice que es verdadera en  $\mathbb{N}$  y el Metateorema D.9 nos da que esta sentencia es también verdadera en  $\mathbb{N}$  visto como modelo de ZF-AI.

## Página 103

**Nota 1:** ... entonces  $\omega \in \Omega$  ... que no es un número natural ...

Si  $\omega$  es un conjunto, es decir, si trabajamos en la teoría  $T$  resultante de añadir a  $B$  el axioma “ $\omega$  es un conjunto”, simbólicamente,

$$\bigvee y \bigwedge u (u \in y \leftrightarrow u \in \Omega \wedge \bigwedge \alpha (\alpha \in u' \rightarrow \alpha = 0 \vee \bigvee \beta \in \alpha \alpha = \beta')),$$

entonces podemos definir formalmente en  $T$

$$\omega \equiv y \mid \left( \bigwedge u \left( u \in y \leftrightarrow u \in \Omega \wedge \bigwedge \alpha (\alpha \in u' \rightarrow \alpha = 0 \vee \bigvee \beta \in \alpha \alpha = \beta') \right) \right)$$

donde por el nuevo axioma y el axioma de extensionalidad la descripción es propia.

El Teorema 3.22 muestra entonces que este descriptor es un ordinal, luego simbólicamente que  $\omega \in \Omega$ .

Esto también muestra que, en efecto,  $\omega$  no puede ser un número natural, pues como la descripción es propia por (DP) tenemos que

$$\vdash_T \bigwedge u \left( u \in \omega \leftrightarrow u \in \Omega \wedge \bigwedge \alpha (\alpha \in u' \rightarrow \alpha = 0 \vee \bigvee \beta \in \alpha \alpha = \beta') \right),$$

luego si  $\omega$  fuera un número natural se tendría que  $\omega \in \omega$  y esto contradice el Teorema 3.10.

Como último comentario, cabe mencionar que  $B$  es una teoría tan débil que incluso en la teoría que resulta de añadir a  $B$  el axioma “ $\omega$  es una clase propia”<sup>25</sup>, resulta que no es posible demostrar que  $\omega = \Omega$  (ver Anexo C), lo cual si es posible en  $Z^*$  (ver Nota 3 pág. 104).

**Nota 2:** ... Ni siquiera es posible ...

EN PROCESO

**Nota 3: Especificación ...**

Recordemos que (ver Nota 3 pág. 82) lo que el esquema axiomático de especificación nos dice es que para cada fórmula  $\phi$  de  $\mathcal{L}_{tc}$ , cualquier par de variables  $x, u$  y cualquier variable  $y$  que no esté libre en  $\phi$  la fórmula

$$\bigwedge x \bigvee y \bigwedge u (u \in y \leftrightarrow u \in x \wedge \phi)$$

es un axioma de  $Z^*$ .

Este esquema axiomático, al menos en toda su generalidad, no es demostrable en  $B$ , pues existen teorías de conjuntos (como NFA<sup>26</sup>) que extienden a  $B$ , es decir, en la que todos los axiomas de  $B$  son teoremas de estas teorías, y en las cuales solo se cumple una versión restringida de este esquema axiomático.

<sup>25</sup> Por la Nota 9 pág. 102 y el Metateorema 3.2 (obsérvese que la fórmula añadida es una sentencia) está teoría es consistente.

<sup>26</sup> Nuevos Fundamentos de Quine con átomos.

## Página 104

**Nota 1:** ... En efecto ...

Veamos formalmente que

$$\vdash_{Z^*} \bigwedge xy \bigvee z \bigwedge u (u \in z \leftrightarrow u \in x \wedge u \notin y).$$

La demostración es inmediata:

- (1)  $\bigwedge x \bigvee z \bigwedge u (u \in z \leftrightarrow u \in x \wedge u \notin y)$  Ax. especificación
- (2)  $\bigvee z \bigwedge u (u \in z \leftrightarrow u \in x \wedge u \notin y)$  EG 1
- (3)  $\bigwedge xy \bigvee z \bigwedge u (u \in z \leftrightarrow u \in x \wedge u \notin y)$  IG 2 ( $\times 2$ )

**Nota 2:** ... son también teoremas ...

En efecto, si tenemos que  $\vdash_B \alpha$  podemos utilizar el Metateorema 2.1 (pues todos los axiomas de B son teoremas de  $Z^*$ ) y concluir que  $\vdash_{Z^*} \alpha$ .

**Nota 3:** ... seguimos sin poder ...

El mismo argumento dado en la **Nota 9** **pág. 102** funciona en este caso pues todos los axiomas de  $Z^*$  son también teoremas de ZF-AI.

Además, veremos en la **Nota 4** **pág. 104** que en  $Z^*$  se cumple que toda subclase de un conjunto es un conjunto, y esto nos permite también demostrar que si  $\omega$  es una clase propia<sup>27</sup>, entonces se tiene que  $\omega = \Omega$ , luego que los números naturales son los únicos ordinales<sup>28</sup>.

En efecto, si no se cumple que  $\omega = \Omega$ , como  $\omega \subset \Omega$ , tenemos que debe existir un conjunto  $x \in \Omega \setminus \omega$ . Observemos entonces que dado  $n \in \omega$ , como  $n$  y  $x$  son ordinales por el Teorema 3.17 se tiene que cumplir que  $n \in x \vee x \in n \vee x = n$ . Si se dieran las dos últimas opciones, entonces  $x \in \omega$  (en el primer caso por la transitividad de  $\omega$ ) y esto contradice que  $x \in \Omega \setminus \omega$ , luego tenemos que  $n \in x$ . Es decir, hemos visto que si  $n \in \omega$ , entonces  $n \in x$ , luego que  $\omega \subset x$ . Ahora bien, como en  $Z^*$  toda subclase de un conjunto es un conjunto, obtenemos que  $\omega$  es un conjunto y esto es la contradicción buscada. 

**Nota 4:** ... En efecto ...

Veamos en primer lugar que en  $Z^*$  toda subclase de un conjunto es un conjunto.

Formalmente, queremos ver que si  $A = \{u | \phi(u)\}$  es una clase entonces

$$\vdash_{Z^*} \bigwedge x (A \subset x \rightarrow A \text{ es un conjunto}),$$

<sup>27</sup> Como resulta por ejemplo de añadir a  $Z^*$  el axioma “ $\omega$  no es un conjunto” o a ZF-AI el axioma “todo conjunto es finito”, que por la **Nota 9** **pág. 102** y el Metateorema 3.2 (obsérvese que las dos fórmulas añadidas son sentencias) serán teorías consistentes.

<sup>28</sup> Compárese con lo dicho para la teoría B en la **Nota 1** **pág. 103**

donde la fórmula expresada sin referencias a clases es (tomando  $y$  una variable que no aparezca libre en  $\phi$ )

$$\bigwedge x \left( \bigwedge u (\phi(u) \rightarrow u \in x) \rightarrow \bigvee y \bigwedge u (u \in y \leftrightarrow \phi(u)) \right). \quad (3.55)$$

Tenemos la siguiente demostración:

|      |                                                                                                                               |                                 |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|
| (1)  | $\bigwedge x \bigvee y \bigwedge u (u \in y \leftrightarrow u \in x \wedge \phi(u))$                                          | Ax. especificación              |
| (2)  | $\bigvee y \bigwedge u (u \in y \leftrightarrow u \in x \wedge \phi(u))$                                                      | EG 1                            |
| (3)  | $\bigwedge u (u \in y \leftrightarrow u \in x \wedge \phi(u))$                                                                | EP 2                            |
| (4)  | $\bigwedge u (\phi(u) \rightarrow u \in x)$                                                                                   | Hipótesis                       |
| (5)  | $u \in y \leftrightarrow u \in x \wedge \phi(u)$                                                                              | EG 3                            |
| (6)  | $u \in y$                                                                                                                     | Hipótesis                       |
| (7)  | $u \in x \wedge \phi(u)$                                                                                                      | SE 5, 6                         |
| (8)  | $\phi(u)$                                                                                                                     | EC 7                            |
| (9)  | $u \in y \rightarrow \phi(u)$                                                                                                 | Tma. deducción                  |
| (10) | $\phi(u)$                                                                                                                     | Hipótesis                       |
| (11) | $\phi(u) \rightarrow u \in x$                                                                                                 | EG 4                            |
| (12) | $u \in x$                                                                                                                     | MP 10, 11                       |
| (13) | $u \in x \wedge \phi(u)$                                                                                                      | IC 10, 12                       |
| (14) | $u \in y$                                                                                                                     | SE 5, 13                        |
| (15) | $\phi(u) \rightarrow u \in y$                                                                                                 | Tma. deducción                  |
| (16) | $u \in y \leftrightarrow \phi(u)$                                                                                             | IB 9, 15                        |
| (17) | $\bigwedge u (u \in y \leftrightarrow \phi(u))$                                                                               | IG 16 ( $u$ no libre en 3 ni 4) |
| (18) | $\bigvee y \bigwedge u (u \in y \leftrightarrow \phi(u))$                                                                     | IP 17                           |
| (19) | $\bigwedge u (\phi(u) \rightarrow u \in x) \rightarrow \bigvee y \bigwedge u (u \in y \leftrightarrow \phi(u))$               | Tma. deducción ( $y$ no libre)  |
| (20) | $\bigwedge x (\bigwedge u (\phi(u) \rightarrow u \in x) \rightarrow \bigvee y \bigwedge u (u \in y \leftrightarrow \phi(u)))$ | IG 19                           |

Por otra parte, si llamamos  $Z^{**}$  a la teoría axiomática cuyos axiomas son los mismos que los de  $Z^*$ , pero cambiando el esquema axiomático de especificación por el esquema axiomático que dice que toda subclase de un conjunto es un conjunto (es decir, consideramos como axiomas cada fórmula de la forma (3.55) con  $y$  no libre en  $\phi$ ), entonces se tiene que dada cualquier fórmula  $\phi$

$$\vdash_{Z^{**}} \bigwedge x \bigvee y \bigwedge u (u \in y \leftrightarrow u \in x \wedge \phi(u)),$$

donde  $y$  no es una variable libre de  $\phi$ .

En efecto, tenemos la siguiente demostración:

|     |                                                                                                                                                                 |                |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| (1) | $\bigwedge x (\bigwedge u ((u \in x \wedge \phi(u)) \rightarrow u \in x) \rightarrow \bigvee y \bigwedge u (u \in y \leftrightarrow (u \in x \wedge \phi(u))))$ | Axioma         |
| (2) | $\bigwedge u ((u \in x \wedge \phi(u)) \rightarrow u \in x) \rightarrow \bigvee y \bigwedge u (u \in y \leftrightarrow (u \in x \wedge \phi(u)))$               | EG 1           |
| (3) | $u \in x \wedge \phi(u)$                                                                                                                                        | Hipótesis      |
| (4) | $u \in x$                                                                                                                                                       | EC 3           |
| (5) | $(u \in x \wedge \phi(u)) \rightarrow u \in x$                                                                                                                  | Tma. deducción |
| (6) | $\bigwedge u ((u \in x \wedge \phi(u)) \rightarrow u \in x)$                                                                                                    | IG 5           |
| (7) | $\bigvee y \bigwedge u (u \in y \leftrightarrow u \in x \wedge \phi(u))$                                                                                        | MP 2, 6        |
| (8) | $\bigwedge x \bigvee y \bigwedge u (u \in y \leftrightarrow u \in x \wedge \phi(u))$                                                                            | IG 7           |



Con todo, el Metateorema 2.1 nos garantiza que ambas teorías tienen los mismos teoremas, que es justamente lo que queríamos demostrar. 

**Nota 5:** ... que  $A$  sea un conjunto

Veamos que en  $Z^*$  se cumple que una clase  $A = \{x|\phi(x)\}$  es un conjunto si, y solo si, está contenida en un conjunto.

Por la regla (IB) basta ver cada implicación por separado, luego veamos en primer lugar que

$$\vdash_B \forall y y = A \rightarrow \forall y A \subset y,$$

es decir,

$$\vdash_B \forall y \bigwedge u (u \in y \leftrightarrow \phi(u)) \rightarrow \forall y \bigwedge u (\phi(u) \rightarrow u \in y).$$

En efecto, tenemos la siguiente demostración:

|     |                                                                                                                           |                                |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|
| (1) | $\forall y \bigwedge u (u \in y \leftrightarrow \phi(u))$                                                                 | Hipótesis                      |
| (2) | $\bigwedge u (u \in y \leftrightarrow \phi(u))$                                                                           | EP 1 ( $y$ no libre en 1)      |
| (3) | $u \in y \leftrightarrow \phi(u)$                                                                                         | EG 2                           |
| (4) | $\phi(u) \rightarrow u \in y$                                                                                             | EB 3                           |
| (5) | $\bigwedge u (\phi(u) \rightarrow u \in y)$                                                                               | IG 4 ( $u$ no libre en 1 ni 2) |
| (6) | $\forall y \bigwedge u (\phi(u) \rightarrow u \in y)$                                                                     | IP 5 ( $y$ no libre)           |
| (7) | $\forall y \bigwedge u (u \in y \leftrightarrow \phi(u)) \rightarrow \forall y \bigwedge u (\phi(u) \rightarrow u \in y)$ | Tma. deducción                 |

Para completar la prueba debemos ver que si  $y$  no está libre en  $\phi$ , entonces la siguiente fórmula es un teorema de  $Z^*$ :

$$\forall y \bigwedge u (\phi(u) \rightarrow u \in y) \rightarrow \forall y \bigwedge u (u \in y \leftrightarrow \phi(u)). \quad (3.56)$$

Tenemos la siguiente demostración (donde  $z$  no está en  $\phi(u)$  y es distinta de  $u$  e  $y$ ):

|      |                                                                                      |                                    |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------|
| (1)  | $\forall y \bigwedge u (\phi(u) \rightarrow u \in y)$                                | Hipótesis                          |
| (2)  | $\bigwedge u (\phi(u) \rightarrow u \in z)$                                          | EP 1 ( $z$ no está en 1)           |
| (3)  | $\bigwedge z \forall y \bigwedge u (u \in y \leftrightarrow u \in z \wedge \phi(u))$ | Ax. especificación                 |
| (4)  | $\forall y \bigwedge u (u \in y \leftrightarrow u \in z \wedge \phi(u))$             | EG 3                               |
| (5)  | $\bigwedge u (u \in y \leftrightarrow u \in z \wedge \phi(u))$                       | EP 4 ( $y$ no libre en 1 ni 2)     |
| (6)  | $u \in y \leftrightarrow u \in z \wedge \phi(u)$                                     | EG 5                               |
| (7)  | $u \in y$                                                                            | Hipótesis                          |
| (8)  | $u \in z \wedge \phi(u)$                                                             | SE 6, 7                            |
| (9)  | $\phi(u)$                                                                            | EC 8                               |
| (10) | $u \in y \rightarrow \phi(u)$                                                        | Tma. deducción                     |
| (11) | $\phi(u)$                                                                            | Hipótesis                          |
| (12) | $\phi(u) \rightarrow u \in z$                                                        | EG 2                               |
| (13) | $u \in z$                                                                            | MP 11, 12                          |
| (14) | $u \in z \wedge \phi(u)$                                                             | IC 11, 13                          |
| (15) | $u \in y$                                                                            | SE 6, 14                           |
| (16) | $\phi(u) \rightarrow u \in y$                                                        | Tma. deducción                     |
| (17) | $u \in y \leftrightarrow \phi(u)$                                                    | IB 10, 16                          |
| (17) | $\bigwedge u (u \in y \leftrightarrow \phi(u))$                                      | IG 17 ( $u$ no libre en 1, 2 ni 5) |

|                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                      |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{array}{l} \text{IP 17 } (y, z \text{ no libres}) \\ \text{Tma. deducción} \end{array}$ | $\begin{array}{l} (18) \quad \forall y \wedge u(u \in y \leftrightarrow \phi(u)) \\ (19) \quad \forall y \wedge u(\phi(u) \rightarrow u \in y) \rightarrow \\ \quad \forall y \wedge u(u \in y \leftrightarrow \phi(u)) \end{array}$ |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Esto concluye la prueba del resultado buscado. 

Observemos que la primera implicación la hemos demostrado en B, es decir, que en B podemos demostrar que si una clase es un conjunto, entonces está contenida en conjunto, pero veamos que la implicación recíproca no es demostrable en B.

Si esto fuera posible, es decir, si (3.56) fuera un teorema de B, entonces podríamos demostrar en B la siguiente fórmula<sup>29</sup> (donde  $y$  no está libre en  $\phi$ )

$$\bigwedge x \left( \bigwedge u(\phi(u) \rightarrow u \in x) \rightarrow \bigvee y \bigwedge u(u \in y \leftrightarrow \phi(u)) \right)$$

para cada fórmula  $\phi$  de  $\mathcal{L}_{tc}$ . En otras palabras, podríamos demostrar en B que toda subclase de un conjunto es un conjunto, pero en la nota anterior hemos visto que a partir de este esquema axiomático podemos demostrar el esquema axiomático de especificación y esto no es posible en B (ver **Nota 3** pág. 103).

**Nota 6:** ... es un número natural ...

Al ser  $\omega$  transitiva (Teorema 3.22) y tener que  $i \in m' \in \omega$ , concluimos que, en efecto,  $i \in \omega$ .

**Nota 7:** ... Por hipótesis ...

Por hipótesis tenemos que  $\bigwedge n \in \omega(\phi(n) \rightarrow \phi(n'))$ , luego si se cumpliera  $\phi(n)$ , entonces debería cumplirse  $\phi(n')$ , pero  $n' = i$  y sabemos que se cumple  $\neg\phi(i)$  con lo que tenemos una contradicción. Por reducción al absurdo obtenemos que  $\neg\phi(n)$ .

**Nota 8:** ... luego ...

Tenemos que  $n \in i \in m'$  y como  $m'$  es transitivo (por ser un ordinal) obtenemos que  $n \in m'$ . Como también hemos visto que  $\neg\phi(n)$  concluimos que, en efecto,  $n \in x$ .

**Nota 9:** ... explícitamente en el esquema ...

Es difícil (si no imposible) dar un criterio general sobre que variables deben estar prohibidas en este tipo de esquemas axiomáticos, pero siempre serán aquellas que “pervierten”

<sup>29</sup> En efecto, tenemos la siguiente demostración:

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                             |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{array}{l} (1) \quad \bigwedge u(\phi(u) \rightarrow u \in x) \\ (2) \quad S_y^x(\bigwedge u(\phi(u) \rightarrow u \in y)) \\ (3) \quad \bigvee y \bigwedge u(\phi(u) \rightarrow u \in y) \\ (4) \quad \bigvee y \bigwedge u(u \in y \leftrightarrow \phi(u)) \\ (5) \quad \bigwedge u(\phi(u) \rightarrow u \in x) \rightarrow \bigvee y \bigwedge u(u \in y \leftrightarrow \phi(u)) \\ (6) \quad \bigwedge x(\bigwedge u(\phi(u) \rightarrow u \in x) \rightarrow \bigvee y \bigwedge u(u \in y \leftrightarrow \phi(u))) \end{array}$ | $\begin{array}{l} \text{Hipótesis} \\ \text{R 1} \\ \text{IP 2} \\ \text{MP 3, (3.56)} \\ \text{Tma. deducción} \\ \text{IG 5} \end{array}$ |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

el sentido del teorema. En el caso del esquema axiomático de especificación esto ocurre con la variable  $y$  pues su “significado” es de existencia, es decir, es el conjunto fijo cuyos elementos son aquellos que satisfacen la fórmula  $\phi$  y, por tanto, no tiene sentido considerar a  $y$  como variable de la fórmula que define a  $y$ . Las variables  $x$  y  $u$ , por otra parte, si están permitidas.

## Página 105

**Nota 1:** ... justificar que ...

Está claro que  $s$  es una función de  $0'$  en  $X$  que cumple que  $s(0) = a$  y

$$\bigwedge i < 0' s(i') = G(i, s(i)) \equiv \bigwedge i (i \in \emptyset \rightarrow s(i') = G(i, s(i)))$$

pues la hipótesis  $i \in \emptyset$  es trivialmente falsa (luego aplicando la regla (C) obtenemos lo deseado).

Como es también claro que  $0 \in \omega$  y que  $a \in X$ , concluimos que  $(0, a) \in F$ .

**Nota 2:** ... cumple lo requerido ...

Tenemos que como  $(n, x) \in F$ , existe una función  $s : n' \rightarrow X$  tal que  $s(n) = x$ ,  $s(0) = a$  y

$$\bigwedge i < n s(i') = G(i, s(i)). \quad (3.57)$$

Veamos en primer lugar que  $s^* = s \cup \{(n', G(n, x))\}$  es una función de  $n''$  en  $X$ :

- Si  $i < n'$  sabemos que  $(i, s(i)) \in s^*$  y si son  $(i, b_1), (i, b_2) \in s^*$ , entonces ambos están en  $s$  (al ser  $i < n'$ ), luego como  $s$  es una función concluimos que  $b_1 = b_2$ . Además, lo visto nos dice que si  $i < n'$ , entonces  $s^*(i) = s(i)$  y como  $s(i) \in X$  concluimos que  $s^*(i) \in X$ .
- Si  $i = n'$  tenemos que  $(n', G(n, x)) \in s^*$  y si son  $(n', b_1), (n', b_2) \in s^*$ , entonces no pueden pertenecer a  $s$ , con lo que  $b_1 = b_2 = G(n, x)$ . Así,  $s^*(n') = G(n, x)$  y con esto es también claro que  $s^*(n') \in X$ .
- Si  $i \notin n''$ , entonces  $i \notin \mathcal{D}s$  y no existe ningún  $x$  tal que  $(i, x) \in s$ , y también  $i \neq n'$ , luego en general no existe ningún  $x$  tal que  $(i, x) \in s^*$ . Esto junto a los dos puntos anteriores muestra que  $\mathcal{D}s^* = n''$ .

Lo visto nos muestra también que  $s^*(0) = s(0) = a$  y que si  $i < n'$  entonces:

- Si  $i < n$ , tenemos que  $i' < n'$  y por (3.57)

$$s^*(i') = s(i') = G(i, s(i)) = G(i, s^*(i)).$$

- Si  $i = n$ , entonces

$$s^*(i') = s^*(n') = G(n, x) = G(n, s(n)) = G(n, s^*(n)).$$

Con todo, como  $n' \in \omega$  y  $G(n, x) \in X$ , lo visto sobre  $s^*$  nos permite asegurar que, tal como queríamos ver,  $(n', G(n, x)) \in F$ .

**Nota 3:** ... por inducción ...

Queremos ver que se cumple la siguiente fórmula:

$$\bigwedge n \in \omega \left( \left( \left( s : n' \longrightarrow X \wedge s(0) = a \wedge \bigwedge i < n s(i') = G(i, s(i)) \right) \wedge \right. \right. \\ \left. \left( s^* : n' \longrightarrow X \wedge s^*(0) = a \wedge \bigwedge i < n s^*(i') = G(i, s^*(i)) \right) \right) \rightarrow \\ \bigwedge i < n' s(i) = s^*(i). \quad (3.58)$$

En efecto, tomando  $n \in \omega$  arbitrario y suponiendo que se cumplen las hipótesis sobre  $s$  y  $s^*$ , basta ver por inducción que para cada  $i \in \omega$  se satisface la fórmula

$$\phi(i) \equiv i < n' \rightarrow s(i) = s^*(i),$$

luego en particular que  $\bigwedge i < n' s(i) = s^*(i)$  como buscamos demostrar.

Es claro que se satisface  $\phi(0)$  pues  $0 < n'$  y  $s(0) = a = s^*(0)$ .

Por otra parte, si suponemos que se cumple  $\phi(i)$  tenemos dos opciones:

- Si  $i' < n'$ , entonces  $i < n < n'$  y como se cumple  $\phi(i)$  (siendo  $i < n'$ ) obtenemos que  $s(i) = s^*(i)$ . Al ser también  $i < n$  concluimos que

$$s(i') = G(i, s(i)) = G(i, s^*(i)) = s^*(i').$$

- Si  $n' \leq i'$ , entonces de suponer que  $i' < n'$  tenemos dos fórmulas contradictorias y por la regla (C) obtenemos que  $s(i') = s^*(i')$ .

En cualquier caso se tiene que se cumple  $\phi(i')$  como queríamos ver y esto finaliza la inducción y la demostración. 

**Nota 4:** ... claro que ... es decir ...

En efecto, si tenemos que  $(n, x), (n, y) \in F$  entonces existen  $s, s^* : n' \longrightarrow X$  que cumplen la definición de  $F$ , luego en particular se cumple la hipótesis de (3.58) y por tanto se obtiene que, como  $n < n'$ ,  $s(n) = s^*(n)$ , pero por la definición de  $F$  son  $s(n) = x$  y  $s^*(n) = y$ , luego  $x = y$ .

Esto prueba que  $F$  es una función.

Por otra parte, si  $n \notin \omega$  entonces claramente no puede existir ningún  $x$  tal que  $(n, x) \in F$ , luego  $\mathcal{D}F = \omega$ .

**Nota 5:** ... Es claro que ... luego...

Se cumple que  $s|_{n'}$  es una función con dominio  $n'$  y con rango en  $X$  la cual cumple:

- $s|_{n'}(n) = s(n)$ .
- $s|_{n'}(0) = s(0) = a$ .

- Dado  $i < n$ , en particular es  $i < n'$  y como  $s$  satisface la definición de  $F$  es

$$s|_{n'}(i') = s(i') = G(i, s(i)) = G(i, s|_{n'}(i)).$$

Así,  $s|_{n'}$  satisface la definición de  $F$  para  $n$  y  $s(n)$ , con lo que (por unicidad)  $F(n) = s(n)$ . Por otra parte, como  $s$  satisface la definición de  $F$  para  $n'$  y  $x$  se tiene que (por unicidad)  $F(n') = x = s(n')$ .

**Nota 6:** ... concluimos que ...

Por la nota anterior sabemos que  $F(n') = s(n')$  y que  $F(n) = s(n)$ . Por otra parte, como  $s$  satisface la definición de  $F$  y  $n < n'$  tenemos que  $s(n') = G(n, s(n))$ . Juntando todo se obtiene que

$$F(n') = s(n') = G(n, s(n)) = G(n, F(n)).$$

**Nota 7:** ... enunciado sin clases ...

Otra versión del Teorema 3.26 sin hacer referencia a clases y en la que el dominio y rango de la función son explícitos es la siguiente:

#### Metateorema 3.9: Teorema 3.26

Dadas dos fórmulas  $\phi(u)$  y  $\psi(n, u, v)$  (tal vez con más variables libres), existe una fórmula  $\chi(n, x, a)$  (con las mismas variables libres adicionales que las dos fórmulas dadas) de modo que la siguiente fórmula es un teorema de  $Z^*$ :

$$\begin{aligned} \bigwedge a \left[ \left( \phi(a) \wedge \bigwedge nu \left( n \in \omega \wedge \phi(u) \rightarrow \bigvee^1 v (\phi(v) \wedge \psi(n, u, v)) \right) \right) \rightarrow \right. \\ \left. \bigwedge n \in \omega \bigvee^1 x \chi(n, x, a) \wedge \bigwedge nx (\chi(n, x, a) \rightarrow n \in \omega \wedge \phi(x)) \wedge \chi(0, a, a) \wedge \right. \\ \left. \bigwedge n \in \omega \bigvee v_1 v_2 (\chi(n, v_1, a) \wedge \chi(n', v_2, a) \wedge \psi(n, v_1, v_2)) \right]. \end{aligned}$$

Concretamente se tiene que

$$\begin{aligned} \chi(n, x, a) \equiv n \in \omega \wedge \phi(x) \wedge \bigvee s \left( s \text{ es una función} \wedge \mathcal{D}s = n' \wedge \bigwedge i \in n' \phi(s(i)) \wedge \right. \\ \left. s(n) = x \wedge s(0) = a \wedge \bigwedge i \in n \psi(i, s(i), s(i')) \right). \end{aligned}$$

## Página 106

**Nota 1:** ... En estos términos ...

Veamos de forma detallada como se define la suma de números naturales y como se demuestran sus propiedades en  $Z^*$ .

Tenemos que al considerar  $\psi(n, u, v) \equiv v = u'$  y  $\phi(u) \equiv u \in \omega$ , el Metateorema 3.9 nos dice que existe una fórmula  $\chi(n, x, a)$  con exactamente estas variables libres tal que

$$\begin{aligned} \vdash_{Z^*} \bigwedge a \left[ \left( a \in \omega \wedge \bigwedge n u \in \omega \bigvee^1 v \in \omega (v = u') \right) \rightarrow \right. \\ \bigwedge n \in \omega \bigvee^1 x \chi(n, x, a) \wedge \bigwedge n x (\chi(n, x, a) \rightarrow n \in \omega \wedge x \in \omega) \wedge \chi(0, a, a) \wedge \\ \left. \bigwedge n \in \omega \bigvee v_1 v_2 (\chi(n, v_1, a) \wedge \chi(n', v_2, a) \wedge v_2 = v'_1) \right]. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Como por el Teorema 3.23 2) es claro que

$$\vdash_{Z^*} \bigwedge u \in \omega \bigvee^1 v \in \omega (v = u'),$$

de (3.59) se obtiene que

$$\begin{aligned} \vdash_{Z^*} \bigwedge m \in \omega \left( \bigwedge n \in \omega \bigvee^1 x \chi(n, x, m) \wedge \bigwedge n x (\chi(n, x, m) \rightarrow n \in \omega \wedge x \in \omega) \wedge \chi(0, m, m) \wedge \right. \\ \left. \bigwedge n \in \omega \bigvee v_1 v_2 (\chi(n, v_1, m) \wedge \chi(n', v_2, m) \wedge v_2 = v'_1) \right). \end{aligned} \quad (3.60)$$

De (3.60) es claro que

$$\vdash_{Z^*} \bigwedge mn \in \omega \bigvee^1 x \chi(n, x, m), \quad (3.61)$$

y por tanto si definimos

$$m + n \equiv x \mid \chi(n, x, m)$$

se tiene que siempre que  $n, m$  sean números naturales la descripción es propia. Así pues, por la regla (DP) tenemos que

$$\vdash_{Z^*} \bigwedge mn \in \omega \chi(n, m + n, m). \quad (3.62)$$

Como una primera consecuencia, por (3.60) tenemos que

$$\vdash_{Z^*} \bigwedge m \in \omega \bigwedge n x (\chi(n, x, m) \rightarrow n \in \omega \wedge x \in \omega),$$

luego por (3.62)

$$\vdash_{Z^*} \bigwedge mn \in \omega m + n \in \omega. \quad (3.63)$$

Por otra parte, de (3.60) también tenemos que

$$\vdash_{Z^*} \bigwedge m \in \omega \chi(0, m, m) \quad (3.64)$$

y de (3.62) (usando el Teorema 3.23 1)) tenemos que<sup>30</sup>

$$\vdash_{Z^*} \bigwedge m \in \omega \chi(0, m + 0, m). \quad (3.65)$$

---

<sup>30</sup> Observemos que podemos hacer todas estas sustituciones sin ninguna preocupación gracias a las equivalencias e igualdades que nos da el Metateorema 1.21.

Con todo, de (3.61), (3.64) y (3.65) obtenemos que

$$\vdash_{Z^*} \bigwedge m \in \omega \left( \bigvee^1 x \chi(0, x, m) \wedge S_x^{m+0} \chi(0, x, m) \wedge S_x^m \chi(0, x, m) \right)$$

y por el Metateorema 2.4 concluimos que

$$\vdash_{Z^*} \bigwedge m \in \omega \, m + 0 = m. \quad (3.66)$$

Por otro lado, de (3.60) tenemos que

$$\vdash_{Z^*} \bigwedge mn \in \omega \bigvee v_1 v_2 (\chi(n, v_1, m) \wedge \chi(n', v_2, m) \wedge v_2 = v'_1). \quad (3.67)$$

Así pues, dados  $m, n$  naturales se tiene que existen  $v_1, v_2$  tales que  $v_2 = v'_1$  y de modo que se cumplen  $\chi(n, v_1, m)$  y  $\chi(n', v_2, m)$  (luego por (3.60)  $v_1, v_2 \in \omega$ ). Ahora bien, por (3.62) también se cumplen  $\chi(n, m+n, m)$  y  $\chi(n', m+n', m)$ , luego por la unicidad (es decir, por (3.61) y aplicando el Metateorema 2.4) obtenemos que  $v_1 = m+n$  y  $v_2 = m+n'$ . Con todo, como  $v_2 = v'_1$  concluimos que  $m+n' = (m+n)'$ .

Con esto hemos demostrado que

$$\vdash_{Z^*} \bigwedge mn \in \omega \, m + n' = (m+n)'. \quad (3.68)$$

Observemos que lo único que hemos hecho ha sido demostrar que la suma es realmente una función de  $\omega \times \omega$  en  $\omega$  y que cumple la recurrencia deseada, es decir, hemos visto lo que nos dice el Teorema 3.26, pero sin hacer referencia a clases. Para tener una muestra más, haremos esto mismo también para el producto y no volveremos a entrar en estos detalles, pues el procedimiento para eliminar las referencias a las clases del Teorema 3.26 es siempre el que aquí hemos mostrado.

**Nota 2:** ... definida mediante ... nos da una función ... tenemos que ...

Veamos de forma detallada como se define el producto de números naturales y como se demuestran sus propiedades en  $Z^*$ .

Tenemos que al considerar  $\psi(n, u, v) \equiv \chi(m, v, u)$  (con  $\chi(m, x, n)$  la fórmula que describe la suma (ver Nota 1 pág. 106)) y  $\phi(u) \equiv u \in \omega$ , el Teorema 1.36 (ver Metateorema 3.9) nos dice que existe una fórmula  $\alpha(n, x, a, m)$  con exactamente estas variables libres (pues  $m$  es una variable libre de  $\psi$  distinta de  $n, u$  y  $v$ ) tal que

$$\begin{aligned} \vdash_{Z^*} \bigwedge a \left[ \left( a \in \omega \wedge \bigwedge n u \in \omega \bigvee^1 v \in \omega \chi(m, v, u) \right) \rightarrow \right. \\ \bigwedge n \in \omega \bigvee^1 x \alpha(n, x, a, m) \wedge \bigwedge n x (\alpha(n, x, a, m) \rightarrow n \in \omega \wedge x \in \omega) \wedge \alpha(0, a, a, m) \wedge \\ \left. \bigwedge n \in \omega \bigvee v_1 v_2 (\alpha(n, v_1, a, m) \wedge \alpha(n', v_2, a, m) \wedge \chi(m, v_2, v_1)) \right]. \end{aligned}$$

En este caso nos interesa considerar que  $a \equiv 0$ , luego eliminando el generalizador en lo anterior obtenemos

$$\begin{aligned} \vdash_{Z^*} \left( 0 \in \omega \wedge \bigwedge n u \in \omega \bigvee^1 v \in \omega \chi(m, v, u) \right) \rightarrow \\ \bigwedge n \in \omega \bigvee^1 x \alpha(n, x, 0, m) \wedge \bigwedge n x (\alpha(n, x, 0, m) \rightarrow n \in \omega \wedge x \in \omega) \wedge \alpha(0, 0, 0, m) \wedge \\ \bigwedge n \in \omega \bigvee v_1 v_2 (\alpha(n, v_1, 0, m) \wedge \alpha(n', v_2, 0, m) \wedge \chi(m, v_2, v_1)). \end{aligned} \quad (3.69)$$

Ahora, como por el Teorema 3.23 1) tenemos que  $0 \in \omega$  y por (3.61), (3.62) y (3.63) se cumple que

$$\vdash_{Z^*} \bigwedge m u \in \omega \bigvee^1 v \in \omega \chi(m, v, u),$$

de (3.69) se obtiene que

$$\begin{aligned} \vdash_{Z^*} \bigwedge m \in \omega \left( \bigwedge n \in \omega \bigvee^1 x \alpha(n, x, 0, m) \wedge \bigwedge n x (\alpha(n, x, 0, m) \rightarrow n \in \omega \wedge x \in \omega) \wedge \right. \\ \left. \alpha(0, 0, 0, m) \wedge \bigwedge n \in \omega \bigvee v_1 v_2 (\alpha(n, v_1, 0, m) \wedge \alpha(n', v_2, 0, m) \wedge \chi(m, v_2, v_1)) \right). \end{aligned} \quad (3.70)$$

De (3.70) es claro que

$$\vdash_{Z^*} \bigwedge mn \in \omega \bigvee^1 x \alpha(n, x, 0, m), \quad (3.71)$$

y por tanto si definimos

$$m \cdot n \equiv x \mid \alpha(n, x, 0, m)$$

se tiene que siempre que  $n, m$  sean números naturales la descripción es propia. Así pues, por la regla (DP) tenemos que

$$\vdash_{Z^*} \bigwedge mn \in \omega \alpha(n, m \cdot n, 0, m). \quad (3.72)$$

Como una primera consecuencia, por (3.70) tenemos que

$$\vdash_{Z^*} \bigwedge m \in \omega \bigwedge n x (\alpha(n, x, 0, m) \rightarrow n \in \omega \wedge x \in \omega),$$

luego por (3.72)

$$\vdash_{Z^*} \bigwedge mn \in \omega m \cdot n \in \omega. \quad (3.73)$$

Por otra parte, de (3.70) también tenemos que

$$\vdash_{Z^*} \bigwedge m \in \omega \alpha(0, 0, 0, m) \quad (3.74)$$

y de (3.72) (usando el Teorema 3.23 1)) tenemos que

$$\vdash_{Z^*} \bigwedge m \in \omega \alpha(0, m \cdot 0, 0, m). \quad (3.75)$$



Con todo, de (3.71), (3.74) y (3.75) obtenemos que

$$\vdash_{Z^*} \bigwedge m \in \omega \left( \bigvee^1 x \alpha(0, x, 0, m) \wedge S_x^{m \cdot 0} \alpha(0, x, 0, m) \wedge S_x^0 \chi(0, x, 0, m) \right)$$

y por el Metateorema 2.4 concluimos que

$$\vdash_{Z^*} \bigwedge m \in \omega m \cdot 0 = 0. \quad (3.76)$$

Por otro lado, de (3.70) tenemos que

$$\vdash_{Z^*} \bigwedge mn \in \omega \bigvee v_1 v_2 (\alpha(n, v_1, 0, m) \wedge \alpha(n', v_2, 0, m) \wedge \chi(m, v_2, v_1)). \quad (3.77)$$

Así pues, dados  $m, n$  naturales se tiene que existen  $v_1, v_2$  tales que se cumple  $\chi(m, v_2, v_1)$  y de modo que se cumplen  $\alpha(n, v_1, 0, m)$  y  $\alpha(n', v_2, 0, m)$  (luego por (3.70)  $v_1, v_2 \in \omega$ ). Ahora bien, por (3.72) también se cumplen  $\alpha(n, m \cdot n, 0, m)$  y  $\alpha(n', m \cdot n', 0, m)$ , luego por la unicidad (es decir, por (3.71) y aplicando el Metateorema 2.4) obtenemos que  $v_1 = m \cdot n$  y  $v_2 = m \cdot n'$ . Así, como se cumple  $\chi(m, v_2, v_1)$  y son  $v_1 = m \cdot n$  y  $v_2 = m \cdot n'$ , por el Metateorema 2.18 obtenemos que también se cumple  $\chi(m, m \cdot n', m \cdot n)$ . Por otra parte, por (3.62) también se cumple  $\chi(m, m \cdot n + m, m \cdot n)$ , con lo que por la unicidad (es decir, por (3.61) y aplicando el Metateorema 2.4) obtenemos que  $m \cdot n' = m \cdot n + m$ .

Con esto hemos demostrado que

$$\vdash_{Z^*} \bigwedge mn \in \omega m \cdot n' = m \cdot n + m. \quad (3.78)$$

**Nota 3:** ... se demuestran ...

Las cuatro primeras fórmulas son teoremas de B (Teorema 3.23), luego por la Nota 2 pág. 104 son teorema de  $Z^*$ . Las cuatro siguientes son consecuencia del Teorema 3.26 y las hemos demostrado con detalle en la Nota 1 pág. 106 y la Nota 2 pág. 106. La última fórmula se ha demostrado en el Teorema 3.25.

**Nota 4: Teorías aritméticas**

En el Anexo D se estudia de forma más general las interpretaciones de teorías axiomáticas.

## Páginas 106 - 113

EN PROCESO

## Página 115

**Nota 1:** DEMOSTRACIÓN ...

Tenemos la siguiente demostración formal:

|      |                                                                                               |                    |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|
| (1)  | $\bigwedge x(\alpha \leftrightarrow \beta)$                                                   | Hipótesis          |
| (2)  | $\bigvee^1 x\alpha \leftrightarrow \bigvee^1 x\beta$                                          | MP 1, Tma. 2.11 8) |
| (3)  | $\bigvee^1 x\alpha$                                                                           | Hipótesis          |
| (4)  | $S_x^{x \alpha}\alpha$                                                                        | DP 3               |
| (5)  | $\bigvee^1 x\beta$                                                                            | SE 2, 3            |
| (6)  | $S_x^{x \beta}\beta$                                                                          | DP 5               |
| (7)  | $S_x^{x \alpha}\alpha \leftrightarrow S_x^{x \alpha}\beta$                                    | EG 1               |
| (8)  | $S_x^{x \alpha}\beta$                                                                         | SE 4, 7            |
| (9)  | $x \alpha = x \beta$                                                                          | Mteo. 2.4 5, 6, 8  |
| (10) | $\bigvee^1 x\alpha \rightarrow x \alpha = x \beta$                                            | Teo. deducción     |
| (11) | $\neg \bigvee^1 x\alpha$                                                                      | Hipótesis          |
| (12) | $\neg \bigvee^1 x\alpha \leftrightarrow \neg \bigvee^1 x\beta$                                | SE 2, Teo. 2.11 1) |
| (13) | $\neg \bigvee^1 x\beta$                                                                       | SE 11, 12          |
| (14) | $x \alpha = y (y = y)$                                                                        | DI 11              |
| (15) | $x \beta = y (y = y)$                                                                         | DI 13              |
| (16) | $y (y = y) = x \beta$                                                                         | SI 15              |
| (17) | $x \alpha = x \beta$                                                                          | TI 14, 16          |
| (18) | $\neg \bigvee^1 x\alpha \rightarrow x \alpha = x \beta$                                       | Tma. deducción     |
| (19) | $\left( \bigvee^1 x\alpha \vee \neg \bigvee^1 x\alpha \right) \rightarrow x \alpha = x \beta$ | Dil 10, 18         |
| (20) | $\bigvee^1 x\alpha \vee \neg \bigvee^1 x\alpha$                                               | TND                |
| (21) | $x \alpha = x \beta$                                                                          | MP 19, 20          |
| (22) | $\bigwedge x(\alpha \leftrightarrow \beta) \rightarrow x \alpha = x \beta$                    |                    |

Queda así demostrado el resultado.



## Página 116

**Nota 1:** En efecto ... se puede acumular ...

Observemos que, en general, si  $s, t$  son términos de  $\mathcal{L}_{tc}$  se tiene que

$$\vdash_B \{s, t\} \in z \leftrightarrow \bigvee u \left( u \in z \wedge \bigwedge v (v \in u \leftrightarrow v = s \vee v = t) \right). \quad (3.79)$$

En efecto, tenemos la siguiente demostración (donde  $u, v, z$  son variables distintas que no están en  $s$  ni en  $t$ ):

|     |                                                                                                                |                |
|-----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| (1) | $\{s, t\} \in z$                                                                                               | Hipótesis      |
| (2) | $\bigwedge v (v \in \{s, t\} \leftrightarrow v = s \vee v = t)$                                                | Tma. B         |
| (3) | $\{s, t\} \in z \wedge \bigwedge v (v \in \{s, t\} \leftrightarrow v = s \vee v = t)$                          | IC 1, 3        |
| (4) | $S_u^{\{s, t\}} (u \in z \wedge \bigwedge v (v \in u \leftrightarrow v = s \vee v = t))$                       | R 3            |
| (5) | $\bigvee u (u \in z \wedge \bigwedge v (v \in u \leftrightarrow v = s \vee v = t))$                            | IP 4           |
| (6) | $\{s, t\} \in z \rightarrow \bigvee u (u \in z \wedge \bigwedge v (v \in u \leftrightarrow v = s \vee v = t))$ | Tma. deducción |

|      |                                                                                                                    |                            |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|
| (7)  | $\forall u (u \in z \wedge \bigwedge v (v \in u \leftrightarrow v = s \vee v = t))$                                | Hipótesis                  |
| (8)  | $u \in z \wedge \bigwedge v (v \in u \leftrightarrow v = s \vee v = t)$                                            | EP 7 ( $u$ no libre en 1)  |
| (9)  | $\bigvee^1 u \bigwedge v (v \in u \leftrightarrow v = s \vee v = t)$                                               | Tma. B                     |
| (10) | $S_u^u \bigwedge v (v \in u \leftrightarrow v = s \vee v = t)$                                                     | DP 9                       |
| (11) | $\{s, t\} = u \mid \bigwedge v (v \in u \leftrightarrow v = s \vee v = t)$                                         | Tma. B                     |
| (12) | $S_u^{\{s, t\}} \bigwedge v (v \in u \leftrightarrow v = s \vee v = t)$                                            | ETI 10, 11                 |
| (13) | $S_u^u \bigwedge v (v \in u \leftrightarrow v = s \vee v = t)$                                                     | EC 8                       |
| (14) | $\{s, t\} = u$                                                                                                     | Mteo. 2.4 9, 12, 13        |
| (15) | $u \in z$                                                                                                          | EC 8                       |
| (16) | $\{s, t\} \in z$                                                                                                   | ETI 14, 15 ( $u$ no libre) |
| (17) | $\forall u (u \in z \wedge \bigwedge v (v \in u \leftrightarrow v = s \vee v = t)) \rightarrow \{s, t\} \in z$     | Tma. deducción             |
| (18) | $\{s, t\} \in z \leftrightarrow \forall u (u \in z \wedge \bigwedge v (v \in u \leftrightarrow v = s \vee v = t))$ | IB 6, 17                   |

Esto prueba lo deseado. 

En particular, como  $(x, y) \equiv \{\{x\}, \{x, y\}\}$  aplicando (3.79) tenemos que

$$\vdash_B (x, y) \in z \leftrightarrow \forall u (u \in z \wedge \bigwedge v (v \in u \leftrightarrow v = \{x\} \vee v = \{x, y\})). \quad (3.80)$$

**Nota 2:** ... en una segunda fase ...

En primer lugar, es claro por todo lo visto en notas anteriores que

$$\vdash_B v = \{s, t\} \leftrightarrow \bigwedge w (w \in v \leftrightarrow w = s \vee w = t). \quad (3.81)$$

Por tanto, utilizando el Teorema 2.11 junto a (3.80) y (3.81) obtenemos que, en efecto,

$$\vdash_B (x, y) \in z \leftrightarrow \forall u (u \in z \wedge \bigwedge v (v \in u \leftrightarrow \bigwedge w (w \in v \leftrightarrow w = x) \vee \bigwedge w (w \in v \leftrightarrow w = x \vee w = y))). \quad (3.82)$$

**Nota 3:** ... fórmula equivalente ...

En efecto, si denotamos por

$$\beta \equiv \forall y (y \in z \wedge \bigwedge u ((x, u) \in f \leftrightarrow u = y)) \vee \left( \neg \bigvee^1 y (y(x, y) \in f \wedge x \mid (x = x) \in z) \right)$$

tenemos la siguiente demostración:

|     |                                                              |                                   |
|-----|--------------------------------------------------------------|-----------------------------------|
| (1) | $f(x) \in z$                                                 | Hipótesis                         |
| (2) | $\bigvee^1 u (x, u) \in f$                                   | Hipótesis                         |
| (3) | $\forall y \bigwedge u ((x, u) \in f \leftrightarrow y = u)$ | SE 2, Tma. 2.9                    |
| (4) | $\bigwedge u ((x, u) \in f \leftrightarrow y = u)$           | EP 3 ( $y$ no libre en 1 ni en 2) |
| (5) | $(x, f(x)) \in f$                                            | DP 2                              |
| (6) | $(x, f(x)) \in f \leftrightarrow y = f(x)$                   | EG 4 [Mteo. 1.21]                 |

|      |                                                                                                                    |                                                     |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| (7)  | $y = f(x)$                                                                                                         | SE 5, 6                                             |
| (8)  | $y \in z$                                                                                                          | ETI 1, 7                                            |
| (9)  | $y \in z \wedge \wedge u((x, u) \in f \leftrightarrow y = u)$                                                      | IC 4, 8                                             |
| (10) | $\forall y (y \in z \wedge \wedge u((x, u) \in f \leftrightarrow y = u))$                                          | IP 9 ( $y$ no libre)                                |
| (11) | $\beta$                                                                                                            | ID 10                                               |
| (12) | $\overset{1}{\forall} u(x, u) \in f \rightarrow \beta$                                                             | Tma. deducción                                      |
| (13) | $\neg \overset{1}{\forall} u(x, u) \in f$                                                                          | Hipótesis                                           |
| (14) | $\neg \forall y \wedge u((x, u) \in f \leftrightarrow y = u)$                                                      | SE 13, (SE Tma. 2.11 1), Tma. 2.9 3))               |
| (15) | $\neg \forall w \wedge z((x, z) \in f \leftrightarrow w = z)$                                                      | SE 14, Tma. 2.16                                    |
| (16) | $\neg \forall u \wedge y((x, y) \in f \leftrightarrow u = y)$                                                      | SE 15, Tma. 2.16                                    |
| (17) | $\neg \overset{1}{\forall} y(x, y) \in f$                                                                          | SE 16, (SE Tma. 2.11 1), Tma. 2.9 3))               |
| (18) | $f(x) = x (x = x)$                                                                                                 | DI 13                                               |
| (19) | $x (x = x) \in z$                                                                                                  | ETI 1, (SI 18)                                      |
| (20) | $\neg \overset{1}{\forall} y(x, y) \in f \wedge x (x = x) \in z$                                                   | IC 17, 19                                           |
| (21) | $\beta$                                                                                                            | ID 20                                               |
| (22) | $\neg \overset{1}{\forall} u(x, u) \in f \rightarrow \beta$                                                        | Tma. deducción                                      |
| (23) | $\left( \overset{1}{\forall} u(x, u) \in f \vee \neg \overset{1}{\forall} u(x, u) \in f \right) \rightarrow \beta$ | Dil 12, 22                                          |
| (24) | $\overset{1}{\forall} u(x, u) \in f \vee \neg \overset{1}{\forall} u(x, u) \in f$                                  | TND                                                 |
| (25) | $\beta$                                                                                                            | MP 23, 24                                           |
| (26) | $f(x) \in z \rightarrow \beta$                                                                                     | Tma. deducción                                      |
| (27) | $\forall y (y \in z \wedge \wedge u((x, u) \in f \leftrightarrow u = y))$                                          | Hipótesis                                           |
| (28) | $y \in z \wedge \wedge u((x, u) \in f \leftrightarrow u = y)$                                                      | EP 27 ( $y$ no libre en 27)                         |
| (29) | $\wedge u((x, u) \in f \leftrightarrow u = y)$                                                                     | EC 28                                               |
| (30) | $\forall y \wedge u((x, u) \in f \leftrightarrow y = u)$                                                           | IP 29 [Tma. 2.11 ( $u = y \leftrightarrow y = u$ )] |
| (31) | $\overset{1}{\forall} u(x, u) \in f$                                                                               | SE 30, Tma. 2.9                                     |
| (32) | $(x, f(x)) \in f$                                                                                                  | DP 31                                               |
| (33) | $(x, f(x)) \in f \leftrightarrow f(x) = y$                                                                         | EG 29                                               |
| (34) | $f(x) = y$                                                                                                         | SE 32, 33                                           |
| (35) | $y \in z$                                                                                                          | EC 28                                               |
| (36) | $f(x) \in z$                                                                                                       | ETI 34, 35 ( $y$ no libre)                          |
| (37) | $\forall y (y \in z \wedge \wedge u((x, u) \in f \leftrightarrow u = y)) \rightarrow f(x) \in z$                   | Tma. deducción                                      |
| (38) | $\neg \overset{1}{\forall} y(x, y) \in f \wedge x (x = x) \in z$                                                   | Hipótesis                                           |
| (39) | $\neg \overset{1}{\forall} y(x, y) \in f$                                                                          | EC 38                                               |
| (40) | $f(x) = x (x = x)$                                                                                                 | DI 39 [Mteo. 3.7, Teo. 3.31]                        |
| (41) | $x (x = x) \in z$                                                                                                  | EC 38                                               |
| (42) | $f(x) \in z$                                                                                                       | ETI 40, 41                                          |
| (43) | $\neg \overset{1}{\forall} y(x, y) \in f \wedge x (x = x) \in z \rightarrow f(x) \in z$                            | Tma. deducción                                      |
| (44) | $\beta \rightarrow f(x) \in z$                                                                                     | Dil 37, 43                                          |
| (45) | $f(x) \in z \leftrightarrow \beta$                                                                                 | IB 26, 44                                           |

Luego queda demostrado que

$$\vdash_B f(x) \in z \leftrightarrow \bigvee y \left( y \in z \wedge \bigwedge u ((x, u) \in f \leftrightarrow u = y) \right) \vee \left( \neg \bigvee^1 y (x, y) \in f \wedge x|(x = x) \in z \right) \quad (3.83)$$

tal y como buscábamos. 

**Nota 4:** ... nos queda ...

Utilizando que la fórmula  $\phi(x, y, z)$  tiene las variables libres indicadas y cumple que

$$\vdash_B (x, y) \in z \leftrightarrow \phi(x, y, z),$$

el Teorema 2.11 y (3.83) (junto a los Metateoremas 1.18 y 1.21) nos dan que

$$\vdash_B f(x) \in z \leftrightarrow \bigvee y \left( y \in z \wedge \bigwedge u (\phi(x, u, f) \leftrightarrow u = y) \right) \vee \left( \neg \bigvee^1 y \phi(x, y, f) \wedge x|(x = x) \in z \right). \quad (3.84)$$

Por otro lado, observemos que

$$\vdash x|(x = x) \in z \leftrightarrow \bigvee w (w = x|(x = x) \wedge w \in z). \quad (3.85)$$

En general se tiene que si  $t$  y  $s$  son términos cualesquiera y  $w$  una variable que no está en dichos términos

$$\vdash t \in s \leftrightarrow \bigvee w (w = t \wedge w \in s). \quad (3.86)$$

En efecto, tenemos la siguiente demostración:

|      |                                                            |                            |
|------|------------------------------------------------------------|----------------------------|
| (1)  | $t \in s$                                                  | Hipótesis                  |
| (2)  | $t = t$                                                    | I                          |
| (3)  | $t = t \wedge t \in s$                                     | IC 1, 2                    |
| (4)  | $S_w^t(w = t \wedge w \in s)$                              | R 3                        |
| (5)  | $\bigvee w (w = t \wedge w \in s)$                         | IP 5                       |
| (6)  | $t \in s \rightarrow \bigvee w (w = t \wedge w \in s)$     | Tma. deducción             |
| (7)  | $\bigvee w (w = t \wedge w \in s)$                         | Hipótesis                  |
| (8)  | $w = t \wedge w \in s$                                     | EP 7 ( $w$ no libre en 7)  |
| (9)  | $w = t$                                                    | EC 8                       |
| (10) | $t = w$                                                    | SI 9                       |
| (11) | $w \in s$                                                  | EC 8                       |
| (12) | $t \in s$                                                  | ETI 10, 11 ( $w$ no libre) |
| (13) | $\bigvee w (w = t \wedge w \in s) \rightarrow t \in s$     | Tma. deducción             |
| (14) | $t \in s \leftrightarrow \bigvee w (w = t \wedge w \in s)$ | IB 6, 13                   |

En particular, esto prueba (3.85). 

Utilizando finalmente el Teorema 2.11 junto a (3.84) y (3.85) obtenemos que

$$\begin{aligned} \vdash_B f(x) \in z \leftrightarrow \bigvee y \left( y \in z \wedge \bigwedge u (\phi(x, u, f) \leftrightarrow u = y) \right) \vee \\ \left( \neg \bigvee^1 y \phi(x, y, f) \wedge \bigvee w (w = x | (x = x) \wedge w \in z) \right). \end{aligned} \quad (3.87)$$

**Nota 5:** ... es equivalente a ...

En efecto, tenemos la siguiente demostración:

|      |                                                          |                   |
|------|----------------------------------------------------------|-------------------|
| (1)  | $w = x   (x = x)$                                        | Hipótesis         |
| (2)  | $x   (x = x) = \emptyset$                                | Tma. semilógico   |
| (3)  | $w = \emptyset$                                          | TI 1, 2           |
| (4)  | $\bigwedge u u \notin \emptyset$                         | Tma. B            |
| (5)  | $\bigwedge u u \notin w$                                 | ETI 3, 4          |
| (6)  | $w = x   (x = x) \rightarrow \bigwedge u u \notin w$     | Tma. deducción    |
| (7)  | $\bigwedge u u \notin w$                                 | Hipótesis         |
| (8)  | $\bigvee^1 w \bigwedge u u \notin w$                     | Tma. B            |
| (9)  | $\bigwedge u u \notin \emptyset$                         | Tma. B            |
| (10) | $w = \emptyset$                                          | Mteo. 2.4 7, 8, 9 |
| (11) | $x   (x = x) = \emptyset$                                | Tma. semilógico   |
| (12) | $\emptyset = x   (x = x)$                                | SI 11             |
| (13) | $w = x   (x = x)$                                        | TI 10, 12         |
| (14) | $\bigwedge u u \notin w \rightarrow w = x   (x = x)$     | Tma. deducción    |
| (15) | $w = x   (x = x) \leftrightarrow \bigwedge u u \notin w$ | IB 6, 14          |

Esto prueba lo deseado. 

## Página 117

**Nota 1: Teorema 3.32 ...**

Observemos que si la teoría  $T$  es consistente, entonces la teoría  $T'$  dada en el teorema es también consistente.

En efecto, si  $T'$  fuera contradictoria, entonces en  $T'$  podríamos demostrar  $x = x$  y  $x \neq x$ , que son fórmulas sin descriptores, luego por el segundo punto del teorema tendríamos que  $x = x$  y  $x \neq x$  son demostrables en  $T$  contradiciendo su consistencia. 

Observemos también que todo teorema de  $T$  es un teorema de  $T'$ , pues cualquier demostración en  $T$  será una demostración (sin descriptores) en  $T'$ .

**Nota 2:** ... más el axioma ...

Observemos que podemos tomar como axioma de  $T'$  cualquier fórmula de la forma  $\phi(v|v = v)$  con  $v$  cualquier variable, pues por el Metateorema 3.7 tenemos que

$$\vdash x|x = x = v|v = v,$$

luego por el Metateorema 2.18 (o simplemente por la regla (ETI)) obtenemos que

$$\vdash \phi(x|x = x) \leftrightarrow \phi(v|v = v).$$

Por tanto, independientemente de que tomemos  $\phi(x|x = x)$  o  $\phi(v|v = v)$  como axioma de  $T'$ , los teoremas que se podrán demostrar en dicha teoría son los mismos al ser ambas fórmulas equivalentes.

**Nota 3:** ... siempre podemos tomar ...

En efecto, la fórmula tiene una única variable libre y se tiene que

$$\vdash \bigvee^1 u u = c$$

por la siguiente demostración:

|      |                                                                               |                     |
|------|-------------------------------------------------------------------------------|---------------------|
| (1)  | $c = c$                                                                       | I                   |
| (2)  | $S_u^c(u = c)$                                                                | R 2                 |
| (3)  | $\bigvee u u = c$                                                             | IP 2                |
| (4)  | $u = c \wedge y = c$                                                          | Hipótesis           |
| (5)  | $u = c$                                                                       | EC 4                |
| (6)  | $c = u$                                                                       | SI 5                |
| (7)  | $y = c$                                                                       | EC 4                |
| (8)  | $y = u$                                                                       | TI 6, 7             |
| (9)  | $u = c \wedge y = c \rightarrow y = u$                                        | Tma. deducción      |
| (10) | $\bigwedge u y (u = c \wedge y = c \rightarrow y = u)$                        | IG 9 ( $\times 2$ ) |
| (11) | $\bigvee u u = c \wedge \bigwedge u y (u = c \wedge y = c \rightarrow y = u)$ | IC 3, 10            |
| (12) | $\bigvee^1 u u = c$                                                           | SE 11, Tma. 2.12    |

**Nota 4:** ... equivalente a AP ...

Realmente es equivalente a AP más el axioma semilógico  $x|(x = x) = 0$ .

En efecto, como se ve en el texto (ver Nota 6 pág. 117) todo teorema de AP es un teorema de  $T'$  (en particular todo axioma de AP es un teorema de  $T'$ ) y claramente  $x|(x = x) = 0$  es un teorema de  $T'$ , luego por el Metateorema 2.1 obtenemos que todo teorema de AP más el axioma semilógico  $x|(x = x) = 0$  es un teorema de  $T'$ . El recíproco es directo pues todos los axiomas de  $T'$  son axiomas de AP o el axioma semilógico  $x|(x = x) = 0$ , con lo que por el Metateorema 2.1 todo teorema de  $T'$  es un teorema de AP más el axioma semilógico  $x|(x = x) = 0$ .

Esto también nos garantiza que la teoría axiomática formada por los axiomas de AP junto al axioma semilógico  $x|(x = x) = 0$  es consistente.

En efecto, tenemos que  $T$  es consistente (pues AP lo es y basta aplicar el Teorema 3.5) y por la **Nota 1** pág. 117 obtenemos que  $T'$  también lo es, luego como por lo visto todo axioma propio de AP junto al axioma semilógico  $x|(x = x) = 0$  es consecuencia de los axiomas propios de  $T'$ , el Teorema 3.5 nos garantiza que AP junto al axioma semilógico  $x|(x = x) = 0$  es consistente.

Esto nos permite considerar sin ninguna pérdida de generalidad que  $x|(x = x) = 0$  es un axioma semilógico de AP y así lo haremos desde ahora.

**Nota 5:** ... es claro que ...

Si  $\phi(x)$  es una fórmula de  $\mathcal{L}_a$  (tal vez con más variables libres), el principio de inducción para  $\phi$  es la fórmula

$$\phi(0) \wedge \bigwedge x(\phi(x) \rightarrow \phi(x')) \rightarrow \bigwedge x\phi(x).$$

Así, si  $\phi'(x)$  es una fórmula sin descriptores con las mismas variables libres que  $\phi$  tal que

$$\vdash_{T'} \phi \leftrightarrow \phi', \quad (3.88)$$

entonces el Metateorema 1.18 nos da que

$$\vdash_{T'} \phi(0) \leftrightarrow \phi'(0)$$

y

$$\vdash_{T'} \phi(x') \leftrightarrow \phi'(x'),$$

luego por el Teorema 2.11 junto a (3.88) se tiene que

$$\begin{aligned} &\vdash_{T'} \phi(0) \wedge \bigwedge x(\phi(x) \rightarrow \phi(x')) \rightarrow \bigwedge x\phi(x) \\ &\phi'(0) \wedge \bigwedge x(\phi'(x) \rightarrow \phi'(x')) \rightarrow \bigwedge x\phi'(x). \end{aligned} \quad (3.89)$$

**Nota 6:** ... luego todos los teoremas ...

Por el Metateorema 2.1 basta ver que todo axioma propio de AP es un teorema de  $T'$ .

Como los seis primeros axiomas de AP no tienen descriptores es claro que son teoremas de  $T'$  (de hecho son axiomas), mientras que dada  $\phi(x)$  una fórmula de  $\mathcal{L}_a$  (tal vez con más variables libres) basta aplicar la regla (SE) junto a (3.89) (teniendo en cuenta que la segunda fórmula en la equivalencia es un axioma de  $T'$ ) para obtener que

$$\vdash_{T'} \phi(0) \wedge \bigwedge x(\phi(x) \rightarrow \phi(x')) \rightarrow \bigwedge x\phi(x).$$

Por tanto, cualquier caso del axioma de inducción es también un teorema de  $T'$  y concluimos con que, en efecto, todo axioma propio de AP es un teorema de  $T'$ .

**Nota 7:** ... puede probarse en  $T$ .

En efecto, si  $\alpha$  es un teorema de AP sin descriptores, por lo visto es un teorema de  $T'$  y el Teorema 3.32 2) nos asegura que es un teorema de  $T$ .



**Nota 8:** ... considerando el axioma ...

Si consideramos la fórmula  $\phi(x) \equiv \bigwedge y y \notin x$ , se tiene que en cualquier teoría de conjuntos que tenga el axioma de extensionalidad y en la que se demuestre la existencia del conjunto vacío se prueba que (ver **Nota 3** pág. 92)

$$\bigvee^1 u \phi(u).$$

Así pues, se puede aplicar el Teorema 3.32 con esta fórmula  $\phi$  y obtener el nuevo axioma

$$\phi(x|(x = x)) \equiv \bigwedge y y \notin x|(x = x),$$

que claramente será equivalente a  $x|(x = x) = \emptyset$  (basta aplicar la regla (ETI) para una implicación y el Metateorema 2.4 junto a la regla (DP) y la definición de  $\emptyset$  para la otra).

Además, en todas las teorías de conjuntos que consideraremos la existencia del conjunto vacío puede probarse utilizando únicamente axiomas sin descriptores, luego todo lo que sigue en el texto tiene pleno sentido para cualquiera de estas teorías.

**Nota 9:** La situación es la misma ...

Tenemos que  $T'$  tiene los mismos teoremas que  $Z^*$  más el axioma semilógico

$$\psi \equiv \bigwedge u u \notin x|(x = x).$$

En efecto, como se ve en el texto (ver **Nota 1** pág. 118) todo teorema de  $Z^*$  es un teorema de  $T'$  (en particular todo axioma de  $Z^*$  es un teorema de  $T'$ ) y claramente  $\psi$  es un teorema de  $T'$ , luego por el Metateorema 2.1 obtenemos que todo teorema de  $Z^*$  más el axioma semilógico  $\psi$  es un teorema de  $T'$ . El recíproco es directo pues todos los axiomas de  $T'$  son axiomas de  $Z^*$  o el axioma semilógico  $\psi$ , con lo que por el Metateorema 2.1 todo teorema de  $T'$  es un teorema de  $Z^*$  más el axioma semilógico  $\psi$ .

Esto también nos garantiza que la teoría axiomática formada por los axiomas de  $Z^*$  junto al axioma semilógico  $\psi$  es consistente.

En efecto, tenemos que  $T$  es consistente (pues  $Z^*$  lo es y basta aplicar el Teorema 3.5) y por la **Nota 1** pág. 117 obtenemos que  $T'$  también lo es, luego como por lo visto todo axioma propio de  $Z^*$  junto al axioma semilógico  $\psi$  es consecuencia de los axiomas propios de  $T'$ , el Teorema 3.5 nos garantiza que  $Z^*$  junto al axioma semilógico  $\psi$  es consistente.

Esto nos permite considerar sin ninguna pérdida de generalidad que  $\psi$  es un axioma semilógico de  $Z^*$  y así lo haremos desde ahora. Más aún, lo dicho será aplicable a cualquier teoría de conjuntos que se considera en el texto<sup>31</sup>, luego en cualquiera de ellas consideraremos también que  $\psi$  es un axioma semilógico.

---

<sup>31</sup> En aquellas teorías cuya consistencia no puede probarse, lo que tenemos es que el argumento que hemos dado nos muestra que si la teoría es consistente, entonces lo sigue siendo al añadirle el axioma semilógico  $\psi$ .

## Página 118

**Nota 1:** ... mismos teoremas que ... son equivalentes ...

Por lo dicho en la **Nota 9** **pág. 117** y el Metateorema **2.1** basta ver que los axiomas de  $Z^*$  son teoremas de  $T'$ .

Para ello, observemos que como los axiomas de extensionalidad, par y unión no tienen descriptor son también axiomas de  $T'$ , luego es suficiente con ver que cada caso del axioma de especificación será un teorema de  $T'$ .

Si  $\phi(u)$  es una fórmula de  $\mathcal{L}_{tc}$  (tal vez con más variables libres distintas de  $y$ ), el axioma de especificación para  $\phi$  es la fórmula

$$\bigwedge x \bigvee y \bigwedge u (u \in y \leftrightarrow u \in x \wedge \phi(u)).$$

Así, si  $\phi'(x)$  es una fórmula sin descriptores con las mismas variables libres que  $\phi$  tal que

$$\vdash_{T'} \phi \leftrightarrow \phi', \quad (3.90)$$

entonces el Teorema 2.11 junto a **(3.90)** nos da que

$$\vdash_{T'} \bigwedge x \bigvee y \bigwedge u (u \in y \leftrightarrow u \in x \wedge \phi(u)) \leftrightarrow \bigwedge x \bigvee y \bigwedge u (u \in y \leftrightarrow u \in x \wedge \phi'(u)). \quad (3.91)$$

Como la segunda fórmula en la equivalencia es un axioma de  $T'$  obtenemos por la regla (SE) que

$$\vdash_{T'} \bigwedge x \bigvee y \bigwedge u (u \in y \leftrightarrow u \in x \wedge \phi(u))$$

y con ello lo deseado.

**Nota 2:** ... puede demostrarse ...

En efecto, si  $\alpha$  es un teorema de  $Z^*$  sin descriptores, por lo visto es un teorema de  $T'$  y el Teorema 3.32 2) nos asegura que es un teorema de  $T$ .

**Nota 3:** Para demostrar 3.32 ...

Puede consultarse la demostración del Teorema 3.32 con todo detalle en el Anexo **E**.

**Nota 4:** ... Esbozamos la prueba ...

Tomando  $v$  una variable que no está en  $\alpha$  y distinta de  $u$  e  $y$  y denotando

$$\beta \equiv \bigwedge u (\alpha \leftrightarrow u = y) \vee \left( \neg \bigvee^1 u \alpha \wedge y = x \mid (x = x) \right)$$

la prueba formal completa es la siguiente:

|                         |           |
|-------------------------|-----------|
| (1) $y = u \mid \alpha$ | Hipótesis |
|-------------------------|-----------|

|                                                                                                             |                                                              |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| (2) $\overset{1}{\forall}u \alpha$                                                                          | Hipótesis                                                    |
| (3) $\forall v \wedge u(\alpha \leftrightarrow u = v)$                                                      | SE 2, Teo. 2.9 3) [Teo. 2.11 $v = u \leftrightarrow u = v$ ] |
| (4) $\wedge u(\alpha \leftrightarrow u = v)$                                                                | EP 3 ( $v$ no libre en 1 ni 2)                               |
| (5) $S_u^u \alpha \leftrightarrow u   \alpha = v$                                                           | EG 4                                                         |
| (6) $S_u^u \alpha$                                                                                          | DP 2                                                         |
| (7) $u   \alpha = v$                                                                                        | SE 5, 6                                                      |
| (8) $y = v$                                                                                                 | TI 1, 7                                                      |
| (9) $\wedge u(\alpha \leftrightarrow u = y)$                                                                | ETI 4, 8 ( $v$ no libre)                                     |
| (10) $\beta$                                                                                                | ID 9                                                         |
| (11) $\overset{1}{\forall}u \alpha \rightarrow \beta$                                                       | Tma. deducción                                               |
| (12) $\neg \overset{1}{\forall}u \alpha$                                                                    | Hipótesis                                                    |
| (13) $u   \alpha = x   (x = x)$                                                                             | DI 12                                                        |
| (14) $y = x   (x = x)$                                                                                      | TI 1, 13                                                     |
| (15) $\neg \overset{1}{\forall}u \alpha \wedge y = x   (x = x)$                                             | IC 12, 14                                                    |
| (16) $\beta$                                                                                                | ID 15                                                        |
| (17) $\neg \overset{1}{\forall}u \alpha \rightarrow \beta$                                                  | Tma. deducción                                               |
| (18) $\left( \overset{1}{\forall}u \alpha \vee \neg \overset{1}{\forall}u \alpha \right) \rightarrow \beta$ | Dil 11, 17                                                   |
| (19) $\overset{1}{\forall}u \alpha \vee \neg \overset{1}{\forall}u \alpha$                                  | TND                                                          |
| (20) $\beta$                                                                                                | MP 18, 19                                                    |
| (21) $y = u   \alpha \rightarrow \beta$                                                                     | Tma. deducción                                               |
| (22) $\wedge u(\alpha \leftrightarrow u = y)$                                                               | Hipótesis                                                    |
| (23) $\forall y \wedge u(\alpha \leftrightarrow y = u)$                                                     | IP 22 [Teo. 2.11 $u = y \leftrightarrow y = u$ ]             |
| (24) $\overset{1}{\forall}u \alpha$                                                                         | SE 23, Teo. 2.9 3) [ $y$ no en $u   \alpha$ ]                |
| (25) $S_u^u \alpha$                                                                                         | DP 24                                                        |
| (26) $S_u^u \alpha \leftrightarrow u   \alpha = y$                                                          | EG 22                                                        |
| (27) $u   \alpha = y$                                                                                       | SE 25, 26                                                    |
| (28) $y = u   \alpha$                                                                                       | SI 27                                                        |
| (29) $\wedge u(\alpha \leftrightarrow u = y) \rightarrow y = u   \alpha$                                    | Tma. deducción                                               |
| (30) $\neg \overset{1}{\forall}u \alpha \wedge y = x   (x = x)$                                             | Hipótesis                                                    |
| (31) $\neg \overset{1}{\forall}u \alpha$                                                                    | EC 30                                                        |
| (32) $u   \alpha = x   (x = x)$                                                                             | DI 31                                                        |
| (33) $y = x   (x = x)$                                                                                      | EC 30                                                        |
| (34) $x   (x = x) = u   \alpha$                                                                             | SI 32                                                        |
| (35) $y = u   \alpha$                                                                                       | TI 33, 34                                                    |
| (36) $\neg \overset{1}{\forall}u \alpha \wedge y = x   (x = x) \rightarrow y = u   \alpha$                  | Tma. deducción                                               |
| (37) $\beta \rightarrow y = u   \alpha$                                                                     | Dil 29, 36                                                   |
| (38) $y = u   \alpha \leftrightarrow \beta$                                                                 | IB 21, 37                                                    |

Queda pues probado lo deseado.



## Página 124

**Nota 1:** ... sigue siéndolo ...

Ver la **Nota 1** pág. 117.

# Capítulo 4

## La completitud semántica

EN PROCESO



# Capítulo 5

## La aritmética de Peano

EN PROCESO





# Capítulo 6

## La teoría de Kripke-Platek

EN PROCESO



# Capítulo 7

## La teoría de la recursión

EN PROCESO



# Capítulo 8

## La formalización de la lógica

EN PROCESO



# Capítulo 9

## Incompletitud

EN PROCESO





# Capítulo 10

## Clases y conjuntos

EN PROCESO



# Capítulo 11

## Los axiomas restantes de la teoría de conjuntos

EN PROCESO



# Capítulo 12

## Las teorías de conjuntos ZFC y NBG

EN PROCESO



# Anexos

## A. Definibilidad de la suma y el producto

En esta sección veremos que no es posible definir la suma y el producto (en un sentido preciso que daremos a continuación) en la teoría axiomática cuyo lenguaje consista únicamente en una constante  $0$  y un funtor monádico  $S$  y cuyos axiomas propios sean (AP1), (AP2) y (AP7). De hecho, demostraremos que no es posible hacerlo ni siquiera en una teoría aún más potente que esta.

EN PROCESO<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> El curioso puede consultar la respuesta [aquí](#) y [aquí](#) bajo su propia responsabilidad :). Otra prueba alternativa puede consultarse en [End01]. En la sección 3.1 prueba que una teoría muy parecida a la nuestra es completa, con lo que aunque no incluye el principio de inducción, toda versión de este axioma en dicho lenguaje debe ser un teorema, pues si no fuera así, por completitud lo sería su negación y en AP podríamos probar ambas fórmulas, luego sería contradictoria. Por tanto, esta teoría es equivalente a la nuestra. Ahora, en el ejercicio 4 de la página 193 se afirma que los únicos conjuntos definibles de  $\mathbb{N}$  en esta teoría son los finitos y cofinitos, luego ni la suma ni el producto serán definibles en esta teoría (ni en la nuestra), pues de serlo podríamos definir el conjunto de los números pares, que no es ni finito ni cofinito.

## **B. Formalización de los resultados conjuntistas básicos en B**

EN PROCESO



**C.  $\omega = \Omega$  no es demostrable en  $B + “\omega$  no es un conjunto”**

EN PROCESO<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Puede consultarse una prueba de Carlos Ivorra [aquí](#), aunque puede contener errores.

## D. Interpretaciones de teorías

En este anexo se verá la definición y los resultados asociados a la interpretación de teorías axiomáticas en general y no únicamente las interpretaciones de la aritmética de Peano como se hace en [Ivob]. Se puede consultar también [Ivoa, Sección 5.2].

A lo largo del anexo consideraremos que todos los lenguajes tienen descriptor, lo que por la Sección 3.5 no supone ninguna pérdida de generalidad.

Observemos que en  $Z^*$  se han definido los números naturales así como las funciones sucesor, suma y producto de naturales y se ha demostrado que, con dicha definición, se satisfacen todos los axiomas de Peano (Teorema 3.27). Esto nos dice que, en cierto modo, todo lo que podamos demostrar en AP sobre los números naturales podremos demostrarlo también en  $Z^*$ . Por ejemplo, si  $\phi$  es el siguiente teorema de AP

$$\phi \equiv \bigwedge xy \ x + y = y + x,$$

entonces en  $Z^*$  se podrá demostrar

$$\bar{\phi} \equiv \bigwedge xy \in \omega \ x + y = y + x$$

donde ahora el símbolo  $+$  no es un funtor del lenguaje, sino el nombre que le hemos dado a cierto término. La idea es que si la demostración de  $\phi$  en AP viene dada por la sucesión de fórmulas  $\delta_1, \dots, \delta_n$ , podemos “traducir” cada fórmula al lenguaje de la teoría de conjuntos cambiando las apariciones del sucesor, la suma y el producto por sus definiciones en  $Z^*$  y acotando los generalizadores y descriptores para que únicamente hablen de números naturales<sup>1</sup> y, como cada axioma de Peano es un teorema de  $Z^*$ , lo que obtenemos es una demostración de  $\bar{\phi}$  en  $Z^*$  donde cada axioma de la demostración original pasa a ser un teorema.

Estas ideas de “traducción” de fórmulas se formalizan con la siguiente definición:

### Definición D.1: Interpretación de lenguajes y teorías

Sean  $\mathcal{L}_S$  y  $\mathcal{L}_T$  dos lenguajes formales. Una **interpretación**  $M$  de  $\mathcal{L}_S$  en  $\mathcal{L}_T$  viene determinada por:

- (i) Una función que a cada variable  $x$  de  $\mathcal{L}_S$  le hace corresponder una variable  $\bar{x}$  de  $\mathcal{L}_T$ , de modo que variables distintas de  $\mathcal{L}_S$  se correspondan con variables distintas de  $\mathcal{L}_T$ .
- (ii) Una fórmula de  $\mathcal{L}_T$   $x \in M^a$  con  $x$  como única variable libre. Diremos que  $M$  determina el **universo** de la interpretación.
- (iii) Para cada constante  $c$  de  $\mathcal{L}_S$ , un designador  $\bar{c}$  de  $\mathcal{L}_T$ .
- (iv) Para cada funtor  $n$ -ádico  $f$  de  $\mathcal{L}_S$ , un término<sup>b</sup>  $\bar{f}(x_1, \dots, x_n)$  de  $\mathcal{L}_T$  con las variables libres indicadas.

<sup>1</sup> Como se ha mostrado con la fórmula  $\phi$  esto es necesario pues cada vez que en una fórmula  $\delta_i$  aparezca un cuantificador, éste hará referencia a “la totalidad de los números naturales”, pero los cuantificadores de  $\mathcal{L}_{tc}$  harán referencia a “la totalidad de los conjuntos”, luego tendremos que acotarlos para que únicamente hablen sobre la totalidad de los naturales entre todos los posibles conjuntos.

- (v) Para cada relator  $n$ -ádico  $R$  de  $\mathcal{L}_S$ , una fórmula<sup>c</sup>  $\bar{R}(x_1, \dots, x_n)$  de  $\mathcal{L}_T$  con las variables libres indicadas de modo que la fórmula asociada al igualador de  $\mathcal{L}_S$  es  $x = y$ .

De este modo, se define la **traducción**  $\bar{\theta}$  a  $\mathcal{L}_T$  de una expresión  $\theta$  de  $\mathcal{L}_S$  mediante las siguientes reglas:

1.  $\bar{x}$  es la variable asociada a  $x$  por la interpretación.
2.  $\bar{c}$  es el designador asociado a  $c$  por la interpretación.
3.  $\overline{ft_1 \cdots t_n} \equiv \bar{f}(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n)$ .
4.  $\overline{Rt_1 \cdots t_n} \equiv \bar{R}(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n)$ <sup>d</sup>.
5.  $\overline{\neg \alpha} \equiv \neg \bar{\alpha}$ .
6.  $\overline{\alpha \rightarrow \beta} \equiv \bar{\alpha} \rightarrow \bar{\beta}$ .
7.  $\overline{\bigwedge x \alpha} \equiv \bigwedge \bar{x} \in M \bar{\alpha}$ .
8.  $\overline{x | \alpha} \equiv \bar{x} | (\bar{x} \in M \wedge \bar{\alpha})$ .

Si además  $S$  es una teoría axiomática sobre  $\mathcal{L}_S$  y  $T$  una teoría axiomática sobre  $\mathcal{L}_T$ , diremos que  $S$  se interpreta en  $T$  a través de  $M$  si se cumplen:

- (I)  $\vdash_T (x | x = x) \in M$ <sup>e</sup>.
- (II)  $\vdash_T \bar{c} \in M$  para cada constante  $c$  de  $\mathcal{L}_S$ .
- (III)  $\vdash_T \bigwedge x_1 \cdots x_n \in M \bar{f} \in M$  para cada funtor  $n$ -ádico  $f$  de  $\mathcal{L}_S$  (siendo  $x_1, \dots, x_n$  las variables libres de  $\bar{f}$ ).
- (IV)  $\vdash_T \bigwedge \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n \in M \bar{\alpha}$  para cada axioma propio  $\alpha$  de  $S$  con variables libres  $x_1, \dots, x_n$ <sup>f</sup>.

<sup>a</sup> Esta fórmula no tiene nada que ver con el relator  $\in$  de las teorías de conjuntos, es simplemente una fórmula con  $x$  como única variable libre. Podríamos haber escrito  $\phi(x)$ , pero la notación facilitará la escritura. La notación para los cuantificadores sigue lo dicho en la **Nota 5** **pág. 86**.

<sup>b</sup> Observemos que el término asociado no tiene porque ser un funtor, pero si debe tener exactamente  $n$  variables libres.

<sup>c</sup> Observemos que la fórmula asociada no tiene porque ser un relator, pero si debe tener exactamente  $n$  variables libres.

<sup>d</sup> En particular, observemos que la traducción de una fórmula de la forma  $t_1 = t_2$  es

$$S_{z_1}^{\bar{t}_1} S_{z_2}^{\bar{t}_2} S_x^{z_1} S_y^{z_2} (x = y) \equiv S_{z_1}^{\bar{t}_1} S_{z_2}^{\bar{t}_2} (z_1 = z_2) \equiv \bar{t}_1 = \bar{t}_2.$$

<sup>e</sup> Aquí podemos considerar que esto debe cumplirse para cualquier variable  $x$  de  $\mathcal{L}_T$ , o podemos considerar que se cumple para alguna fija y entonces dada otra variable  $y$  basta aplicar la regla (ETI) junto al teorema lógico  $x|(x = x) = y|(y = y)$  (que es inmediato por el Metateorema 3.7) para obtener que  $\vdash_T (y|y = y) \in M$ .

En cualquier caso, que en  $T$  pueda demostrarse esta fórmula es un requisito técnico para tratar con las descripciones impropias que en la práctica siempre se satisfará (ver la sección 3.5) y que necesario para que los teoremas sobre interpretaciones sean ciertos.

<sup>f</sup> Si  $\alpha$  no tiene variables libres se debe cumplir simplemente  $\vdash_T \bar{\alpha}$ .

Observemos que, en definitiva, la traducción de una expresión  $\theta$  se obtiene sustituyendo cada signo de  $\mathcal{L}_S$  por su interpretación en  $\mathcal{L}_T$  y acotando todas las variables ligadas por el universo  $M$  de la interpretación, que es justamente lo que el ejemplo presentado al comienzo del anexo nos pedía que hiciéramos.

Observemos también que lo que afirma la definición anterior sobre los axiomas de  $S$  es que las traducciones de las clausuras de los axiomas propios de  $S$  son teoremas de  $T$ . La razón de trabajar con las clausuras de los axiomas y no con los propios axiomas es que necesitamos acotar cada variable para que “signifique lo que toca” dentro de la teoría  $T$ , pero como sabemos que de la clausura de una fórmula se deduce la propia fórmula y viceversa no perdemos ninguna generalidad<sup>2</sup>.

Antes de continuar veamos como se traducen el resto de símbolos lógicos no primitivos, es decir, la disyunción, la conjunción, el bicondicional y el particularizador:

### Metateorema D.2

En las condiciones de la Definición D.1 se tiene que si  $\alpha, \beta$  son fórmulas de  $\mathcal{L}_S$ , entonces:

- (i)  $\overline{\alpha \vee \beta} \equiv \bar{\alpha} \vee \bar{\beta}$ .
- (ii)  $\overline{\alpha \wedge \beta} \equiv \bar{\alpha} \wedge \bar{\beta}$ .
- (iii)  $\overline{\alpha \leftrightarrow \beta} \equiv \bar{\alpha} \leftrightarrow \bar{\beta}$ .
- (iv)  $\vdash \overline{\forall x_1 \cdots x_n \alpha} \leftrightarrow \forall \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n (\bar{x}_1 \in M \wedge \cdots \wedge \bar{x}_n \in M \wedge \bar{\alpha})$ .
- (v)  $\vdash \overline{\exists x_1 \cdots x_n \alpha} \leftrightarrow \exists \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n (\bar{x}_1 \in M \wedge \cdots \wedge \bar{x}_n \in M \wedge \bar{\alpha})$ .

Veamos en primer lugar las **demostraciones de (i), (ii) y (iii)** que son inmediatas:

$$\overline{\alpha \vee \beta} \equiv \overline{\neg \alpha \rightarrow \beta} \equiv \neg \bar{\alpha} \rightarrow \bar{\beta} \equiv \neg \bar{\alpha} \rightarrow \bar{\beta} \equiv \bar{\alpha} \vee \bar{\beta}.$$

$$\overline{\alpha \wedge \beta} \equiv \overline{\neg(\neg \alpha \vee \neg \beta)} \equiv \neg(\neg \bar{\alpha} \vee \neg \bar{\beta}) \equiv \neg(\neg \bar{\alpha} \vee \neg \bar{\beta}) \equiv \bar{\alpha} \wedge \bar{\beta}.$$

$$\overline{\alpha \leftrightarrow \beta} \equiv \overline{(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)} \equiv \bar{\alpha} \rightarrow \bar{\beta} \wedge \bar{\beta} \rightarrow \bar{\alpha} \equiv (\bar{\alpha} \rightarrow \bar{\beta}) \wedge (\bar{\beta} \rightarrow \bar{\alpha}) \equiv \bar{\alpha} \leftrightarrow \bar{\beta}.$$

Por otra parte, **demostraremos (iv)** por inducción en el número de cuantificadores.

<sup>2</sup> De hecho, por esta misma razón no perdemos ninguna generalidad si suponemos de entrada que los axiomas propios de cualquier teoría axiomática son sentencias.

En el caso de un único cuantificador tenemos que

$$\overline{\bigvee x \alpha} \equiv \overline{\neg \bigwedge x \neg \alpha} \equiv \overline{\neg \bigwedge x \neg \alpha} \equiv \neg \bigwedge \bar{x} \in M \neg \bar{\alpha} \equiv \neg \bigwedge \bar{x} \in M \neg \bar{\alpha},$$

luego basta ver que

$$\vdash \neg \bigwedge \bar{x} \in M \neg \bar{\alpha} \leftrightarrow \bigvee \bar{x} \in M \bar{\alpha}.$$

Ahora bien, por el Metateorema 3.5 tenemos que

$$\vdash \neg \bigwedge \bar{x} \in M \neg \bar{\alpha} \leftrightarrow \bigvee \bar{x} \in M \neg \neg \bar{\alpha}$$

y por la regla (MBB) es suficiente con ver que

$$\vdash \bigvee \bar{x} \in M \neg \neg \bar{\alpha} \leftrightarrow \bigvee \bar{x} \in M \bar{\alpha}.$$

Esto último es inmediato por Teorema 2.11 junto a la regla (DN).

Supongamos pues que el resultado es cierto para  $k < n$  cuantificadores y veamos que entonces lo es para  $n$  cuantificadores.

Por hipótesis de inducción tenemos que

$$\vdash \overline{\bigvee x_2 \cdots x_n \alpha} \leftrightarrow \bigvee \bar{x}_2 \cdots \bar{x}_n (\bar{x}_2 \in M \wedge \cdots \wedge \bar{x}_n \in M \wedge \bar{\alpha})$$

y por el Metateorema 3.6 (iii) se tiene que

$$\vdash \bigvee \bar{x}_2 \cdots \bar{x}_n (\bar{x}_2 \in M \wedge \cdots \wedge \bar{x}_n \in M \wedge \bar{\alpha}) \leftrightarrow \bigvee \bar{x}_2 \cdots \bar{x}_n \in M \bar{\alpha},$$

luego usando la regla (MBB) obtenemos que

$$\vdash \overline{\bigvee x_2 \cdots x_n \alpha} \leftrightarrow \bigvee \bar{x}_2 \cdots \bar{x}_n \in M \bar{\alpha}. \quad (\text{D.1})$$

Utilizando entonces el Metateorema 3.4 junto a (D.1) se tiene que

$$\vdash \bigvee \bar{x}_1 \in M \overline{\bigvee x_2 \cdots x_n \alpha} \leftrightarrow \bigvee \bar{x}_1 \in M \bigvee \bar{x}_2 \cdots \bar{x}_n \in M \bar{\alpha}$$

y como por el Metateorema 3.6 (iii) tenemos que

$$\vdash \bigvee \bar{x}_1 \in M \bigvee \bar{x}_2 \cdots \bar{x}_n \in M \bar{\alpha} \leftrightarrow \bigvee \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n (\bar{x}_1 \in M \wedge \cdots \wedge \bar{x}_n \in M \wedge \bar{\alpha}),$$

por la regla (MBB) se obtiene que

$$\vdash \bigvee \bar{x}_1 \in M \overline{\bigvee x_2 \cdots x_n \alpha} \leftrightarrow \bigvee \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n (\bar{x}_1 \in M \wedge \cdots \wedge \bar{x}_n \in M \wedge \bar{\alpha}). \quad (\text{D.2})$$

Finalmente, lo visto en el caso de una única variable nos permite obtener que

$$\vdash \overline{\bigvee x_1 \cdots x_n \alpha} \leftrightarrow \bigvee \bar{x}_1 \in M \overline{\bigvee x_2 \cdots x_n \alpha}, \quad (\text{D.3})$$

luego usando de nuevo la regla (MBB) junto a (D.2) y (D.3) concluimos con lo deseado.

Esto concluye la inducción y por tanto esta parte de la demostración.

Finalmente **demostraremos (v)**.

Tenemos que

$$\overline{\bigvee x_1 \cdots x_n \alpha} \equiv \overline{\bigvee y_1 \cdots y_n \bigwedge x_1 \cdots x_n (\alpha \leftrightarrow y_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge y_n = x_n)}$$

donde  $y_1, \dots, y_n$  son las variables de menor índice que no están en  $\bigwedge x_1 \cdots x_n \alpha$ .

Así, por (iv) obtenemos que

$$\begin{aligned} & \overline{\bigvee x_1 \cdots x_n \alpha \leftrightarrow} \\ & \bigvee \overline{y_1} \cdots \overline{y_n} \left( \overline{y_1} \in M \wedge \cdots \wedge \overline{y_n} \in M \wedge \overline{\bigwedge x_1 \cdots x_n (\alpha \leftrightarrow y_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge y_n = x_n)} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

siendo

$$\begin{aligned} & \overline{\bigwedge x_1 \cdots x_n (\alpha \leftrightarrow y_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge y_n = x_n)} \equiv \\ & \bigwedge \overline{x_1} \cdots \overline{x_n} \in M \quad (\bar{\alpha} \leftrightarrow \overline{y_1} = \overline{x_1} \wedge \cdots \wedge \overline{y_n} = \overline{x_n}). \end{aligned}$$

Además, por el Metateorema 3.6 (i) sabemos que

$$\begin{aligned} & \vdash \bigwedge \overline{x_1} \cdots \overline{x_n} \in M \quad (\bar{\alpha} \leftrightarrow \overline{y_1} = \overline{x_1} \wedge \cdots \wedge \overline{y_n} = \overline{x_n}) \leftrightarrow \\ & \underbrace{\bigwedge \overline{x_1} \cdots \overline{x_n} (\overline{x_1} \in M \wedge \cdots \wedge \overline{x_n} \in M \rightarrow (\bar{\alpha} \leftrightarrow \overline{y_1} = \overline{x_1} \wedge \cdots \wedge \overline{y_n} = \overline{x_n}))}_{\beta}, \end{aligned}$$

luego utilizando el Teorema 2.11 junto a esta fórmula y la segunda en la equivalencia de (D.4) concluimos que (usando también (MBB) con (D.4))

$$\overline{\bigvee x_1 \cdots x_n \alpha \leftrightarrow} \bigvee \overline{y_1} \cdots \overline{y_n} (\overline{y_1} \in M \wedge \cdots \wedge \overline{y_n} \in M \wedge \beta). \quad (\text{D.5})$$

Por otra parte, si  $z_1, \dots, z_n$  son variables de  $\mathcal{L}_T$  distintas de  $\overline{y_1}, \dots, \overline{y_n}$  y que no está en  $\bigwedge \overline{x_1} \cdots \overline{x_n} (\overline{x_1} \in M \wedge \cdots \wedge \overline{x_n} \in M \wedge \bar{\alpha})$ , por el Teorema 2.9 3) tenemos que

$$\begin{aligned} & \overline{\bigvee \overline{x_1} \cdots \overline{x_n} (\overline{x_1} \in M \wedge \cdots \wedge \overline{x_n} \in M \wedge \bar{\alpha}) \leftrightarrow} \\ & \bigvee z_1 \cdots z_n \bigwedge \overline{x_1} \cdots \overline{x_n} \left( \underbrace{\overline{x_1} \in M \wedge \cdots \wedge \overline{x_n} \in M \wedge \bar{\alpha} \leftrightarrow z_1 = \overline{x_1} \wedge \cdots \wedge z_n = \overline{x_n}}_{\gamma} \right), \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

con lo que por (D.5) y (D.6) (junto a la regla (MBB)) basta ver que

$$\vdash \bigvee \overline{y_1} \cdots \overline{y_n} (\overline{y_1} \in M \wedge \cdots \wedge \overline{y_n} \in M \wedge \beta) \leftrightarrow \bigvee z_1 \cdots z_n \bigwedge \overline{x_1} \cdots \overline{x_n} \gamma \quad (\text{D.7})$$

para concluir la demostración.

Para ello, si denotamos por

$$\beta' \equiv \bigwedge \overline{x_1} \cdots \overline{x_n} (\overline{x_1} \in M \wedge \cdots \wedge \overline{x_n} \in M \rightarrow (\bar{\alpha} \leftrightarrow z_1 = \overline{x_1} \wedge \cdots \wedge z_n = \overline{x_n}))$$

tenemos la siguiente demostración de una de las implicaciones:

|                      |                                                                                                                                                                                                                            |                       |
|----------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| (1)                  | $\forall \overline{y_1} \cdots \overline{y_n} (\overline{y_1} \in M \wedge \cdots \wedge \overline{y_n} \in M \wedge \beta)$                                                                                               | Hipótesis             |
| (1 <sup>1</sup> )    | $S_{y_1}^{z_1} \forall \overline{y_2} \cdots \overline{y_n} (\overline{y_1} \in M \wedge \cdots \wedge \overline{y_n} \in M \wedge \beta)$                                                                                 | EP 1                  |
| (1 <sup>2</sup> )    | $\forall \overline{y_2} \cdots \overline{y_n} S_{y_1}^{z_1} (\overline{y_1} \in M \wedge \cdots \wedge \overline{y_n} \in M \wedge \beta)$                                                                                 | R 1 <sup>1</sup>      |
| (1 <sup>3</sup> )    | $S_{y_2}^{z_2} \forall \overline{y_3} \cdots \overline{y_n} S_{y_1}^{z_1} (\overline{y_1} \in M \wedge \cdots \wedge \overline{y_n} \in M \wedge \beta)$                                                                   | EP 1 <sup>2</sup>     |
| (1 <sup>4</sup> )    | $\forall \overline{y_3} \cdots \overline{y_n} S_{y_2}^{z_2} S_{y_1}^{z_1} (\overline{y_1} \in M \wedge \cdots \wedge \overline{y_n} \in M \wedge \beta)$                                                                   | R 1 <sup>3</sup>      |
| ...                  |                                                                                                                                                                                                                            |                       |
| (1 <sup>2n-1</sup> ) | $S_{y_n}^{z_n} \cdots S_{y_1}^{z_1} (\overline{y_1} \in M \wedge \cdots \wedge \overline{y_n} \in M \wedge \beta)$                                                                                                         | EP 1 <sup>2n-2</sup>  |
| (2)                  | $z_1 \in M \wedge \cdots \wedge z_n \in M \wedge \beta'$                                                                                                                                                                   | R 1 <sup>2n-1</sup>   |
| (3)                  | $\beta'$                                                                                                                                                                                                                   | EC 2                  |
| (4)                  | $\overline{x_1} \in M \wedge \cdots \wedge \overline{x_n} \in M \rightarrow$<br>$(\bar{\alpha} \leftrightarrow z_1 = \overline{x_1} \wedge \cdots \wedge z_n = \overline{x_n})$                                            | EG 3 ( $\times n$ )   |
| (5)                  | $\overline{x_1} \in M \wedge \cdots \wedge \overline{x_n} \in M \wedge \bar{\alpha}$                                                                                                                                       | Hipótesis             |
| (6)                  | $\bar{\alpha} \leftrightarrow z_1 = \overline{x_1} \wedge \cdots \wedge z_n = \overline{x_n}$                                                                                                                              | MP (EC 5), 4          |
| (7)                  | $z_1 = \overline{x_1} \wedge \cdots \wedge z_n = \overline{x_n}$                                                                                                                                                           | SE (EC 5), 6          |
| (8)                  | $\overline{x_1} \in M \wedge \cdots \wedge \overline{x_n} \in M \wedge \bar{\alpha} \rightarrow$<br>$z_1 = \overline{x_1} \wedge \cdots \wedge z_n = \overline{x_n}$                                                       | Tma. deducción        |
| (9)                  | $z_1 = \overline{x_1} \wedge \cdots \wedge z_n = \overline{x_n}$                                                                                                                                                           | Hipótesis             |
| (10)                 | $z_1 \in M \wedge \cdots \wedge z_n \in M$                                                                                                                                                                                 | EC 2                  |
| (11)                 | $\overline{x_1} \in M \wedge \cdots \wedge \overline{x_n} \in M$                                                                                                                                                           | EC, SI, ETI, IC 9, 10 |
| (12)                 | $\bar{\alpha} \leftrightarrow z_1 = \overline{x_1} \wedge \cdots \wedge z_n = \overline{x_n}$                                                                                                                              | MP 4, 11              |
| (13)                 | $\bar{\alpha}$                                                                                                                                                                                                             | SE 9, 12              |
| (14)                 | $\overline{x_1} \in M \wedge \cdots \wedge \overline{x_n} \in M \wedge \bar{\alpha}$                                                                                                                                       | IC 11, 13             |
| (15)                 | $z_1 = \overline{x_1} \wedge \cdots \wedge z_n = \overline{x_n} \rightarrow$<br>$\overline{x_1} \in M \wedge \cdots \wedge \overline{x_n} \in M \wedge \bar{\alpha}$                                                       | Tma. deducción        |
| (16)                 | $\overline{x_1} \in M \wedge \cdots \wedge \overline{x_n} \in M \wedge \bar{\alpha} \leftrightarrow$<br>$z_1 = \overline{x_1} \wedge \cdots \wedge z_n = \overline{x_n}$                                                   | IB 8, 15              |
| (17)                 | $\bigwedge \overline{x_1} \cdots \overline{x_n} \gamma$                                                                                                                                                                    | IG 16 ( $\times n$ )  |
| (18)                 | $\forall z_1 \cdots z_n \bigwedge \overline{x_1} \cdots \overline{x_n} \gamma$                                                                                                                                             | IP 17 ( $\times n$ )  |
| (19)                 | $\forall \overline{y_1} \cdots \overline{y_n} (\overline{y_1} \in M \wedge \cdots \wedge \overline{y_n} \in M \wedge \beta) \rightarrow$<br>$\forall z_1 \cdots z_n \bigwedge \overline{x_1} \cdots \overline{x_n} \gamma$ | Tma. deducción        |

En la demostración se ha tenido en cuenta:

- En cada línea de la forma (1<sup>2k-1</sup>) que  $z_k$  no está libre en ninguna línea anterior, pues es distinta de las demás  $z_j$  y claramente no está libre en  $\overline{y_1} \in M \wedge \cdots \wedge \overline{y_n} \in M \wedge \beta$ .
- En cada línea de la forma (1<sup>2k</sup>), como  $z_k$  es distinto de todo  $\overline{y_j}$ , por (1.37) podemos “pasar” la sustitución dentro de los demás particularizadores.
- En la línea 2, para realizar las sustituciones tenemos en cuenta que cada  $\overline{y_i}$  es distinto de cada  $z_j$  y usamos el Metateorema 1.21 para las sustituciones en las fórmulas  $\overline{y_j} \in M$ .  
También, para ver que las sustituciones en  $\beta$  realmente nos dan la fórmula  $\beta'$  observamos que como cada  $y_j$  es distinto de cada  $x_i$ , se tiene que cada  $\overline{y_j}$  es distinto de cada  $\overline{x_i}$  (por la definición de interpretación), y que cada  $\overline{y_j}$  no está libre en  $\bar{\alpha}$  al no estar  $y_j$  libre en  $\alpha$  (Metateorema D.4).
- En la línea 17 la generalización es válida pues  $\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}$  no están libres en (1) ni en ninguna línea de la forma (1<sup>k</sup>).

En efecto, para (1) tenemos que como cada  $y_j$  es distinto de cada  $x_i$ , entonces cada  $\overline{y_j}$  es distinto de cada  $\overline{x_i}$  (por la definición de interpretación), luego ningún  $\overline{x_i}$  está libre en ninguna de la fórmulas  $\overline{y_j} \in M$  (pues recordemos que  $x \in M$  tiene a  $x$  como única variable libre y, por tanto,  $\overline{y_j} \in M$  tiene a  $\overline{y_j}$  como única variable libre por el Teorema 1.13 3)). Claramente, ningún  $\overline{x_i}$  está libre en  $\beta$ .

Para cualquier línea de la forma  $(1^k)$  tenemos lo mismo, pues cada  $\overline{x_i}$  es distinto de cada  $z_j$  y, por lo dicho antes, ningún  $\overline{x_i}$  estará libre en  $\overline{y_1} \in M \wedge \cdots \wedge \overline{y_n} \in M \wedge \beta$ .

- En la línea 18 que  $z_1, \dots, z_n$  no están libres y, por tanto, es consecuencia de (1).

Por otra parte, para la otra implicación tenemos:

|                      |                                                                                                                                                                                                                                                         |                      |
|----------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|
| (1)                  | $\forall z_1 \cdots z_n \wedge \overline{x_1} \cdots \overline{x_n} \gamma$                                                                                                                                                                             | Hipótesis            |
| (1 <sup>1</sup> )    | $S_{z_1}^{\overline{y_1}} \forall z_2 \cdots z_n \wedge \overline{x_1} \cdots \overline{x_n} \gamma$                                                                                                                                                    | EP 1                 |
| (1 <sup>2</sup> )    | $\forall z_2 \cdots z_n S_{z_1}^{\overline{y_1}} \wedge \overline{x_1} \cdots \overline{x_n} \gamma$                                                                                                                                                    | R 1 <sup>1</sup>     |
| (1 <sup>3</sup> )    | $S_{z_2}^{\overline{y_2}} \forall z_3 \cdots z_n S_{z_1}^{\overline{y_1}} \wedge \overline{x_1} \cdots \overline{x_n} \gamma$                                                                                                                           | EP 1 <sup>2</sup>    |
| (1 <sup>4</sup> )    | $\forall z_3 \cdots z_n S_{z_2}^{\overline{y_2}} S_{z_1}^{\overline{y_1}} \wedge \overline{x_1} \cdots \overline{x_n} \gamma$                                                                                                                           | R 1 <sup>3</sup>     |
| ...                  |                                                                                                                                                                                                                                                         |                      |
| (1 <sup>2n-1</sup> ) | $S_{z_n}^{\overline{y_n}} \cdots S_{z_1}^{\overline{y_1}} \wedge \overline{x_1} \cdots \overline{x_n} \gamma$                                                                                                                                           | EP 1 <sup>2n-2</sup> |
| (2)                  | $\wedge \overline{x_1} \cdots \overline{x_n} (\overline{x_1} \in M \wedge \cdots \wedge \overline{x_n} \in M \wedge \overline{\alpha} \leftrightarrow \overline{y_1} = \overline{x_1} \wedge \cdots \wedge \overline{y_n} = \overline{x_n})$            | R 1 <sup>2n-1</sup>  |
| (3)                  | $\overline{y_1} \in M \wedge \cdots \wedge \overline{y_n} \in M \wedge S_{x_n}^{\overline{y_n}} \cdots S_{x_1}^{\overline{y_1}} \overline{\alpha} \leftrightarrow \overline{y_1} = \overline{x_1} \wedge \cdots \wedge \overline{y_n} = \overline{x_n}$ | EG 2 ( $\times n$ )  |
| (4)                  | $\overline{y_1} = \overline{x_1} \wedge \cdots \wedge \overline{y_n} = \overline{x_n}$                                                                                                                                                                  | I, IC                |
| (5)                  | $\overline{y_1} \in M \wedge \cdots \wedge \overline{y_n} \in M$                                                                                                                                                                                        | SE 3, 4, EC          |
| (6)                  | $\overline{x_1} \in M \wedge \cdots \wedge \overline{x_n} \in M \wedge \overline{\alpha} \leftrightarrow \overline{y_1} = \overline{x_1} \wedge \cdots \wedge \overline{y_n} = \overline{x_n}$                                                          | EG 2 ( $\times n$ )  |
| (7)                  | $\overline{x_1} \in M \wedge \cdots \wedge \overline{x_n} \in M$                                                                                                                                                                                        | Hipótesis            |
| (8)                  | $\overline{\alpha}$                                                                                                                                                                                                                                     | Hipótesis            |
| (9)                  | $\overline{y_1} = \overline{x_1} \wedge \cdots \wedge \overline{y_n} = \overline{x_n}$                                                                                                                                                                  | SE 6, (IC 7, 8)      |
| (10)                 | $\overline{\alpha} \rightarrow \overline{y_1} = \overline{x_1} \wedge \cdots \wedge \overline{y_n} = \overline{x_n}$                                                                                                                                    | Tma. deducción       |
| (11)                 | $\overline{y_1} = \overline{x_1} \wedge \cdots \wedge \overline{y_n} = \overline{x_n}$                                                                                                                                                                  | Hipótesis            |
| (12)                 | $\overline{\alpha}$                                                                                                                                                                                                                                     | EC (SE 6, 11)        |
| (13)                 | $\overline{y_1} = \overline{x_1} \wedge \cdots \wedge \overline{y_n} = \overline{x_n} \rightarrow \overline{\alpha}$                                                                                                                                    | Tma. deducción       |
| (14)                 | $\overline{\alpha} \leftrightarrow \overline{y_1} = \overline{x_1} \wedge \cdots \wedge \overline{y_n} = \overline{x_n}$                                                                                                                                | IB 10, 13            |
| (15)                 | $\overline{x_1} \in M \wedge \cdots \wedge \overline{x_n} \in M \rightarrow (\overline{\alpha} \leftrightarrow \overline{y_1} = \overline{x_1} \wedge \cdots \wedge \overline{y_n} = \overline{x_n})$                                                   | Tma. deducción       |
| (16)                 | $\beta$                                                                                                                                                                                                                                                 | IG 15 ( $\times n$ ) |
| (17)                 | $\overline{y_1} \in M \wedge \cdots \wedge \overline{y_n} \in M \wedge \beta$                                                                                                                                                                           | IC 5, 16             |
| (18)                 | $\forall \overline{y_1} \cdots \overline{y_n} (\overline{y_1} \in M \wedge \cdots \wedge \overline{y_n} \in M \wedge \beta)$                                                                                                                            | IP 17 ( $\times n$ ) |
| (19)                 | $\forall z_1 \cdots z_n \wedge \overline{x_1} \cdots \overline{x_n} \gamma \rightarrow \forall \overline{y_1} \cdots \overline{y_n} (\overline{y_1} \in M \wedge \cdots \wedge \overline{y_n} \in M \wedge \beta)$                                      | Tma. deducción       |

En la demostración se ha tenido en cuenta:

- En cada línea de la forma  $(1^{2k-1})$  que  $\overline{y_k}$  no está libre en ninguna línea anterior, ya que es distinta de las demás  $\overline{y_j}$  y no está libre en  $\wedge \overline{x_1} \cdots \overline{x_n} \gamma$ , pues cada  $z_i$  es distinto de todo  $\overline{y_j}$ , cada  $\overline{x_i}$  es distinto de que cada  $\overline{y_j}$  (al ser cada  $y_j$  es distinto de



cada  $x_i$  y tener en cuenta la definición de interpretación) y ningún  $\overline{y_i}$  está libre en  $\overline{\alpha}$ , ya que ningún  $y_i$  lo está en  $\alpha$  (Metateorema D.4).

- En cada línea de la forma  $(1^{2k})$ , como  $\overline{y_k}$  es distinto de todo  $z_j$ , por (1.37) podemos “pasar” la sustitución dentro de los demás particularizadores.
- En la línea 2, como cada  $z_i$  y cada  $\overline{y_i}$  es distinto de todo  $\overline{x_j}$ , por (1.36) podemos “pasar” cada sustitución dentro de los generalizadores “hasta llegar” a  $\gamma$ . La sustitución es entonces clara al no estar ningún  $z_i$  en ninguna fórmula de la forma  $\overline{x_j} \in M$  ni en  $\overline{\alpha}$ .
- En la línea 3 como cada  $\overline{x_i}$  es distinto de todo  $\overline{y_j}$ , por (1.36) podemos en cada eliminación de un generalizador “pasar” la sustitución dentro de los demás generalizadores.

También tenemos en cuenta que cada  $\overline{x_i}$  es distinto de cada  $\overline{y_j}$  y usamos el Metateorema 1.21 para las sustituciones en las fórmulas  $\overline{x_j} \in M$ .

- En la línea 16 la generalización es válida pues claramente  $\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}$  no están libres en (1) ni en ninguna línea de la forma  $(1^k)$ .
- En la línea 18 que  $\overline{y_1}, \dots, \overline{y_n}$  no están libres y, por tanto, es consecuencia de (1).

Utilizando la regla (IB) queda entonces probado (D.7) y con ello concluimos la prueba. 

Un primer resultado bastante inmediato sobre interpretaciones, pero que es útil en la práctica a la hora de ver si una teoría se interpreta en otra es el siguiente:

### Metateorema D.3

Sean  $\mathcal{L}_S$  y  $\mathcal{L}_T$  lenguajes formales,  $M$  una interpretación de  $\mathcal{L}_S$  en  $\mathcal{L}_T$ ,  $S$  es una teoría axiomática sobre  $\mathcal{L}_S$  y  $T, T'$  son dos teorías axiomáticas sobre  $\mathcal{L}_T$  de modo que todo axioma propio de  $T$  es un teorema de  $T'$ . Entonces, si  $S$  se interpreta en  $T$  a través de  $M$ , también se interpreta en  $T'$  a través de  $M$ .

Como todo axioma de  $T$  es un teorema de  $T'$ , por el Metateorema 2.1 tenemos que todos los teoremas de  $T$  son teoremas de  $T'$ . Así pues, como se cumplen los puntos del (I) al (IV) en la Definición D.1 para  $T$ , lo dicho nos garantiza que también se cumplen para  $T'$  y con ello que  $S$  se interpreta en  $T'$  a través de  $M$ . 

Antes de continuar con los resultados teóricos que justificarán que la definición dada cumple realmente lo que buscábamos, veamos un par de ejemplos para fijar las ideas.

Como hemos comentado al principio, un primer ejemplo natural que motiva la definición de interpretación es que en  $\mathbb{Z}^*$  podemos demostrar todos los axiomas de Peano, luego veamos que, en efecto, la aritmética de Peano (AP) se interpreta en  $\mathbb{Z}^*$ :

En primer lugar, veamos como se interpreta el lenguaje  $\mathcal{L}_a$  en  $\mathcal{L}_{tc}$ :

- (i) Para las variables basta simplemente considerar la identificación natural que a cada variable de índice  $i$  de  $\mathcal{L}_a$  le asigna la variable de índice  $i$  de  $\mathcal{L}_{tc}$ .
- (ii) El universo de la interpretación lo fijamos mediante la fórmula  $x \in \omega$  la cual puede comprobarse fácilmente que tiene a  $x$  como única variable libre. Además, como se

justifica al final del Capítulo 3 (ver **Nota 8** pág. 117), en cualquier teoría de conjuntos incluiremos como axioma semilógico la fórmula  $x|(x = x) = \emptyset$ , luego por el Teorema 3.27 1) (y la regla (ETI) aplicada junto a este axioma semilógico) queda claro que  $\vdash_{Z^*} x|(x = x) \in \omega$ .

(iii) Asignamos a la constante 0 de  $\mathcal{L}_a$  el designador<sup>3</sup>

$$\emptyset \equiv y|\bigwedge u u \notin y,$$

para el cual es claro por el Teorema 3.27 1) que  $\vdash_{Z^*} \emptyset \in \omega$ .

(iv) A los funtores de  $\mathcal{L}_a$  les asignamos:

- Al functor monádico  $S$  le asignamos el término (con una única variable libre)

$$x' \equiv x \cup \{x\},$$

para el cual el Teorema 3.27 2) nos garantiza que

$$\vdash_{Z^*} \bigwedge x \in \omega x' \in \omega.$$

- Al functor diádico  $+$  le asignamos el término (con solo dos variables libres)

$$x + y \equiv z|\chi(y, z, x)$$

definido al final de la Sección 3.3, para el cual por la propia definición se cumple que

$$\vdash_{Z^*} \bigwedge xy \in \omega x + y \in \omega.$$

- Al functor diádico  $\cdot$  le asignamos el término (con solo dos variables libres)

$$x \cdot y \equiv z|\alpha(y, z, \emptyset, x)$$

definido al final de la Sección 3.3 (ver **Nota 2** pág. 106), para el cual por la propia definición se cumple que

$$\vdash_{Z^*} \bigwedge xy \in \omega x \cdot y \in \omega.$$

(v) El único relator de  $\mathcal{L}_{tc}$  es el igualador y le asignamos la fórmula  $x = y$ .

Ahora, las traducciones de las clausuras de los axiomas de Peano son:

$$\begin{aligned} &(\overline{\text{AP1}}) \bigwedge \bar{x} \in \omega \bar{x}' \neq \emptyset \\ &(\overline{\text{AP2}}) \bigwedge \bar{x}\bar{y} \in \omega (\bar{x}' = \bar{y}' \rightarrow \bar{x} = \bar{y}) \end{aligned}$$

---

<sup>3</sup> Observemos que esto también nos permite demostrar en  $Z^*$  la traducción el axioma semilógico de AP (ver **Nota 3** pág. 117 y **Nota 4** pág. 117)  $x|x = x = 0$ . En efecto, tenemos que la traducción de dicho axioma será  $\bar{x} | (\bar{x} \in \omega \wedge \bar{x} = \bar{x}) = \emptyset$ , luego por (D.53) tenemos que  $\bar{x} | (\bar{x} = \bar{x}) = \emptyset$  y esto es justamente el teorema semilógico de  $Z^*$ .

$$\begin{aligned}
& (\overline{\text{AP3}}) \bigwedge \bar{x} \in \omega \bar{x} + \emptyset = \bar{x} \\
& (\overline{\text{AP4}}) \bigwedge \bar{x}\bar{y} \in \omega \left( \bar{x} + \bar{y}' = (\bar{x} + \bar{y})' \right) \\
& (\overline{\text{AP5}}) \bigwedge \bar{x} \in \omega \bar{x} \cdot \emptyset = \emptyset \\
& (\overline{\text{AP6}}) \bigwedge \bar{x}\bar{y} \in \omega \left( \bar{x} \cdot \bar{y}' = \bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{x} \right) \\
& (\overline{\text{AP7}}) \bigwedge \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_m \in \omega \left( \overline{\phi(0)} \wedge \bigwedge \bar{x} \in \omega \left( \bar{\phi} \rightarrow \overline{\phi(x')} \right) \rightarrow \bigwedge \bar{x} \in \omega \bar{\phi} \right)
\end{aligned}$$

donde  $\phi(x, x_1, \dots, x_m)$  es cualquier fórmula de  $\mathcal{L}_a$  con las variables libres indicadas.

Observamos entonces que los seis primeros puntos son teoremas de  $Z^*$  pues se corresponden con los puntos del 3) al 8) en el Teorema 3.27. Por otro lado, para el último axioma tenemos que utilizando el Metateorema D.5 (y el Teorema 2.11) se obtiene que es equivalente a

$$\bigwedge \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_m \in \omega \left( \bar{\phi}(\emptyset) \wedge \bigwedge \bar{x} \in \omega \left( \bar{\phi} \rightarrow \bar{\phi}(\bar{x}') \right) \rightarrow \bigwedge \bar{x} \in \omega \bar{\phi} \right),$$

y esta última fórmula es un teorema de  $Z^*$  pues no es más que la clausura (por el Meta-teorema D.4) de un caso particular del Teorema 3.27 9)<sup>4</sup>.

Esto prueba que, en efecto, AP se interpreta en  $Z^*$ . 

Otro ejemplo importante es, en cierto modo, un recíproco de lo visto, pues resulta que una teoría incluso más fuerte que  $Z^*$  como es ZF-AI se interpreta en AP (luego por el Metateorema D.3, también  $Z^*$  se interpreta en AP):

En primer lugar, veamos como se interpreta el lenguaje  $\mathcal{L}_{tc}$  en  $\mathcal{L}_a$ :

- (i) Para las variables basta simplemente considerar la identificación natural que a cada variable de índice  $i$  de  $\mathcal{L}_{tc}$  le asigna la variable de índice  $i$  de  $\mathcal{L}_a$ .
- (ii) El universo de la interpretación lo fijamos mediante la fórmula  $x \in M \equiv x = x$ , luego es inmediato que  $\vdash_{\text{AP}} x | (x = x) \in M$ .
- (iii) Como  $\mathcal{L}_{tc}$  no tiene constantes no hay nada que interpretar.
- (iv) Como  $\mathcal{L}_{tc}$  no tiene funtores no hay nada que interpretar.
- (v) Al igualador de  $\mathcal{L}_{tc}$  le asignamos la fórmula  $x = y$ , mientras que al relator diádico  $\in$ , le asignamos la fórmula  $x \in y$  dada en la Definición 5.46.

Observemos que con esta interpretación, si  $\alpha$  es una fórmula de  $\mathcal{L}_{tc}$  se cumple que

$$\vdash \overline{\bigwedge x_1 \cdots x_n \alpha} \leftrightarrow \bigwedge \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n \bar{\alpha}, \quad (\text{D.8})$$

$$\vdash \overline{\bigvee x_1 \cdots x_n \alpha} \leftrightarrow \bigvee \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n \bar{\alpha}. \quad (\text{D.9})$$

En efecto, tenemos que

$$\overline{\bigwedge x_1 \cdots x_n \alpha} \equiv \bigwedge \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n \bar{\alpha} \in M \bar{\alpha}$$

<sup>4</sup> De hecho, observemos que el Teorema 3.27 9) es más general que la traducción del axioma de inducción de AP, pues este último es solo válido para las traducciones de fórmulas de  $\mathcal{L}_a$ , mientras que el Teorema 3.27 9) es válido para toda fórmula de  $\mathcal{L}_{tc}$ .

y por el Metateorema 3.6 (i) será equivalente a la fórmula

$$\bigwedge \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n (\bar{x}_1 = \bar{x}_1 \wedge \cdots \wedge \bar{x}_n = \bar{x}_n \rightarrow \bar{\alpha})$$

que claramente es equivalente a  $\bigwedge \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n \bar{\alpha}$ .

El caso del particularizador es análogo sin más que utilizar la equivalencia dada por el Metateorema D.2 (iv).

Así pues, utilizando (D.8), (D.9), los Metateoremas D.4 y D.5 y el Teorema 2.11 se obtiene que las traducciones de las clausuras de los axiomas de ZF-AI son equivalentes a las siguientes fórmulas<sup>5</sup>:

|                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Extensionalidad</b> | $\bigwedge \bar{x} \bar{y} (\bigwedge \bar{u} (\bar{u} \in \bar{x} \leftrightarrow \bar{u} \in \bar{y}) \rightarrow \bar{x} = \bar{y})$                                                                                                                                                                                             |
| <b>Par</b>             | $\bigwedge \bar{x} \bar{y} \bigvee \bar{z} \bigwedge \bar{u} (\bar{u} \in \bar{z} \leftrightarrow \bar{u} = \bar{x} \vee \bar{u} = \bar{y})$                                                                                                                                                                                        |
| <b>Unión</b>           | $\bigwedge \bar{x} \bigvee \bar{y} \bigwedge \bar{u} (\bar{u} \in \bar{y} \leftrightarrow \bigvee \bar{v} (\bar{u} \in \bar{v} \wedge \bar{v} \in \bar{x}))$                                                                                                                                                                        |
| <b>Reemplazo</b>       | $\bigwedge \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_m \bar{x} \bar{y} \bar{z} (\bar{\phi}(\bar{x}, \bar{y}) \wedge \bar{\phi}(\bar{x}, \bar{z}) \rightarrow \bar{y} = \bar{z}) \rightarrow$<br>$\bigwedge \bar{a} \bigvee \bar{b} \bigwedge \bar{y} (\bar{y} \in \bar{b} \leftrightarrow \bigvee \bar{x} \in \bar{a} \bar{\phi}(\bar{x}, \bar{y}))$ |
| <b>Partes</b>          | $\bigwedge \bar{x} \bigvee \bar{y} \bigwedge \bar{u} (\bar{u} \in \bar{y} \leftrightarrow \bigwedge \bar{v} (\bar{v} \in \bar{u} \rightarrow \bar{v} \in \bar{x}))$                                                                                                                                                                 |
| <b>Regularidad</b>     | $\bigwedge \bar{x} (\bigvee \bar{y} \bar{y} \in \bar{x} \rightarrow \bigvee \bar{y} (\bar{y} \in \bar{x} \wedge \neg \bigvee \bar{u} (\bar{u} \in \bar{y} \wedge \bar{u} \in \bar{x})))$                                                                                                                                            |

donde  $\phi(x, y, x_1, \dots, x_m)$  es cualquier fórmula de  $\mathcal{L}_{tc}$  con las variables libres indicadas.

Como el Teorema 5.56 nos garantiza que todas estas fórmulas son teoremas de AP concluimos que, en efecto, ZF-AI se interpreta en AP. 

Retomamos ahora nuestro objetivo principal: demostrar que si  $S$  se interpreta en otra teoría  $T$ , entonces las traducciones de los teoremas de  $S$  son teoremas de  $T$ . Es decir, que todo lo que podamos demostrar en  $S$  también lo podremos demostrar en  $T$  al interpretar los símbolos de  $S$  en esta teoría.

Para demostrarlo necesitaremos previamente de un par de resultados técnicos que ya hemos utilizado a lo largo del anexo.

#### Metateorema D.4

En las condiciones de la Definición D.1 se tiene que si  $\theta$  es una expresión de  $\mathcal{L}_S$ , entonces una variable  $x$  está libre en  $\theta$  si, y solo si,  $\bar{x}$  está libre en  $\bar{\theta}$ . Además, las únicas variables libres de  $\bar{\theta}$  son las traducciones de las variables libres de  $\theta$ .

Por tanto, si  $x_1, \dots, x_n$  son las variables libres de  $\theta$ , se tiene que  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$  son las variables libres de  $\bar{\theta}$ .

Demostraremos la primera afirmación por inducción en la longitud de  $\theta$ :

- Si  $\theta \equiv x_i$ , entonces  $\bar{\theta} \equiv \bar{x}_i$ .

<sup>5</sup> Observemos que por lo dicho la traducción del axioma semilógico de  $Z^*$  (ver Nota 8 pág. 117 y Nota 9 pág. 117)  $x|(x = x) = \emptyset$  es  $\bar{x}|(\bar{x} = \bar{x}) = \bar{\emptyset}$ . En AP se prueba que  $\bar{\emptyset} = 0$  [Teorema 5.47 2)] y como el teorema semilógico de AP nos dice que  $\bar{x}|(\bar{x} = \bar{x}) = 0$ , tenemos que en AP podemos probar la traducción de este axioma semilógico de  $Z^*$ .

Así, si  $x$  está libre en  $\theta$ , entonces  $x \equiv x_i$  y con ello  $\bar{x} \equiv \bar{x}_i$ , luego claramente  $\bar{x}$  está libre en  $\bar{\theta}$ .

Recíprocamente, si  $\bar{x}$  libre en  $\bar{\theta}$ , entonces  $\bar{x} \equiv \bar{x}_i$  y esto implica que  $x \equiv x_i$  (pues por la definición de interpretación variables distintas se traducen en variables distintas), luego que  $x$  está libre en  $\theta$ .

- Si  $\theta \equiv c_i$ , entonces  $\bar{\theta} \equiv \bar{c}_i$  un designador. Por tanto, ni  $\theta$  ni  $\bar{\theta}$  tienen variables libres y el resultado es trivialmente cierto.
- Si  $\theta \equiv R_i^n t_1 \cdots t_n$ , entonces  $\bar{\theta} \equiv \bar{R}_i^n(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n)$  siendo  $\bar{R}_i^n(x_1, \dots, x_n)$  una fórmula con las variables libres indicadas. Es decir,

$$\bar{\theta} \equiv \bar{R}_i^n(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n) \equiv S_{z_1}^{\bar{t}_1} \cdots S_{z_n}^{\bar{t}_n} S_{x_1}^{z_1} \cdots S_{x_n}^{z_n} \bar{R}_i^n$$

siendo  $z_1, \dots, z_n$  las variables de menor índice que no están en  $\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n$  ni en  $\bar{R}_i^n$  y que son distintas de  $x_1, \dots, x_n$ .

Así pues, si  $x$  está libre en  $\theta$ , tenemos que estará libre en algún  $t_i$ , luego por hipótesis de inducción  $\bar{x}$  está libre en  $\bar{t}_i$ . Esto implica que  $\bar{x}$  es distinto de cada  $z_j$  (pues ningún  $z_j$  está en  $\bar{t}_i$ ), con lo que basta ver que  $\bar{x}$  está libre en  $S_{z_i}^{\bar{t}_i} \cdots S_{z_n}^{\bar{t}_n} S_{x_1}^{z_1} \cdots S_{x_n}^{z_n} \bar{R}_i^n$ , pues aplicando repetidas veces el Teorema 1.13 3) se obtiene que entonces lo está  $\bar{\theta}$ . Como  $\bar{x}$  está libre en  $\bar{t}_i$ , usando de nuevo el Teorema 1.13 3), basta ver que  $z_i$  está libre en  $S_{z_{i+1}}^{\bar{t}_{i+1}} \cdots S_{z_n}^{\bar{t}_n} S_{x_1}^{z_1} \cdots S_{x_n}^{z_n} \bar{R}_i^n$ . Aplicando nuevamente el Teorema 1.13 3) se tiene que como  $z_i$  es distinto de  $z_{i+1}, \dots, z_n$ , de cada  $x_j$  y no está en ningún  $\bar{t}_j$ , basta ver que  $z_i$  está libre en  $S_{x_i}^{z_i} \cdots S_{x_n}^{z_n} \bar{R}_i^n$  y, de nuevo por el Teorema 1.13 3), para ver esto basta ver que  $x_i$  está libre en  $S_{x_{i+1}}^{z_{i+1}} \cdots S_{x_n}^{z_n} \bar{R}_i^n$ . Utilizando una última vez el famoso teorema concluimos que, en efecto,  $x_i$  está libre en la fórmula anterior pues es distinto de cada  $x_{i+1}, \dots, x_n$  y está libre en  $\bar{R}_i^n$ .

Recíprocamente, si  $\bar{x}$  está libre en  $\bar{\theta}$ , entonces (por el Teorema 1.13 3)) o bien está libre en  $S_{z_2}^{\bar{t}_2} \cdots S_{z_n}^{\bar{t}_n} S_{x_1}^{z_1} \cdots S_{x_n}^{z_n} \bar{R}_i^n$ , o bien está libre en  $\bar{t}_1$ . En el segundo caso tenemos que, por hipótesis de inducción,  $x$  estará libre en  $t_1$  y con ello que  $x$  está libre en  $\theta$ . Si se da el primer caso, nuevamente tenemos una subdivisión en casos, o bien  $\bar{x}$  está libre en  $S_{z_3}^{\bar{t}_3} \cdots S_{z_n}^{\bar{t}_n} S_{x_1}^{z_1} \cdots S_{x_n}^{z_n} \bar{R}_i^n$ , o bien está libre en  $\bar{t}_2$  y como antes esto implica que  $x$  está libre en  $t_2$ , luego en  $\theta$ . Continuando este proceso obtenemos que o bien  $\bar{x}$  está libre en alguno de los términos  $\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n$  y la hipótesis de inducción nos da que  $x$  está libre en  $\theta$ , o bien  $\bar{x}$  está libre en  $S_{x_1}^{z_1} \cdots S_{x_n}^{z_n} \bar{R}_i^n$ . Si se diera este último caso, tendríamos que  $\bar{x}$  es alguna de las variables  $z_i$ , pues son las únicas variables libres de  $S_{x_1}^{z_1} \cdots S_{x_n}^{z_n} \bar{R}_i^n$ <sup>6</sup>, pero entonces se tendría que  $z_i$  está libre en  $\bar{\theta}$  y como no está en ningún  $\bar{t}_j$ , el Teorema 1.13 3) nos dice que debería ser distinto del resto de  $z_j$ , incluido  $z_i$ , lo cual claramente es imposible. Así pues, este último caso no puede darse y concluimos con que, en efecto,  $x$  está libre en  $\theta$ .

- Si  $\theta \equiv f_i^n t_1 \cdots t_n$  es análogo al caso anterior.

<sup>6</sup> En efecto, (usando el Teorema 1.13 3)) para ver que  $z_i$  está libre en  $S_{x_1}^{z_1} \cdots S_{x_n}^{z_n} \bar{R}_i^n$ , por ser distinta de cada  $x_j$  basta ver que está libre en  $S_{x_i}^{z_i} \cdots S_{x_n}^{z_n} \bar{R}_i^n$ . A su vez, esto ocurre si  $x_i$  está libre en  $S_{x_{i+1}}^{z_{i+1}} \cdots S_{x_n}^{z_n} \bar{R}_i^n$  y esto se da pues  $x_i$  es distinta de  $x_{i+1}, \dots, x_n$  y está libre en  $\bar{R}_i^n$ . Recíprocamente, si  $y$  estuviera libre en  $S_{x_1}^{z_1} \cdots S_{x_n}^{z_n} \bar{R}_i^n$  y fuera distinta de cada  $z_i$ , por el Teorema 1.13 3) se tendría que debe ser distinta de cada  $x_i$  y estar libre en  $\bar{R}_i^n$ , lo cual es imposible.

- Si  $\theta \equiv \neg\alpha$ , entonces  $\bar{\theta} \equiv \neg\bar{\alpha}$ .

Así, si  $x$  está libre en  $\theta$ , entonces lo está en  $\alpha$  y, por hipótesis de inducción,  $\bar{x}$  está libre en  $\bar{\alpha}$ , luego en  $\bar{\theta}$ .

El recíproco es análogo.

- Si  $\theta \equiv \alpha \rightarrow \beta$ , entonces  $\bar{\theta} \equiv \bar{\alpha} \rightarrow \bar{\beta}$ .

Así, si  $x$  está libre en  $\theta$ , entonces lo está en  $\alpha$  o en  $\beta$ , luego por hipótesis de inducción  $\bar{x}$  está libre en  $\bar{\alpha}$  o en  $\bar{\beta}$  y, en cualquier caso, lo está en  $\bar{\theta}$ .

El recíproco es análogo.

- Si  $\theta \equiv \bigwedge x_i \alpha$ , entonces  $\bar{\theta} \equiv \bigwedge \bar{x}_i (\bar{x}_i \in M \rightarrow \bar{\alpha})$ .

Así, si  $x$  está libre en  $\theta$ , tenemos que  $x$  es distinto de  $x_i$ , luego por definición de interpretación  $\bar{x}$  es distinto de  $\bar{x}_i$ , y  $x$  está libre en  $\alpha$ . Por hipótesis de inducción tenemos entonces que  $\bar{x}$  está libre en  $\bar{\alpha}$ , luego lo está en  $\bar{x}_i \in M \rightarrow \bar{\alpha}$  y como ya hemos dicho que  $\bar{x} \neq \bar{x}_i$ , obtenemos que  $\bar{x}$  está libre en  $\bar{\theta}$ .

Recíprocamente, si  $\bar{x}$  está libre en  $\bar{\theta}$  tenemos que  $\bar{x} \neq \bar{x}_i$ , luego  $x \neq x_i$ , y que está libre en  $\bar{x}_i \in M \rightarrow \bar{\alpha}$ . Como la única variable libre de  $x \in M$  es  $x$ , tenemos (por el Teorema 1.13 3)) que la única variable libre de  $\bar{x}_i \in M$  es  $\bar{x}_i$ , luego al ser  $\bar{x}_i \neq \bar{x}$  se tiene que  $\bar{x}$  no está libre en  $\bar{x}_i \in M$ . Esto implica que  $\bar{x}$  está libre en  $\bar{\alpha}$  y por hipótesis de inducción que  $x$  está libre en  $\alpha$ . Como  $x \neq x_i$  y está libre en  $\alpha$ , obtenemos que  $x$  está libre en  $\theta$ .

- Si  $\theta \equiv x_i | \alpha$  se ve de forma análoga al caso anterior.

Esto concluye la inducción y con ello esta parte de la demostración.

Probaremos la otra afirmación también por inducción en la longitud de  $\theta$ :

- Si  $\theta \equiv x_i$  e  $y$  es una variable libre de  $\bar{\theta}$ , entonces  $y \equiv \bar{x}_i$ , luego en efecto es la traducción de una variable libre de  $\theta$ .
- Si  $\theta \equiv c_i$ , entonces  $\bar{\theta}$  es un designador, luego ni  $\theta$  ni  $\bar{\theta}$  tienen variables libres y el resultado es trivialmente cierto.
- Si  $\theta \equiv R_i^n t_1 \cdots t_n$ , entonces  $\bar{\theta} \equiv \bar{R}_i^n(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n)$  siendo  $\bar{R}_i^n(x_1, \dots, x_n)$  una fórmula con las variables libres indicadas. Es decir,

$$\bar{\theta} \equiv \bar{R}_i^n(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n) \equiv S_{z_1}^{\bar{t}_1} \cdots S_{z_n}^{\bar{t}_n} S_{x_1}^{z_1} \cdots S_{x_n}^{z_n} \bar{R}_i^n$$

siendo  $z_1, \dots, z_n$  las variables de menor índice que no están en  $\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n$  ni en  $\bar{R}_i^n$  y que son distintas de  $x_1, \dots, x_n$ .

Así pues, si  $y$  está libre en  $\bar{\theta}$ , entonces por el Teorema 1.13 3), o bien está libre en algún  $\bar{t}_i$  o bien  $y$  está libre en  $S_{x_1}^{z_1} \cdots S_{x_n}^{z_n} \bar{R}_i^n$ . Si se da el último caso, por la nota al pie 6, tenemos que  $y \equiv z_i$  para algún  $i = 1, \dots, n$ , pero como  $y$  está libre en  $\bar{\theta}$  y  $z_i$  no está en ningún  $\bar{t}_j$ , aplicando otra vez el Teorema 1.13 3), tendríamos que  $y$  debe ser distinto de cada  $z_j$  lo que nos lleva a una contradicción. Por tanto,  $y$  tiene que estar libre en algún  $\bar{t}_i$ , con lo que por hipótesis de inducción tiene que ser la traducción de alguna variable libre de  $t_i$ , luego de alguna variable libre de  $\theta$ .

- Si  $\theta \equiv f_i^n t_1 \cdots t_n$  es análogo al caso anterior.
- Si  $\theta \equiv \neg \alpha$  e  $y$  está libre en  $\bar{\theta}$ , entonces está libre en  $\bar{\alpha}$ , con lo que por hipótesis de inducción es la traducción de alguna variable libre de  $\alpha$ , luego de alguna variable libre de  $\theta$ .
- Si  $\theta \equiv \alpha \rightarrow \beta$  e  $y$  está libre en  $\bar{\theta}$ , entonces está libre en  $\bar{\alpha}$  o en  $\bar{\beta}$ , con lo que por hipótesis de inducción es la traducción de alguna variable libre de  $\alpha$  o de  $\beta$ , luego de alguna variable libre de  $\theta$ .
- Si  $\theta \equiv \bigwedge x_i \alpha$  e  $y$  está libre en  $\bar{\theta}$ , entonces es distinta de  $\bar{x}_i$  y está libre en  $\bar{\alpha}$ , con lo que por hipótesis de inducción es la traducción de alguna variable libre de  $\alpha$  distinta de  $x_i$  (por ser  $y \neq \bar{x}_i$ ), luego de alguna variable libre de  $\theta$ .
- Si  $\theta \equiv x_i | \alpha$  es análogo al caso anterior.

Esto concluye la inducción y con ello la demostración de la segunda afirmación.

Finalmente, observemos que si  $x_1, \dots, x_n$  son las variable libres de  $\theta$ , sabemos por la primera afirmación que  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$  son variables libres de  $\bar{\theta}$ . Además, si  $y$  es una variable libre de  $\bar{\theta}$ , por la segunda afirmación existe una variable  $x$  de  $\mathcal{L}_S$  tal que  $y \equiv \bar{x}$ , luego  $\bar{x}$  está libre en  $\bar{\theta}$  y por la primera afirmación  $x$  está libre en  $\theta$ , es decir,  $x$  es alguna de las variables  $x_i$  y con ello  $y$  es alguna de las variables  $\bar{x}_i$ .

Esto prueba que, en efecto, las variables libres de  $\theta$  son  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$  y con ello damos por finalizada la prueba. 

### Metateorema D.5

En las condiciones de la Definición D.1 se tiene que si  $\theta$  es una expresión de  $\mathcal{L}_S$ ,  $s_1, \dots, s_m$  términos e  $y_1, \dots, y_m$  variables cualesquiera, entonces

$$\vdash \overline{S_{y_1}^{s_1} \cdots S_{y_m}^{s_m} \theta} \leftrightarrow \overline{S_{y_1}^{s_1} \cdots S_{y_m}^{s_m}} \bar{\theta}$$

si  $\theta$  es una fórmula y

$$\vdash \overline{S_{y_1}^{s_1} \cdots S_{y_m}^{s_m} \theta} = \overline{S_{y_1}^{s_1} \cdots S_{y_m}^{s_m}} \bar{\theta}$$

si  $\theta$  es un término.

En particular, si  $t_1, \dots, t_n$  son términos se cumple que<sup>a</sup>

$$\vdash \overline{\theta(t_1, \dots, t_n)} \leftrightarrow \bar{\theta}(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n),$$

y si  $\theta$  es un término

$$\vdash \overline{\theta(t_1, \dots, t_n)} = \bar{\theta}(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n).$$

<sup>a</sup> Entendemos las sustituciones respecto de la expresiones  $\theta(x_1, \dots, x_n)$  y  $\bar{\theta}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ .

Veamos en primer lugar que para cualquier término  $t$  y cualquier variable  $x$  se tiene que

$$\vdash \overline{S_x^t \theta} \leftrightarrow S_x^{\bar{t}} \bar{\theta} \quad (\text{D.10})$$

si  $\theta$  es una fórmula y

$$\vdash \overline{S_x^t \theta} = S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\theta} \quad (\text{D.11})$$

si  $\theta$  es un término.

Lo demostraremos por inducción en la longitud de  $\theta$ :

- Si  $\theta \equiv x_i$  tenemos dos opciones:

- Si  $\theta \equiv x$ , entonces  $\bar{\theta} \equiv \bar{x}$  y tenemos que

$$\overline{S_x^t \theta} \equiv \bar{t} \equiv S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\theta}.$$

- Si  $\theta \not\equiv x$ , entonces por la definición de interpretación se tiene que  $\bar{\theta} \equiv \bar{x}_i \not\equiv \bar{x}$  y obtenemos que

$$\overline{S_x^t \theta} \equiv \bar{x}_i \equiv S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\theta}.$$

En cualquier caso se tiene lo deseado.

- Si  $\theta \equiv c_i$ , entonces  $\bar{\theta}$  es un designador y por el Teorema 1.13 2) es claro que

$$\overline{S_x^t \theta} \equiv \bar{\theta} \equiv S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\theta}.$$

- Si  $\theta \equiv R_i^n t_1 \cdots t_n$ , entonces  $\bar{\theta} \equiv \overline{R_i^n}(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n)$  y por hipótesis de inducción se tiene que para cada  $i = 1, \dots, n$

$$\vdash \overline{S_x^t t_i} = S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{t}_i. \quad (\text{D.12})$$

Por tanto, como

$$\overline{S_x^t \theta} \equiv \overline{R_i^n S_x^t t_1 \cdots S_x^t t_n} \equiv \overline{R_i^n}(\overline{S_x^t t_1}, \dots, \overline{S_x^t t_n}),$$

utilizando el Metateorema 2.18 junto a (D.12) obtenemos que

$$\vdash \overline{S_x^t \theta} \leftrightarrow \overline{R_i^n}(\overline{S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{t}_1}, \dots, \overline{S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{t}_n}). \quad (\text{D.13})$$

Por otra parte, por el Metateorema 1.21 tenemos que

$$\vdash S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\theta} \leftrightarrow \overline{R_i^n}(\overline{S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{t}_1}, \dots, \overline{S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{t}_n}). \quad (\text{D.14})$$

Utilizando la regla (MBB) con (D.13) y (D.14) concluimos.

- Si  $\theta \equiv f_i^n t_1 \cdots t_n$  es análogo al caso anterior.
- Si  $\theta \equiv \neg \alpha$ , por hipótesis de inducción tenemos que

$$\vdash \overline{S_x^t \alpha} \leftrightarrow S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\alpha},$$

luego por el Teorema 2.11 1) obtenemos que

$$\vdash \neg \overline{S_x^t \alpha} \leftrightarrow \neg S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\alpha}. \quad (\text{D.15})$$

Ahora bien, se tiene que

$$\overline{S_x^t \theta} \equiv \neg \overline{S_x^t \alpha}$$

y

$$S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\theta} \equiv \neg S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\alpha},$$

con lo que (D.15) prueba lo deseado.



- Si  $\theta \equiv \alpha \rightarrow \beta$ , por hipótesis de inducción tenemos que

$$\vdash \overline{S_x^t \alpha} \leftrightarrow S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\alpha}$$

y

$$\vdash \overline{S_x^t \beta} \leftrightarrow S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\beta},$$

luego por el Teorema 2.11 2) obtenemos que

$$\vdash \left( \overline{S_x^t \alpha} \rightarrow \overline{S_x^t \beta} \right) \leftrightarrow \left( S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\alpha} \rightarrow S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\beta} \right). \quad (\text{D.16})$$

Ahora bien, se tiene que

$$\overline{S_x^t \theta} \equiv \overline{S_x^t \alpha} \rightarrow \overline{S_x^t \beta}$$

y

$$S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\theta} \equiv S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\alpha} \rightarrow S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\beta},$$

con lo que (D.16) prueba lo deseado.

- Si  $\theta \equiv \bigwedge x_i \alpha$  distinguimos tres casos:

- Si  $x$  no está libre en  $\theta$ , entonces por el Metateorema D.4 tenemos que  $\bar{x}$  no está libre en  $\bar{\theta}$  y por el Teorema 1.13 2) obtenemos que

$$\overline{S_x^t \theta} \equiv \bar{\theta} \equiv S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\theta}.$$

- Si  $x$  está libre en  $\theta$  y  $x_i$  no está libre en  $t$ , por el Metateorema D.4 tenemos que  $\bar{x}$  está libre en  $\bar{\theta}$  y  $\bar{x}_i$  no está libre en  $\bar{t}$ . En particular tenemos entonces que  $x \not\equiv x_i$  y, por la definición de interpretación,  $\bar{x} \not\equiv \bar{x}_i$ , luego tenemos que

$$\overline{S_x^t \theta} \equiv \overline{\bigwedge x_i S_x^t \alpha} \equiv \bigwedge \bar{x}_i \left( \bar{x}_i \in M \rightarrow \overline{S_x^t \alpha} \right) \quad (\text{D.17})$$

y

$$S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\theta} \equiv S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bigwedge \bar{x}_i \left( \bar{x}_i \in M \rightarrow \bar{\alpha} \right) \equiv \bigwedge \bar{x}_i \left( \bar{x}_i \in M \rightarrow S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\alpha} \right). \quad (\text{D.18})$$

Por otra parte, por hipótesis de inducción tenemos que

$$\vdash \overline{S_x^t \alpha} \leftrightarrow S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\alpha},$$

luego por el Teorema 2.11 2) (junto al Teorema 2.7) obtenemos que

$$\vdash \left( \bar{x}_i \in M \rightarrow \overline{S_x^t \alpha} \right) \leftrightarrow \left( \bar{x}_i \in M \rightarrow S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\alpha} \right). \quad (\text{D.19})$$

Aplicando entonces el Metateorema 2.10 a (D.19) y teniendo en cuenta (D.17) y (D.18) obtenemos lo deseado.

- Si  $x$  está libre en  $\theta$  y  $x_i$  está libre en  $t$ , tenemos que

$$\overline{S_x^t \theta} \equiv \overline{\bigwedge z S_x^t S_{x_i}^z \alpha} \equiv \bigwedge \bar{z} \left( \bar{z} \in M \rightarrow \overline{S_x^t S_{x_i}^z \alpha} \right) \quad (\text{D.20})$$

donde  $z$  es la variable de menor índice que no está en  $\theta$  ni en  $t$ . Además, por el Metateorema D.4 tenemos que  $\bar{x}$  está libre en  $\bar{\theta}$ ,  $\bar{x}_i$  está libre en  $\bar{t}$  y  $\bar{z}$  no

está libre en  $\bar{\theta}$  ni en  $\bar{t}$ . Teniendo en cuenta que  $\bar{\theta} \equiv \bigwedge \bar{x}_i (\bar{x}_i \in M \rightarrow \bar{\alpha})$ , por el Metateorema 1.9 obtenemos que

$$\vdash S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\theta} \leftrightarrow \bigwedge \bar{z} S_{\bar{x}}^{\bar{t}} S_{\bar{x}_i}^{\bar{z}} (\bar{x}_i \in M \rightarrow \bar{\alpha}),$$

luego que

$$\vdash S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\theta} \leftrightarrow \bigwedge \bar{z} (\bar{z} \in M \rightarrow S_{\bar{x}}^{\bar{t}} S_{\bar{x}_i}^{\bar{z}} \bar{\alpha}). \quad (\text{D.21})$$

Por otra parte, la hipótesis de inducción aplicada a  $S_{x_i}^z \alpha$  (que tiene la misma longitud de que  $\alpha$  por el Metateorema 1.6) nos da que

$$\vdash \overline{S_x^t S_{x_i}^z \alpha} \leftrightarrow S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \overline{S_{x_i}^z \alpha}, \quad (\text{D.22})$$

y aplicándola a  $\alpha$  obtenemos que

$$\vdash \overline{S_{x_i}^z \alpha} \leftrightarrow S_{\bar{x}_i}^{\bar{z}} \bar{\alpha},$$

luego por el Metateorema 1.18 se tiene que

$$\vdash S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \overline{S_{x_i}^z \alpha} \leftrightarrow S_{\bar{x}}^{\bar{t}} S_{\bar{x}_i}^{\bar{z}} \bar{\alpha}. \quad (\text{D.23})$$

Usando entonces la regla (MBB) con (D.22) y (D.23) concluimos que

$$\vdash \overline{S_x^t S_{x_i}^z \alpha} \leftrightarrow S_{\bar{x}}^{\bar{t}} S_{\bar{x}_i}^{\bar{z}} \bar{\alpha}. \quad (\text{D.24})$$

Por el Teorema 2.11 se obtiene finalmente que

$$\vdash \bigwedge \bar{z} (\bar{z} \in M \rightarrow \overline{S_x^t S_{x_i}^z \alpha}) \leftrightarrow \bigwedge \bar{z} (\bar{z} \in M \rightarrow S_{\bar{x}}^{\bar{t}} S_{\bar{x}_i}^{\bar{z}} \bar{\alpha})$$

y por (D.20) y (D.21) concluimos con lo deseado.

■ Si  $\theta \equiv x_i | \alpha$  distinguimos tres casos:

- Si  $x$  no está libre en  $\theta$ , entonces por el Metateorema D.4 tenemos que  $\bar{x}$  no está libre en  $\bar{\theta}$  y por el Teorema 1.13 2) obtenemos que

$$\overline{S_x^t \theta} \equiv \bar{\theta} \equiv S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\theta}.$$

- Si  $x$  está libre en  $\theta$  y  $x_i$  no está libre en  $t$ , por el Metateorema D.4 tenemos que  $\bar{x}$  está libre en  $\bar{\theta}$  y  $\bar{x}_i$  no está libre en  $\bar{t}$ . En particular tenemos entonces que  $x \not\equiv x_i$  y, por la definición de interpretación,  $\bar{x} \not\equiv \bar{x}_i$ , luego tenemos que

$$\overline{S_x^t \theta} \equiv \overline{x_i | S_x^t \alpha} \equiv \bar{x}_i | (\bar{x}_i \in M \wedge \overline{S_x^t \alpha}) \quad (\text{D.25})$$

y

$$S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\theta} \equiv S_{\bar{x}}^{\bar{t}} (\bar{x}_i | (\bar{x}_i \in M \wedge \bar{\alpha})) \equiv \bar{x}_i | (\bar{x}_i \in M \wedge S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\alpha}). \quad (\text{D.26})$$

Por otra parte, por hipótesis de inducción tenemos que

$$\vdash \overline{S_x^t \alpha} \leftrightarrow S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\alpha},$$

luego por el Teorema 2.11 4) (junto al Teorema 2.7) obtenemos que

$$\vdash (\bar{x}_i \in M \wedge \overline{S_x^t \alpha}) \leftrightarrow (\bar{x}_i \in M \wedge S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\alpha}). \quad (\text{D.27})$$

Aplicando entonces la regla (MP) al Teorema 3.31 y a (D.27) (tras aplicarle (IG)) y teniendo en cuenta (D.25) y (D.26) obtenemos lo deseado.

- Si  $x$  está libre en  $\theta$  y  $x_i$  está libre en  $t$ , tenemos que

$$\overline{S_x^t \theta} \equiv z \left| \overline{S_x^t S_{x_i}^z \alpha} \equiv \bar{z} \right| \left( \bar{z} \in M \wedge \overline{S_x^t S_{x_i}^z \alpha} \right) \quad (\text{D.28})$$

donde  $z$  es la variable de menor índice que no está en  $\theta$  ni en  $t$ . Además, por el Metateorema D.4 tenemos que  $\bar{x}$  está libre en  $\bar{\theta}$ ,  $\bar{x}_i$  está libre en  $\bar{t}$  y  $\bar{z}$  no está libre en  $\bar{\theta}$  ni en  $\bar{t}$ . Teniendo en cuenta que  $\bar{\theta} \equiv \bar{x}_i | (\bar{x}_i \in M \wedge \bar{\alpha})$ , por el Metateorema 1.9 obtenemos que

$$\vdash S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\theta} = \bar{z} \left| S_{\bar{x}}^{\bar{t}} S_{\bar{x}_i}^{\bar{z}} (\bar{x}_i \in M \wedge \bar{\alpha}) \right|,$$

luego que

$$\vdash S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\theta} = \bar{z} \left| \left( \bar{z} \in M \wedge S_{\bar{x}}^{\bar{t}} S_{\bar{x}_i}^{\bar{z}} \bar{\alpha} \right) \right|. \quad (\text{D.29})$$

Por otra parte, la hipótesis de inducción aplicada a  $S_{x_i}^z \alpha$  (que tiene la misma longitud de que  $\alpha$  por el Metateorema 1.6) nos da que

$$\vdash \overline{S_x^t S_{x_i}^z \alpha} \leftrightarrow S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \overline{S_{x_i}^z \alpha}, \quad (\text{D.30})$$

y aplicándola a  $\alpha$  obtenemos que

$$\vdash \overline{S_{x_i}^z \alpha} \leftrightarrow S_{\bar{x}_i}^{\bar{z}} \bar{\alpha},$$

luego por el Metateorema 1.18 se tiene que

$$\vdash \overline{S_x^t S_{x_i}^z \alpha} \leftrightarrow S_{\bar{x}}^{\bar{t}} S_{\bar{x}_i}^{\bar{z}} \bar{\alpha}. \quad (\text{D.31})$$

Usando entonces la regla (MBB) con (D.30) y (D.31) concluimos que

$$\vdash \overline{S_x^t S_{x_i}^z \alpha} \leftrightarrow S_{\bar{x}}^{\bar{t}} S_{\bar{x}_i}^{\bar{z}} \bar{\alpha}. \quad (\text{D.32})$$

Por el Teorema 2.11 y el Teorema 3.31 se obtiene finalmente que

$$\vdash \bar{z} \left| \left( \bar{z} \in M \wedge \overline{S_x^t S_{x_i}^z \alpha} \right) \right| = \bar{z} \left| \left( \bar{z} \in M \wedge S_{\bar{x}}^{\bar{t}} S_{\bar{x}_i}^{\bar{z}} \bar{\alpha} \right) \right|$$

y por (D.28) y (D.29) concluimos con lo deseado.

Esto concluye la inducción y con ello esta parte de la demostración.

Veamos ahora que para cualesquiera términos  $s_1, \dots, s_m$  y variables  $y_1, \dots, y_m$  se tiene que

$$\vdash \overline{S_{y_1}^{s_1} \dots S_{y_m}^{s_m} \theta} \leftrightarrow S_{\bar{y}_1}^{\bar{s}_1} \dots S_{\bar{y}_m}^{\bar{s}_m} \bar{\theta} \quad (\text{D.33})$$

si  $\theta$  es una fórmula y

$$\vdash \overline{S_{y_1}^{s_1} \dots S_{y_m}^{s_m} \theta} = S_{\bar{y}_1}^{\bar{s}_1} \dots S_{\bar{y}_m}^{\bar{s}_m} \bar{\theta} \quad (\text{D.34})$$

si  $\theta$  es un término.

Lo demostraremos por inducción en el número de sustituciones.

Si únicamente hay una sustitución ya lo hemos demostrado, luego supongamos que es cierto para  $k < m$  sustituciones y veamos que entonces es también cierto para  $m$  sustituciones.

Por hipótesis de inducción tenemos que

$$\vdash \overline{S_{y_2}^{s_2} \dots S_{y_m}^{s_m} \theta} \leftrightarrow \overline{S_{y_2}^{s_2} \dots S_{y_m}^{s_m} \bar{\theta}} \quad (\text{D.35})$$

si  $\theta$  es una fórmula y

$$\vdash \overline{S_{y_2}^{s_2} \dots S_{y_m}^{s_m} \theta} = \overline{S_{y_2}^{s_2} \dots S_{y_m}^{s_m} \bar{\theta}} \quad (\text{D.36})$$

si  $\theta$  es un término.

Por otra parte, por el caso para una única sustitución tenemos también que

$$\vdash \overline{S_{y_1}^{s_1} \dots S_{y_m}^{s_m} \theta} \leftrightarrow \overline{S_{y_1}^{s_1} S_{y_2}^{s_2} \dots S_{y_m}^{s_m} \theta} \quad (\text{D.37})$$

si  $\theta$  es una fórmula y

$$\vdash \overline{S_{y_1}^{s_1} \dots S_{y_m}^{s_m} \theta} = \overline{S_{y_1}^{s_1} S_{y_2}^{s_2} \dots S_{y_m}^{s_m} \theta} \quad (\text{D.38})$$

si  $\theta$  es un término.

Finalmente, como por el Metateorema 1.18 y 1.19 aplicado junto a (D.35) y (D.36) respectivamente tenemos que

$$\vdash \overline{S_{y_1}^{s_1} S_{y_2}^{s_2} \dots S_{y_m}^{s_m} \theta} \leftrightarrow \overline{S_{y_1}^{s_1} \dots S_{y_m}^{s_m} \bar{\theta}} \quad (\text{D.39})$$

si  $\theta$  es una fórmula y

$$\vdash \overline{S_{y_1}^{s_1} S_{y_2}^{s_2} \dots S_{y_m}^{s_m} \theta} = \overline{S_{y_1}^{s_1} \dots S_{y_m}^{s_m} \bar{\theta}} \quad (\text{D.40})$$

si  $\theta$  es un término, utilizando la regla (MBB) con (D.37) y (D.39), o la regla (TI) con (D.38) y (D.40), obtenemos lo deseado.

Por último, como

$$\theta(t_1, \dots, t_n) \equiv S_{z_1}^{t_1} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \theta$$

siendo  $z_1, \dots, z_n$  las variables de menor índice que no están en  $t_1, \dots, t_n, \theta$  ni en  $x_1, \dots, x_n$ , por lo visto se tiene que

$$\vdash \overline{\theta(t_1, \dots, t_n)} \leftrightarrow \overline{S_{z_1}^{t_1} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \bar{\theta}} \quad (\text{D.41})$$

si  $\theta$  es una fórmula y

$$\vdash \overline{\theta(t_1, \dots, t_n)} = \overline{S_{z_1}^{t_1} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \bar{\theta}} \quad (\text{D.42})$$

si  $\theta$  es un término.

Ahora, observemos que como  $z_1, \dots, z_n$  no están libres en  $t_1, \dots, t_n, \theta$  ni en  $x_1, \dots, x_n$ , por el Metateorema D.4 se tiene que  $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$  no están libres en  $\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n, \bar{\theta}$  ni en  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ . Por tanto, por el Metateorema 1.16 se tiene que

$$\vdash \overline{S_{z_1}^{t_1} \dots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \dots S_{x_n}^{z_n} \bar{\theta}} \leftrightarrow \overline{\bar{\theta}(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n)} \quad (\text{D.43})$$

si  $\theta$  es una fórmula y

$$\vdash S_{z_1}^{\bar{t}_1} \cdots S_{z_n}^{\bar{t}_n} S_{x_1}^{\bar{z}_1} \cdots S_{x_n}^{\bar{z}_n} \bar{\theta} = \bar{\theta}(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n) \quad (\text{D.44})$$

si  $\theta$  es un término, luego aplicando la regla (MBB) con (D.41) y (D.43), o la regla (TI) con (D.42) y (D.44) concluimos con lo deseado. 

Con los tecnicismos resueltos, nuestro siguiente paso antes de poder demostrar el resultado principal sobre las interpretaciones es ver que le ocurre a las traducciones de los términos respecto al universo de la interpretación:

### Metateorema D.6

Fijada una interpretación  $M$  de una teoría  $S$  en otra teoría  $T$ , para todo término  $t$  de  $\mathcal{L}_S$  cuyas variables libres están entre  $x_1, \dots, x_n$  se cumple

$$\vdash_T \bigwedge \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n \in M \bar{t} \in M.$$

En particular, si  $t$  es un designador se cumple que

$$\vdash_T \bar{t} \in M.$$

Veámoslo por inducción sobre la longitud de  $t$ .

- Si  $t \equiv x$ , entonces  $x \equiv x_i$  para algún  $i = 1, \dots, n$  y tenemos:

|     |                                                                                  |                                 |
|-----|----------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|
| (1) | $\bar{x}_1 \in M \wedge \cdots \wedge \bar{x}_n \in M$                           | Hipótesis                       |
| (2) | $\bar{x}_i \in M$                                                                | EC 1                            |
| (3) | $\bar{x} \in M$                                                                  | R 2                             |
| (4) | $\bar{x}_1 \in M \wedge \cdots \wedge \bar{x}_n \in M \rightarrow \bar{x} \in M$ | Tma. deducción                  |
| (5) | $\bigwedge \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n \in M \bar{x} \in M$                       | IG 4 ( $\times n$ ) [Mteo. 3.6] |

- Si  $t \equiv c$ , entonces por la definición de interpretación se cumple que  $\vdash_T \bar{c} \in M$  y por tanto:

|     |                                                                                  |                                 |
|-----|----------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|
| (1) | $\bar{x}_1 \in M \wedge \cdots \wedge \bar{x}_n \in M$                           | Hipótesis                       |
| (2) | $\bar{c} \in M$                                                                  | Tma. $T$                        |
| (3) | $\bar{x}_1 \in M \wedge \cdots \wedge \bar{x}_n \in M \rightarrow \bar{c} \in M$ | Tma. deducción                  |
| (4) | $\bigwedge \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n \in M \bar{c} \in M$                       | IG 3 ( $\times n$ ) [Mteo. 3.6] |

- Si  $t \equiv f t_1 \cdots t_m$ , entonces las variables libres de cada  $t_i$  están entre  $x_1, \dots, x_n$  con lo que por hipótesis de inducción el resultado se cumple para cada  $t_i$ . Además, por la definición de interpretación tenemos que se cumple que

$$\vdash_T \bigwedge z_1 \cdots z_m \in M \bar{f} \in M \quad (\text{D.45})$$

siendo  $z_1, \dots, z_m$  las variables libres de  $\bar{f}$ .

Tomando entonces  $y_1, \dots, y_m$  variables distintas de  $z_1, \dots, z_m$  que no están en  $\bar{f}, \bar{t}_1, \dots, \bar{t}_m$ , por el Metateorema 1.16 y el Metateorema 2.18 se tiene que

$$\vdash \left( S_{y_1}^{\bar{t}_1} \cdots S_{y_m}^{\bar{t}_m} S_{z_1}^{y_1} \cdots S_{z_m}^{y_m} \bar{f} \right) \in M \leftrightarrow \bar{f}(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_m) \in M.$$

Por otra parte, por el Metateorema 1.21

$$\vdash S_{y_1}^{\bar{t}_1} \dots S_{y_m}^{\bar{t}_m} S_{z_1}^{y_1} \dots S_{z_m}^{y_m} (\bar{f} \in M) \leftrightarrow (S_{y_1}^{\bar{t}_1} \dots S_{y_m}^{\bar{t}_m} S_{z_1}^{y_1} \dots S_{z_m}^{y_m} \bar{f}) \in M,$$

luego utilizando la regla (MBB) con estas dos últimas fórmulas obtenemos que

$$\vdash S_{y_1}^{\bar{t}_1} \dots S_{y_m}^{\bar{t}_m} S_{z_1}^{y_1} \dots S_{z_m}^{y_m} (\bar{f} \in M) \leftrightarrow \bar{f}(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_m) \in M. \quad (\text{D.46})$$

Con todo, podemos entonces probar que

$$\vdash_T \bar{t}_1 \in M \wedge \dots \wedge \bar{t}_m \in M \rightarrow \bar{f}(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_m) \in M. \quad (\text{D.47})$$

En efecto, tenemos la siguiente demostración:

- (1)  $\wedge z_1 \dots z_m \in M \bar{f} \in M$  (D.45)
- (2)  $\wedge z_m \dots z_1 (z_1 \in M \wedge \dots \wedge z_m \in M \rightarrow \bar{f} \in M)$  EG, IG 1 ( $\times n$ ) [Tma. 3.6]
- (3)  $y_1 \in M \wedge \dots \wedge y_m \in M \rightarrow$  EG 2 ( $\times n$ )  
 $S_{z_1}^{y_1} \dots S_{z_m}^{y_m} (\bar{f} \in M)$
- (4)  $\wedge y_m \dots y_1 (y_1 \in M \wedge \dots \wedge y_m \in M \rightarrow$  IG 3 ( $\times n$ )  
 $S_{z_1}^{y_1} \dots S_{z_m}^{y_m} (\bar{f} \in M))$
- (5)  $\bar{t}_1 \in M \wedge \dots \wedge \bar{t}_m \in M \rightarrow$  EG 4 ( $\times n$ )  
 $S_{y_1}^{\bar{t}_1} \dots S_{y_m}^{\bar{t}_m} S_{z_1}^{y_1} \dots S_{z_m}^{y_m} (\bar{f} \in M)$
- (6)  $\bar{t}_1 \in M \wedge \dots \wedge \bar{t}_m \in M \rightarrow \bar{f}(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_m) \in M$  SE 5, (Tma. 2.11 2) (D.46))

Con esto, tenemos la demostración:

- (1)  $\wedge \bar{x}_1 \dots \bar{x}_n \in M \bar{t}_1 \in M$  Tma. T (Hip. induc.)  
 $\dots$
- (m)  $\wedge \bar{x}_1 \dots \bar{x}_n \in M \bar{t}_m \in M$  Tma. T (Hip. induc.)
- (m+1)  $\bar{x}_1 \in M \wedge \dots \wedge \bar{x}_n \in M \rightarrow \bar{t}_1 \in M$  EG 1 [Mteo. 3.6]  
 $\dots$
- (2m)  $\bar{x}_1 \in M \wedge \dots \wedge \bar{x}_n \in M \rightarrow \bar{t}_m \in M$  EG m [Mteo. 3.6]
- (2m+1)  $\bar{x}_1 \in M \wedge \dots \wedge \bar{x}_n \in M$  Hipótesis
- (2m+2)  $\bar{t}_1 \in M$  MP m+1, 2m+1  
 $\dots$
- (3m+1)  $\bar{t}_m \in M$  MP 2m, 2m+1
- (3m+2)  $\bar{t}_1 \in M \wedge \dots \wedge \bar{t}_n \in M$  IC 2m+2,  $\dots$ , 3m+1
- (3m+3)  $\bar{f}(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n) \in M$  MP 3m+2, (D.47)
- (3m+4)  $\overline{ft_1 \dots t_n} \in M$  R 3m+3
- (3m+5)  $\bar{x}_1 \in M \wedge \dots \wedge \bar{x}_n \in M \rightarrow$  Tma. deducción  
 $\overline{ft_1 \dots t_n} \in M$
- (3m+6)  $\wedge \bar{x}_1 \dots \bar{x}_n \in M \overline{ft_1 \dots t_n} \in M$  IG 3m+5 ( $\times n$ ) [Mteo. 3.6]

- Si  $t \equiv x|\alpha$ , entonces  $\bar{t} \equiv \bar{x} | (\bar{x} \in M \wedge \bar{\alpha})$  y tenemos la siguiente demostración en  $T$ , donde en la línea 8 utilizamos un teorema de  $T$  que nos garantiza la definición de interpretación:

|      |                                                                                                                                                                  |                                  |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|
| (1)  | $\bigvee^1 \bar{x} (\bar{x} \in M \wedge \bar{\alpha})$                                                                                                          | Hipótesis                        |
| (2)  | $S_{\bar{x}}^{\bar{t}} (\bar{x} \in M \wedge \bar{\alpha})$                                                                                                      | DP 1                             |
| (3)  | $\bar{t} \in M \wedge S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\alpha}$                                                                                                        | R 2 [Mteo. 1.21]                 |
| (4)  | $\bar{t} \in M$                                                                                                                                                  | EC 3                             |
| (5)  | $\bigvee^1 \bar{x} (\bar{x} \in M \wedge \bar{\alpha}) \rightarrow \bar{t} \in M$                                                                                | Tma. deducción                   |
| (6)  | $\neg \bigvee^1 \bar{x} (\bar{x} \in M \wedge \bar{\alpha})$                                                                                                     | Hipótesis                        |
| (7)  | $\bar{t} = x   x = x$                                                                                                                                            | DI 6                             |
| (8)  | $x   (x = x) \in M$                                                                                                                                              | Tma. T                           |
| (9)  | $\bar{t} \in M$                                                                                                                                                  | ETI 7, 8                         |
| (10) | $\neg \bigvee^1 \bar{x} (\bar{x} \in M \wedge \bar{\alpha}) \rightarrow \bar{t} \in M$                                                                           | Tma. deducción                   |
| (11) | $\left( \bigvee^1 \bar{x} (\bar{x} \in M \wedge \bar{\alpha}) \vee \neg \bigvee^1 \bar{x} (\bar{x} \in M \wedge \bar{\alpha}) \right) \rightarrow \bar{t} \in M$ | Dil 5, 10                        |
| (12) | $\bigvee^1 \bar{x} (\bar{x} \in M \wedge \bar{\alpha}) \vee \neg \bigvee^1 \bar{x} (\bar{x} \in M \wedge \bar{\alpha})$                                          | TND                              |
| (13) | $\bar{x}_1 \in M \wedge \cdots \wedge \bar{x}_n \in M$                                                                                                           | Hipótesis                        |
| (14) | $\bar{t} \in M$                                                                                                                                                  | MP 11, 12                        |
| (15) | $\bar{x}_1 \in M \wedge \cdots \wedge \bar{x}_n \in M \rightarrow \bar{t} \in M$                                                                                 | Tma. deducción                   |
| (16) | $\bigwedge \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n \in M \bar{t} \in M$                                                                                                       | IG 15 ( $\times n$ ) [Mteo. 3.6] |

Esto finaliza la inducción y con ello esta parte de la demostración.

Finalmente, si  $t$  es un designador por lo demostrado tenemos que para cualquier variable  $x$  se cumplirá que

$$\vdash_T \bigwedge \bar{x} \in M \bar{t} \in M,$$

luego tenemos la siguiente demostración:

|     |                                               |         |
|-----|-----------------------------------------------|---------|
| (1) | $\bigwedge \bar{x} \in M \bar{t} \in M$       | Teo. T  |
| (2) | $y   (y = y) \in M \rightarrow \bar{t} \in M$ | EG 1    |
| (3) | $y   (y = y) \in M$                           | Teo. T  |
| (4) | $\bar{t} \in M$                               | MP 2, 3 |

Por tanto, el teorema también es cierto en este caso y podemos concluir la prueba. 

Con todos los preparativos listos ya estamos en posición de demostrar el ansiado resultado fundamental sobre las interpretaciones:

### Metateorema D.7

Fijada una interpretación  $M$  de una teoría  $S$  en otra teoría  $T$ , para toda fórmula  $\alpha$  de  $\mathcal{L}_S$  cuyas variables libres son  $x_1, \dots, x_n$ , si se cumple  $\vdash_S \alpha$ , entonces

$$\vdash_T \bigwedge \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n \in M \bar{\alpha}.$$

En particular, si  $\alpha$  es una sentencia y  $\vdash_S \alpha$ , entonces  $\vdash_T \bar{\alpha}$ .

Si  $\gamma$  es una fórmula cualquiera de  $\mathcal{L}_S$  denotaremos por

$$\bar{\gamma}^c \equiv \bigwedge \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n \in M \bar{\gamma}$$

donde  $x_1, \dots, x_n$  son las variables libres de  $\gamma$ . Si  $\gamma$  no tiene variables libres, entonces

$$\bar{\gamma}^c \equiv \bar{\gamma}.$$

En definitiva,  $\bar{\gamma}^c$  es la traducción de la clausura de  $\gamma$ <sup>7</sup>.

Veamos en primer lugar que si  $\gamma$  es un axioma lógico de  $\mathcal{L}_S$ , entonces  $\vdash_T \bar{\gamma}^c$ :

- Si  $\gamma$  es un axioma de tipo K1, es decir,  $\gamma \equiv \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$ , entonces

$$\bar{\gamma} \equiv \bar{\alpha} \rightarrow (\bar{\beta} \rightarrow \bar{\alpha}),$$

luego  $\bar{\gamma}$  es un axioma de tipo K1 de  $\mathcal{L}_T$  y si son  $x_1, \dots, x_n$  las variables libres de  $\gamma$  tenemos que:

|     |                                                                                |                                 |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|
| (1) | $\bar{x}_1 \in M \wedge \dots \wedge \bar{x}_n \in M$                          | Hipótesis                       |
| (2) | $\bar{\gamma}$                                                                 | K1                              |
| (3) | $\bar{x}_1 \in M \wedge \dots \wedge \bar{x}_n \in M \rightarrow \bar{\gamma}$ | Tma. deducción                  |
| (4) | $\bigwedge \bar{x}_1 \dots \bar{x}_n \in M \bar{\gamma}$                       | IG 3 ( $\times n$ ) [Mteo. 3.6] |

Si  $\gamma$  no tuviera variables libres, entonces como  $\bar{\gamma}^c \equiv \bar{\gamma}$  es un axioma lógico de  $\mathcal{L}_T$ , claramente se tiene que  $\bar{\gamma}^c$  es un teorema de  $T$ .

En cualquier caso tenemos pues que  $\vdash_T \bar{\gamma}^c$ .

- Si  $\gamma$  es un axioma de tipo K2 o K3 es completamente análogo a lo anterior.
- Si  $\gamma$  es un axioma de tipo K4, es decir,  $\gamma \equiv \bigwedge x \alpha \rightarrow S_x^t \alpha$ , entonces se tiene que

$$\bar{\gamma} \equiv \bigwedge \bar{x} \in M \bar{\alpha} \rightarrow \overline{S_x^t \alpha}.$$

Ahora, por el Metateorema D.5 tenemos que

$$\vdash_T \overline{S_x^t \alpha} \leftrightarrow S_x^{\bar{t}} \bar{\alpha},$$

luego por el Teorema 2.11 obtenemos que

$$\vdash_T \bar{\gamma} \leftrightarrow \bigwedge \bar{x} \in M \bar{\alpha} \rightarrow S_x^{\bar{t}} \bar{\alpha}. \quad (\text{D.48})$$

Con todo, si  $x_1, \dots, x_n$  son las variables libres de  $\gamma$ , entonces distinguimos dos casos:

- Si  $x$  está libre en  $\alpha$ , entonces por el Teorema 1.13 5) tenemos que las variables libres de  $t$  están libres en  $S_x^t \alpha$ , luego están entre las variables  $x_1, \dots, x_n$  y

<sup>7</sup> Observemos que por lo dicho en la Nota 8 pág. 85, el Metateorema 3.6, la conmutatividad de la conjunción y el Teorema 2.11 tenemos que

$$\vdash \bigwedge \bar{x}_1 \dots \bar{x}_n \in M \bar{\gamma} \leftrightarrow \bigwedge \bar{x}_{\pi(1)} \dots \bar{x}_{\pi(n)} \in M \bar{\gamma}$$

para cualquier permutación  $\pi$  del conjunto  $1, \dots, n$ .

Por tanto, podemos considerar el orden que nos resulte más adecuado a la hora de escribir  $\bar{\gamma}^c$ , pues por lo dicho cualquier otro orden de las variables nos da una fórmula equivalente.



obtenemos:

|      |                                                                                       |                                  |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|
| (1)  | $\bar{x}_1 \in M \wedge \cdots \wedge \bar{x}_n \in M$                                | Hipótesis                        |
| (2)  | $\bigwedge \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n \in M \bar{t} \in M$                            | Mteo. D.6                        |
| (3)  | $\bar{x}_1 \in M \wedge \cdots \wedge \bar{x}_n \in M \rightarrow \bar{t} \in M$      | EG 2 [Mteo. 3.6]                 |
| (4)  | $\bar{t} \in M$                                                                       | MP 1, 3                          |
| (5)  | $\bigwedge \bar{x} \in M \bar{\alpha}$                                                | Hipótesis                        |
| (6)  | $\bar{t} \in M \rightarrow S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\alpha}$                        | EG 5 [Mteo. 1.21]                |
| (7)  | $S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\alpha}$                                                  | MP 4, 6                          |
| (8)  | $\bigwedge \bar{x} \in M \bar{\alpha} \rightarrow S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\alpha}$ | Tma. deducción                   |
| (9)  | $\bar{\gamma}$                                                                        | SE 8, (D.48)                     |
| (10) | $\bar{x}_1 \in M \wedge \cdots \wedge \bar{x}_n \in M \rightarrow \bar{\gamma}$       | Tma. deducción                   |
| (11) | $\bigwedge \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n \in M \bar{\gamma}$                             | IG 10 ( $\times n$ ) [Mteo. 3.6] |

- Si  $x$  no está libre en  $\alpha$ , entonces por el Metateorema D.4 obtenemos que  $\bar{x}$  no está libre en  $\bar{\alpha}$ , luego  $S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\alpha} \equiv \bar{\alpha}$ . Utilizando entonces que por la definición de interpretación se tiene que  $\vdash_T x|(x=x) \in M$  obtenemos:

|     |                                                                                 |                                 |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|
| (1) | $\bar{x}_1 \in M \wedge \cdots \wedge \bar{x}_n \in M$                          | Hipótesis                       |
| (2) | $x (x=x) \in M$                                                                 | Teo. T                          |
| (3) | $\bigwedge \bar{x} \in M \bar{\alpha}$                                          | Hipótesis                       |
| (4) | $x (x=x) \in M \rightarrow \bar{\alpha}$                                        | EG 3 [Mteo. 1.21]               |
| (5) | $\bar{\alpha}$                                                                  | MP 2, 4                         |
| (6) | $\bigwedge \bar{x} \in M \bar{\alpha} \rightarrow \bar{\alpha}$                 | Tma. deducción                  |
| (7) | $\bar{\gamma}$                                                                  | SE 6, (D.48)                    |
| (8) | $\bar{x}_1 \in M \wedge \cdots \wedge \bar{x}_n \in M \rightarrow \bar{\gamma}$ | Tma. deducción                  |
| (9) | $\bigwedge \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n \in M \bar{\gamma}$                       | IG 8 ( $\times n$ ) [Mteo. 3.6] |

En los dos casos se cumple que  $\vdash_T \bar{\gamma}^c$ .

Por otra parte, si  $\gamma$  no tiene variables libres, entonces distinguimos también dos casos:

- Si  $x$  está libre en  $\alpha$ , entonces por el Teorema 1.13 5) tenemos que las variables libres de  $t$  están libres en  $S_x^t \alpha$ , luego están en  $\gamma$ , lo cual no puede ser. Por tanto,  $t$  debe ser un designador y el Metateorema D.6 nos da entonces que

$$\vdash_T \bar{t} \in M. \quad (\text{D.49})$$

Tenemos entonces la demostración:

|     |                                                                                       |                   |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|
| (1) | $\bigwedge \bar{x} \in M \bar{\alpha}$                                                | Hipótesis         |
| (2) | $\bar{t} \in M \rightarrow S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\alpha}$                        | EG 1 [Mteo. 1.21] |
| (3) | $S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\alpha}$                                                  | MP 2, (D.49)      |
| (4) | $\bigwedge \bar{x} \in M \bar{\alpha} \rightarrow S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\alpha}$ | Tma. deducción    |
| (5) | $\bar{\gamma}$                                                                        | SE 8, (D.48)      |

- Si  $x$  no está libre en  $\alpha$ , entonces por el Metateorema D.4 obtenemos que  $\bar{x}$  no está libre en  $\bar{\alpha}$ , luego  $S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\alpha} \equiv \bar{\alpha}$ . Utilizando entonces que por la definición de

interpretación se tiene que  $\vdash_T x|(x = x) \in M$  obtenemos:

|     |                                                                 |                   |
|-----|-----------------------------------------------------------------|-------------------|
| (1) | $\bigwedge \bar{x} \in M \bar{\alpha}$                          | Hipótesis         |
| (2) | $x (x = x) \in M \rightarrow \bar{\alpha}$                      | EG 3 [Mteo. 1.21] |
| (3) | $x (x = x) \in M$                                               | Teo. $T$          |
| (4) | $\bar{\alpha}$                                                  | MP 2, 3           |
| (5) | $\bigwedge \bar{x} \in M \bar{\alpha} \rightarrow \bar{\alpha}$ | Tma. deducción    |
| (6) | $\bar{\gamma}$                                                  | SE 5, (D.48)      |

En los dos casos obtenemos que  $\bar{\gamma} \equiv \bar{\gamma}^c$  es un teorema de  $T$ .

En cualquier caso tenemos pues que  $\vdash_T \bar{\gamma}^c$ .

- Si  $\gamma$  es un axioma de tipo K5, es decir,  $\gamma \equiv \bigwedge x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \bigwedge x\beta)$  siendo  $x$  una variable que no está libre en  $\alpha$ , entonces

$$\bar{\gamma} \equiv \bigwedge \bar{x} \in M(\bar{\alpha} \rightarrow \bar{\beta}) \rightarrow (\bar{\alpha} \rightarrow \bigwedge \bar{x} \in M \bar{\beta}),$$

donde por el Metateorema D.4 sabemos que  $\bar{x}$  no está libre en  $\bar{\alpha}$ .

Con todo, si son  $x_1, \dots, x_n$  las variables libres en  $\gamma$  tenemos la siguiente demostración en  $T$ :

|      |                                                                                |                                         |
|------|--------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| (1)  | $\bigwedge \bar{x} \in M(\bar{\alpha} \rightarrow \bar{\beta})$                | Hipótesis                               |
| (2)  | $\bar{\alpha}$                                                                 | Hipótesis                               |
| (3)  | $\bar{x} \in M$                                                                | Hipótesis                               |
| (4)  | $\bar{x} \in M \rightarrow (\bar{\alpha} \rightarrow \bar{\beta})$             | EG 1                                    |
| (5)  | $\bar{\alpha} \rightarrow \bar{\beta}$                                         | MP 3, 4                                 |
| (6)  | $\bar{\beta}$                                                                  | MP 2, 5                                 |
| (7)  | $\bar{x} \in M \rightarrow \bar{\beta}$                                        | Tma. deducción                          |
| (8)  | $\bigwedge \bar{x} \in M \bar{\beta}$                                          | IG 7 ( $\bar{x}$ no libre en 1 ni en 2) |
| (9)  | $\bar{\alpha} \rightarrow \bigwedge \bar{x} \in M \bar{\beta}$                 | Tma. deducción                          |
| (10) | $\bar{\gamma}$                                                                 | Tma. deducción                          |
| (11) | $\bar{x}_1 \in M \wedge \dots \wedge \bar{x}_n \in M$                          | Hipótesis                               |
| (12) | $\bar{\gamma}$                                                                 | R 10                                    |
| (13) | $\bar{x}_1 \in M \wedge \dots \wedge \bar{x}_n \in M \rightarrow \bar{\gamma}$ | Tma. deducción                          |
| (14) | $\bigwedge \bar{x}_1 \dots \bar{x}_n \in M \bar{\gamma}$                       | IG 13 ( $\times n$ ) [Mteo. 3.6]        |

Por tanto, se cumple que  $\vdash_T \bar{\gamma}^c$ .

Por otra parte, si  $\gamma$  no tiene variables libres, observemos que las líneas de la (1) a la (10) en lo anterior demuestran  $\bar{\gamma}$ , que en este caso es exactamente  $\bar{\gamma}^c$ , luego  $\bar{\gamma}^c$  es un teorema de  $T$ .

En cualquier caso tenemos pues que  $\vdash_T \bar{\gamma}^c$ .

- Si  $\gamma$  es un axioma de tipo K6, es decir,  $\gamma \equiv \bigwedge x(x = t \rightarrow \alpha) \leftrightarrow S_x^t \alpha$  siendo  $x$  una variable que no está libre en  $t$ , entonces

$$\bar{\gamma} \equiv \bigwedge \bar{x} \in M(\bar{x} = \bar{t} \rightarrow \bar{\alpha}) \leftrightarrow \overline{S_x^t \alpha}.$$

Ahora, por el Metateorema D.5 tenemos que

$$\vdash_T \overline{S_x^t \alpha} \leftrightarrow S_x^{\bar{t}} \bar{\alpha},$$

luego por el Teorema 2.11 5) obtenemos que

$$\vdash_T \bar{\gamma} \leftrightarrow \left( \bigwedge \bar{x} \in M (\bar{x} = \bar{t} \rightarrow \bar{\alpha}) \leftrightarrow S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\alpha} \right). \quad (\text{D.50})$$

Además, observemos que si  $y$  está libre en  $t$ , entonces lo está en  $\bigwedge x(x = t \rightarrow \alpha)$  (pues  $x \neq y$  al no estar  $x$  libre en  $t$ ) y por tanto es una variable libre de  $\gamma$ . Es decir, si  $x_1, \dots, x_n$  son las variables libres de  $\gamma$  hemos probado que las variables libres de  $t$  están entre estas y podemos formar la siguiente demostración:

|      |                                                                                                                           |                                                      |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|
| (1)  | $\bar{x}_1 \in M \wedge \dots \wedge \bar{x}_n \in M$                                                                     | Hipótesis                                            |
| (2)  | $\bigwedge \bar{x}_1 \dots \bar{x}_n \in M \bar{t} \in M$                                                                 | Mteo, D.6                                            |
| (3)  | $\bar{x}_1 \in M \dots \bar{x}_n \in M \rightarrow \bar{t} \in M$                                                         | EG 2 [Mteo. 3.6]                                     |
| (4)  | $\bar{t} \in M$                                                                                                           | MP 1, 3                                              |
| (5)  | $\bigwedge \bar{x} \in M (\bar{x} = \bar{t} \rightarrow \bar{\alpha})$                                                    | Hipótesis                                            |
| (6)  | $\bar{t} \in M \rightarrow (\bar{t} = \bar{t} \rightarrow S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\alpha})$                            | EG 5 ( $\bar{x}$ no libre en $\bar{t}$ [Mteo. D.4])  |
| (7)  | $\bar{t} = \bar{t} \rightarrow S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\alpha}$                                                        | MP 4, 6                                              |
| (8)  | $\bar{t} = \bar{t}$                                                                                                       | I                                                    |
| (9)  | $S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\alpha}$                                                                                      | MP 7, 8                                              |
| (10) | $\bigwedge \bar{x} \in M (\bar{x} = \bar{t} \rightarrow \bar{\alpha}) \rightarrow S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\alpha}$     | Tma. deducción                                       |
| (11) | $S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\alpha}$                                                                                      | Hipótesis                                            |
| (12) | $\bigwedge \bar{x} (\bar{x} = \bar{t} \rightarrow \bar{\alpha})$                                                          | II 11 ( $\bar{x}$ no libre en $\bar{t}$ [Mteo. D.4]) |
| (13) | $\bar{x} = \bar{t} \rightarrow \bar{\alpha}$                                                                              | EG 12                                                |
| (14) | $\bar{x} \in M$                                                                                                           | Hipótesis                                            |
| (15) | $\bar{x} = \bar{t} \rightarrow \bar{\alpha}$                                                                              | R 13                                                 |
| (16) | $\bar{x} \in M \rightarrow (\bar{x} = \bar{t} \rightarrow \bar{\alpha})$                                                  | Tma. deducción                                       |
| (17) | $\bigwedge \bar{x} \in M (\bar{x} = \bar{t} \rightarrow \bar{\alpha})$                                                    | IG 16                                                |
| (18) | $S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\alpha} \rightarrow \bigwedge \bar{x} \in M (\bar{x} = \bar{t} \rightarrow \bar{\alpha})$     | Tma. deducción                                       |
| (19) | $\bigwedge \bar{x} \in M (\bar{x} = \bar{t} \rightarrow \bar{\alpha}) \leftrightarrow S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\alpha}$ | IB 10, 18                                            |
| (20) | $\bar{\gamma}$                                                                                                            | SE 19, (D.50)                                        |
| (21) | $\bar{x}_1 \in M \wedge \dots \wedge \bar{x}_n \in M \rightarrow \bar{\gamma}$                                            | Tma. deducción                                       |
| (22) | $\bigwedge \bar{x}_1 \dots \bar{x}_n \in M \bar{\gamma}$                                                                  | IG 21 ( $\times n$ ) [Mteo. 3.6]                     |

Observemos que la generalización en la línea 17 es válida pues:

- Como  $\bar{x}$  no está libre en  $\bar{t}$ , el Teorema 1.13 3) nos garantiza que  $\bar{x}$  no está libre en  $S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\alpha}$ , luego no lo está en la línea 11.
- Observemos que  $x$  no está libre en  $\gamma$  (no lo está en  $S_x^t \alpha$  por la misma razón que en el punto anterior), luego  $x$  es distinta de  $x_1, \dots, x_n$ . Por la definición de interpretación tenemos entonces que  $\bar{x}$  es distinta de cada  $\bar{x}_i$  y por tanto no está libre en la línea 1 (pues recordemos que la fórmula  $x \in M$  tiene a  $x$  como única variable libre).

Con todo, se cumple que  $\vdash_T \bar{\gamma}^c$ .

Por otra parte, si  $\gamma$  no tiene variables libres, como hemos visto que toda variable libre de  $t$  lo es de  $\gamma$ , concluimos que  $t$  es un designador. Tenemos entonces la demostración:

|      |                                                                                                                           |                                                     |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| (1)  | $\bar{t} \in M$                                                                                                           | Mteo. D.6                                           |
| (2)  | $\bigwedge \bar{x} \in M (\bar{x} = \bar{t} \rightarrow \bar{\alpha})$                                                    | Hipótesis                                           |
| (3)  | $\bar{t} \in M \rightarrow (\bar{t} = \bar{t} \rightarrow S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\alpha})$                            | EG 2 ( $\bar{x}$ no libre en $\bar{t}$ [Mteo. D.4]) |
| (4)  | $\bar{t} = \bar{t} \rightarrow S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\alpha}$                                                        | MP 1, 3                                             |
| (5)  | $\bar{t} = \bar{t}$                                                                                                       | I                                                   |
| (6)  | $S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\alpha}$                                                                                      | MP 4, 5                                             |
| (7)  | $\bigwedge \bar{x} \in M (\bar{x} = \bar{t} \rightarrow \bar{\alpha}) \rightarrow S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\alpha}$     | Tma. deducción                                      |
| (8)  | $S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\alpha}$                                                                                      | Hipótesis                                           |
| (9)  | $\bigwedge \bar{x} (\bar{x} = \bar{t} \rightarrow \bar{\alpha})$                                                          | II 8 ( $\bar{x}$ no libre en $\bar{t}$ [Mteo. D.4]) |
| (10) | $\bar{x} = \bar{t} \rightarrow \bar{\alpha}$                                                                              | EG 9                                                |
| (11) | $\bar{x} \in M$                                                                                                           | Hipótesis                                           |
| (12) | $\bar{x} = \bar{t} \rightarrow \bar{\alpha}$                                                                              | R 10                                                |
| (13) | $\bar{x} \in M \rightarrow (\bar{x} = \bar{t} \rightarrow \bar{\alpha})$                                                  | Tma. deducción                                      |
| (14) | $\bigwedge \bar{x} \in M (\bar{x} = \bar{t} \rightarrow \bar{\alpha})$                                                    | IG 13 ( $\bar{x}$ no libre en 8)                    |
| (15) | $S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\alpha} \rightarrow \bigwedge \bar{x} \in M (\bar{x} = \bar{t} \rightarrow \bar{\alpha})$     | Tma. deducción                                      |
| (16) | $\bigwedge \bar{x} \in M (\bar{x} = \bar{t} \rightarrow \bar{\alpha}) \leftrightarrow S_{\bar{x}}^{\bar{t}} \bar{\alpha}$ | IB 7, 15                                            |
| (17) | $\bar{\gamma}$                                                                                                            | SE 16, (D.50)                                       |

Por tanto, tenemos que  $\bar{\gamma} \equiv \bar{\gamma}^c$  es un teorema de  $T$ .

En cualquier caso tenemos pues que  $\vdash_T \bar{\gamma}^c$ .

- Si  $\gamma$  es un axioma de tipo K7, es decir,  $\gamma \equiv \bigvee^1 x \alpha \rightarrow S_x^{x|\alpha} \alpha$ , entonces usando los Metateoremas D.2 (v) y D.5 junto al Teorema 2.11 obtenemos que

$$\vdash_T \bar{\gamma} \leftrightarrow \left( \bigvee^1 \bar{x} (\bar{x} \in M \wedge \bar{\alpha}) \rightarrow S_{\bar{x}}^{\bar{x}|(\bar{x} \in M \wedge \bar{\alpha})} \bar{\alpha} \right). \quad (\text{D.51})$$

Así, si  $x_1, \dots, x_n$  son las variables libres de  $\gamma$  tenemos la demostración:

|      |                                                                                                                                                                   |                                 |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|
| (1)  | $\bar{x}_1 \in M \wedge \dots \wedge \bar{x}_n \in M$                                                                                                             | Hipótesis                       |
| (2)  | $\bigvee^1 \bar{x} (\bar{x} \in M \wedge \bar{\alpha}) \rightarrow S_{\bar{x}}^{\bar{x} (\bar{x} \in M \wedge \bar{\alpha})} (\bar{x} \in M \wedge \bar{\alpha})$ | K7                              |
| (3)  | $\bigvee^1 \bar{x} (\bar{x} \in M \wedge \bar{\alpha})$                                                                                                           | Hipótesis                       |
| (4)  | $S_{\bar{x}}^{\bar{x} (\bar{x} \in M \wedge \bar{\alpha})} (\bar{x} \in M \wedge \bar{\alpha})$                                                                   | MP 2, 3                         |
| (5)  | $S_{\bar{x}}^{\bar{x} (\bar{x} \in M \wedge \bar{\alpha})} \bar{x} \in M \wedge S_{\bar{x}}^{\bar{x} (\bar{x} \in M \wedge \bar{\alpha})} \bar{\alpha}$           | R 4                             |
| (6)  | $S_{\bar{x}}^{\bar{x} (\bar{x} \in M \wedge \bar{\alpha})} \bar{\alpha}$                                                                                          | EC 5                            |
| (7)  | $\bigvee^1 \bar{x} (\bar{x} \in M \wedge \bar{\alpha}) \rightarrow S_{\bar{x}}^{\bar{x} (\bar{x} \in M \wedge \bar{\alpha})} \bar{\alpha}$                        | Tma. deducción                  |
| (8)  | $\bar{\gamma}$                                                                                                                                                    | SE 7, (D.51)                    |
| (9)  | $\bar{x}_1 \in M \wedge \dots \wedge \bar{x}_n \in M \rightarrow \bar{\gamma}$                                                                                    | Tma. deducción                  |
| (10) | $\bigwedge \bar{x}_1 \dots \bar{x}_n \in M \bar{\gamma}$                                                                                                          | IG 9 ( $\times n$ ) [Mteo. 3.6] |

Por tanto, se cumple que  $\vdash_T \bar{\gamma}^c$ .

Por otra parte, si  $\gamma$  no tiene variables libres tenemos la demostración:

|     |                                                                                                                                                                     |                |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| (1) | $\bigvee_{\bar{x}}^1 (\bar{x} \in M \wedge \bar{\alpha}) \rightarrow S_{\bar{x}}^{\bar{x} (\bar{x} \in M \wedge \bar{\alpha})} (\bar{x} \in M \wedge \bar{\alpha})$ | K7             |
| (2) | $\bigvee_{\bar{x}}^1 (\bar{x} \in M \wedge \bar{\alpha})$                                                                                                           | Hipótesis      |
| (3) | $S_{\bar{x}}^{\bar{x} (\bar{x} \in M \wedge \bar{\alpha})} (\bar{x} \in M \wedge \bar{\alpha})$                                                                     | MP 1, 2        |
| (4) | $S_{\bar{x}}^{\bar{x} (\bar{x} \in M \wedge \bar{\alpha})} \bar{x} \in M \wedge S_{\bar{x}}^{\bar{x} (\bar{x} \in M \wedge \bar{\alpha})} \bar{\alpha}$             | R 3            |
| (5) | $S_{\bar{x}}^{\bar{x} (\bar{x} \in M \wedge \bar{\alpha})} \bar{\alpha}$                                                                                            | EC 4           |
| (6) | $\bigvee_{\bar{x}}^1 (\bar{x} \in M \wedge \bar{\alpha}) \rightarrow S_{\bar{x}}^{\bar{x} (\bar{x} \in M \wedge \bar{\alpha})} \bar{\alpha}$                        | Tma. deducción |
| (7) | $\bar{\gamma}$                                                                                                                                                      | SE 6, (D.51)   |

Esto prueba que  $\bar{\gamma} \equiv \bar{\gamma}^c$  es un teorema de  $T$ .

En cualquier caso tenemos pues que  $\vdash_T \bar{\gamma}^c$ .

- Si  $\gamma$  es un axioma de tipo K8, es decir,  $\gamma \equiv \neg \bigvee_{x\alpha}^1 x\alpha \rightarrow x|\alpha = (y|y = y)$ , entonces usando el Metateorema D.2 (v) junto al Teorema 2.11 obtenemos que

$$\vdash_T \bar{\gamma} \leftrightarrow \left( \neg \bigvee_{\bar{x}}^1 (\bar{x} \in M \wedge \bar{\alpha}) \rightarrow \bar{x}|(\bar{x} \in M \wedge \bar{\alpha}) = \bar{y}|(\bar{y} \in M \wedge \bar{y} = \bar{y}) \right). \quad (\text{D.52})$$

Veamos en primer lugar que

$$\vdash_T \bar{y}|(\bar{y} \in M \wedge \bar{y} = \bar{y}) = \bar{y}|(\bar{y} = \bar{y}). \quad (\text{D.53})$$

Para ello, observemos primero que

$$\vdash \neg \bigvee_{\bar{y}}^1 \bar{y} \bar{y} \in M \leftrightarrow \neg \bigvee_{\bar{y}}^1 (\bar{y} \in M \wedge \bar{y} = \bar{y}). \quad (\text{D.54})$$

En efecto, la demostración es inmediata:

|      |                                                                                                                                    |                     |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|
| (1)  | $\bar{y} \in M$                                                                                                                    | Hipótesis           |
| (2)  | $\bar{y} = \bar{y}$                                                                                                                | I                   |
| (3)  | $\bar{y} \in M \wedge \bar{y} = \bar{y}$                                                                                           | IC 1, 2             |
| (4)  | $\bar{y} \in M \rightarrow (\bar{y} \in M \wedge \bar{y} = \bar{y})$                                                               | Tma. deducción      |
| (5)  | $\bar{y} \in M \wedge \bar{y} = \bar{y}$                                                                                           | Hipótesis           |
| (6)  | $\bar{y} \in M$                                                                                                                    | EC 5                |
| (7)  | $(\bar{y} \in M \wedge \bar{y} = \bar{y}) \rightarrow \bar{y} \in M$                                                               | Tma. deducción      |
| (8)  | $\bar{y} \in M \leftrightarrow (\bar{y} \in M \wedge \bar{y} = \bar{y})$                                                           | IB 4, 7             |
| (9)  | $\bigwedge \bar{y} (\bar{y} \in M \leftrightarrow (\bar{y} \in M \wedge \bar{y} = \bar{y}))$                                       | IG 8                |
| (10) | $\bigvee_{\bar{y}}^1 \bar{y} \bar{y} \in M \leftrightarrow \bigvee_{\bar{y}}^1 \bar{y} (\bar{y} \in M \wedge \bar{y} = \bar{y})$   | MP 9, Tma. 2.11 8)  |
| (11) | $\neg \bigvee_{\bar{y}}^1 \bar{y} \bar{y} \in M \leftrightarrow \neg \bigvee_{\bar{y}}^1 (\bar{y} \in M \wedge \bar{y} = \bar{y})$ | SE 10, Tma. 2.11 1) |

Como en ninguno de los términos aparecen variables libres tenemos la siguiente demostración que prueba (D.53):

|     |                                                                                |                  |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| (1) | $\bigvee_{\bar{y}}^1 \bar{y} \bar{y} \in M$                                    | Hipótesis        |
| (2) | $\bar{y} (\bar{y} \in M \wedge \bar{y} = \bar{y}) \in M$                       | Mteo. D.6        |
| (3) | $S_{\bar{y}}^{\bar{y} (\bar{y} \in M \wedge \bar{y} = \bar{y})} \bar{y} \in M$ | R 2 [Mteo. 1.21] |

|      |                                                                                                                                                                                 |                   |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|
| (4)  | $\bar{y} (\bar{y} = \bar{y}) \in M$                                                                                                                                             | Mteo. D.6         |
| (5)  | $S_{\bar{y}}^{\bar{y} \bar{y}=\bar{y}} \bar{y} \in M$                                                                                                                           | R 4 [Mteo. 1.21]  |
| (6)  | $\bar{y} (\bar{y} \in M \wedge \bar{y} = \bar{y}) = \bar{y} (\bar{y} = \bar{y})$                                                                                                | Mteo. 2.4 1, 3, 5 |
| (7)  | $\bigvee^1 \bar{y} \bar{y} \in M \rightarrow (\bar{y} (\bar{y} \in M \wedge \bar{y} = \bar{y}) = \bar{y} (\bar{y} = \bar{y}))$                                                  | Tma. deducción    |
| (8)  | $\neg \bigvee^1 \bar{y} \bar{y} \in M$                                                                                                                                          | Hipótesis         |
| (9)  | $\neg \bigvee^1 \bar{y} (\bar{y} \in M \wedge \bar{y} = \bar{y})$                                                                                                               | SE 8, (D.54)      |
| (10) | $\bar{y} (\bar{y} \in M \wedge \bar{y} = \bar{y}) = \bar{y} (\bar{y} = \bar{y})$                                                                                                | DI 9              |
| (11) | $\neg \bigvee^1 \bar{y} \bar{y} \in M \rightarrow (\bar{y} (\bar{y} \in M \wedge \bar{y} = \bar{y}) = \bar{y} (\bar{y} = \bar{y}))$                                             | Tma. deducción    |
| (12) | $(\bigvee^1 \bar{y} \bar{y} \in M \vee \neg \bigvee^1 \bar{y} \bar{y} \in M) \rightarrow$<br>$(\bar{y} (\bar{y} \in M \wedge \bar{y} = \bar{y}) = \bar{y} (\bar{y} = \bar{y}))$ | Dil 7, 11         |
| (13) | $\bigvee^1 \bar{y} \bar{y} \in M \vee \neg \bigvee^1 \bar{y} \bar{y} \in M$                                                                                                     | TND               |
| (14) | $\bar{y} (\bar{y} \in M \wedge \bar{y} = \bar{y}) = \bar{y} (\bar{y} = \bar{y})$                                                                                                | MP 12, 13         |

Con todo, de (D.53) es inmediato (usando la regla (TI)) que

$$\vdash_T \bar{x}|(\bar{x} \in M \wedge \bar{\alpha}) = \bar{y}|(\bar{y} \in M \wedge \bar{y} = \bar{y}) \leftrightarrow \bar{x}|(\bar{x} \in M \wedge \bar{\alpha}) = \bar{y}|(\bar{y} = \bar{y}),$$

luego aplicando el Teorema 2.11 junto a (D.52) y el teorema lógico anterior obtenemos que

$$\vdash_T \bar{\gamma} \leftrightarrow \left( \neg \bigvee^1 \bar{x} (\bar{x} \in M \wedge \bar{\alpha}) \rightarrow \bar{x}|(\bar{x} \in M \wedge \bar{\alpha}) = \bar{y}|(\bar{y} = \bar{y}) \right). \quad (\text{D.55})$$

Ahora bien, la fórmula de la derecha es un caso particular del axioma K8, luego se obtiene aplicando la regla (SE) a (D.55) y el correspondiente axioma de tipo K8 de  $\mathcal{L}_T$  que

$$\vdash_T \bar{\gamma}. \quad (\text{D.56})$$

Así, si  $x_1, \dots, x_n$  son las variables libres de  $\gamma$  se tiene la demostración:

|     |                                                                                |                                 |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|
| (1) | $\bar{x}_1 \in M \wedge \dots \wedge \bar{x}_n \in M$                          | Hipótesis                       |
| (2) | $\bar{\gamma}$                                                                 | (D.56)                          |
| (3) | $\bar{x}_1 \in M \wedge \dots \wedge \bar{x}_n \in M \rightarrow \bar{\gamma}$ | Tma. deducción                  |
| (4) | $\bigwedge \bar{x}_1 \dots \bar{x}_n \in M \bar{\gamma}$                       | IG 3 ( $\times n$ ) [Mteo. 3.6] |

Hemos visto pues que  $\vdash_T \bar{\gamma}^c$ .

Por otra parte, si  $\gamma$  no tiene variables libres, entonces  $\bar{\gamma} \equiv \bar{\gamma}^c$  y por (D.56) es claro que  $\bar{\gamma}^c$  es un teorema de  $T$ .

En cualquier caso tenemos pues que  $\vdash_T \bar{\gamma}^c$ .

Tenemos entonces demostrado que las traducciones de las clausuras de los axiomas lógicos de  $\mathcal{L}_S$  son teoremas de  $T$  y, por definición de interpretación, sabemos también que las traducciones de las clausuras de los axiomas propios de  $S$  son teoremas de  $T$ , con lo que en general tenemos que las traducciones de las clausuras de los axiomas de  $S$  son teoremas de  $T$ .

Supongamos pues que  $\alpha$  es un teorema de  $S$  y sea  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  una demostración. Si demostramos entonces que para cada  $i \leq m$  se cumple que  $\vdash_T \overline{\alpha_i}^c$ , como  $\alpha_m \equiv \alpha$ , en particular tendremos que  $\vdash_T \overline{\alpha}^c$  que es justamente lo que buscamos.

Veamos por inducción sobre  $i$  que se cumple lo dicho.

Supongamos pues que para cada  $k < i$  (con  $i \leq m$ ) se tiene que  $\vdash_T \overline{\alpha_k}^c$  y veamos que entonces también se cumple para  $\alpha_i$ . Tenemos tres casos posibles:

- Si  $\alpha_i$  es un axioma de  $S$ , entonces ya hemos visto que se cumple que  $\vdash_T \overline{\alpha_i}^c$ .
- Si  $\alpha_i$  se deduce por (MP), entonces tenemos dos fórmulas anteriores en la demostración  $\alpha_j, \alpha_k$  con  $j, k < i$  de modo que  $\alpha_k \equiv \alpha_j \rightarrow \alpha_i$ . Por hipótesis de inducción tenemos que  $\vdash_T \overline{\alpha_j}^c$  y  $\vdash_T \overline{\alpha_k}^c$ .

Podemos distinguir cuatro casos:

Si **ni  $\alpha_j$  ni  $\alpha_i$  tienen variables libres**, entonces claramente tampoco las tiene  $\alpha_k$ , luego tenemos que

$$\begin{aligned}\overline{\alpha_j}^c &\equiv \overline{\alpha_j}, \\ \overline{\alpha_k}^c &\equiv \overline{\alpha_j \rightarrow \alpha_i}, \\ \overline{\alpha_i}^c &\equiv \overline{\alpha_i},\end{aligned}$$

luego es claro que por (MP) aplicado a las dos primeras fórmulas (que sabemos que son teoremas de  $T$ ) obtenemos que  $\vdash_T \overline{\alpha_i}^c$ .

Si  $\alpha_j$  **no tiene variables libres** y las de  $\alpha_i$  son  $x_1, \dots, x_n$ , entonces tenemos que

$$\begin{aligned}\overline{\alpha_j}^c &\equiv \overline{\alpha_j}, \\ \overline{\alpha_k}^c &\equiv \bigwedge \overline{x_1} \cdots \overline{x_n} \in M \overline{\alpha_j} \rightarrow \overline{\alpha_i}, \\ \overline{\alpha_i}^c &\equiv \bigwedge \overline{x_1} \cdots \overline{x_n} \in M \overline{\alpha_i}.\end{aligned}$$

Con ello, se tiene la siguiente demostración de  $\overline{\alpha_i}^c$  en  $T$ :

|     |                                                                                                                                    |                                 |
|-----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|
| (1) | $\overline{\alpha_j}$                                                                                                              | Tma. $T$                        |
| (2) | $\bigwedge \overline{x_1} \cdots \overline{x_n} \in M \overline{\alpha_j} \rightarrow \overline{\alpha_i}$                         | Tma. $T$                        |
| (3) | $\overline{x_1} \in M \wedge \cdots \wedge \overline{x_n} \in M \rightarrow (\overline{\alpha_j} \rightarrow \overline{\alpha_i})$ | EG 2 [Mteo. 3.6]                |
| (4) | $\overline{x_1} \in M \wedge \cdots \wedge \overline{x_n} \in M$                                                                   | Hipótesis                       |
| (5) | $\overline{\alpha_j} \rightarrow \overline{\alpha_i}$                                                                              | MP 3, 4                         |
| (6) | $\overline{\alpha_i}$                                                                                                              | MP 1, 5                         |
| (7) | $\overline{x_1} \in M \wedge \cdots \wedge \overline{x_n} \in M \rightarrow \overline{\alpha_i}$                                   | Tma. deducción                  |
| (8) | $\bigwedge \overline{x_1} \cdots \overline{x_n} \in M \overline{\alpha_i}$                                                         | IG 7 ( $\times n$ ) [Mteo. 3.6] |

Si  $\alpha_i$  **no tiene variables libres** y las de  $\alpha_j$  son  $x_1, \dots, x_n$ , entonces tenemos que

$$\begin{aligned}\overline{\alpha_j}^c &\equiv \bigwedge \overline{x_1} \cdots \overline{x_n} \in M \overline{\alpha_j}, \\ \overline{\alpha_k}^c &\equiv \bigwedge \overline{x_1} \cdots \overline{x_n} \in M \overline{\alpha_j} \rightarrow \overline{\alpha_i}, \\ \overline{\alpha_i}^c &\equiv \overline{\alpha_i}.\end{aligned}$$

Observemos que como  $\alpha_i$  una sentencia, por el Metateorema D.4 obtenemos que  $\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}$  no están libres en  $\overline{\alpha_i}$ , y con ello se tiene la siguiente demostración de  $\overline{\alpha_i^c}$  en  $T$ :

- |     |                                                                                                                                                                                          |                        |
|-----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| (1) | $\bigwedge \overline{x_1} \dots \overline{x_n} \in M \overline{\alpha_j}$                                                                                                                | Tma. $T$               |
| (2) | $\bigwedge \overline{x_1} \dots \overline{x_n} \in M \overline{\alpha_j} \rightarrow \overline{\alpha_i}$                                                                                | Tma. $T$               |
| (3) | $x (x=x) \in M \wedge \dots \wedge x (x=x) \in M \rightarrow$<br>$S_{\overline{x_n}}^{x (x=x)} \dots S_{\overline{x_1}}^{x (x=x)} \overline{\alpha_j}$                                   | EG 1 [Mteo. 3.6, 1.21] |
| (4) | $x (x=x) \in M \wedge \dots \wedge x (x=x) \in M \rightarrow$<br>$(S_{\overline{x_n}}^{x (x=x)} \dots S_{\overline{x_1}}^{x (x=x)} \overline{\alpha_j} \rightarrow \overline{\alpha_i})$ | EG 2 [Mteo. 3.6, 1.21] |
| (5) | $x (x=x) \in M \wedge \dots \wedge x (x=x) \in M$                                                                                                                                        | IC (Tma. $T$ )         |
| (6) | $S_{\overline{x_n}}^{x (x=x)} \dots S_{\overline{x_1}}^{x (x=x)} \overline{\alpha_j}$                                                                                                    | MP 3, 5                |
| (7) | $S_{\overline{x_n}}^{x (x=x)} \dots S_{\overline{x_1}}^{x (x=x)} \overline{\alpha_j} \rightarrow \overline{\alpha_i}$                                                                    | MP 4, 5                |
| (8) | $\overline{\alpha_i}$                                                                                                                                                                    | MP 6, 7                |

Si  $w_1, \dots, w_n, x_1, \dots, x_r$  son las **variables libres** de  $\alpha_j$  y  $w_1, \dots, w_n, y_1, \dots, y_s$  las **variables libres** de  $\alpha_i$  (teniendo en cuenta que puede que no haya ninguna variable común entre ambas fórmulas y en dicho caso simplemente eliminamos en todo lo que sigue cada aparición de cada  $w_l$ ), entonces

$$\begin{aligned}\overline{\alpha_j^c} &\equiv \bigwedge \overline{w_1} \dots \overline{w_n} \overline{x_1} \dots \overline{x_r} \in M \overline{\alpha_j}, \\ \overline{\alpha_k^c} &\equiv \bigwedge \overline{w_1} \dots \overline{w_n} \overline{x_1} \dots \overline{x_r} \overline{y_1} \dots \overline{y_s} \in M \overline{\alpha_j} \rightarrow \overline{\alpha_i}, \\ \overline{\alpha_i^c} &\equiv \bigwedge \overline{w_1} \dots \overline{w_n} \overline{y_1} \dots \overline{y_s} \in M \overline{\alpha_i}.\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que por el Metateorema D.4  $\overline{x_1}, \dots, \overline{x_r}$  no están libres en  $\overline{\alpha_i}$  obtenemos la siguiente demostración de  $\overline{\alpha_i^c}$  en  $T$ :

- |      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                        |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| (1)  | $\bigwedge \overline{w_1} \dots \overline{w_n} \overline{x_1} \dots \overline{x_r} \in M \overline{\alpha_j}$                                                                                                                                                                                                                                | Tma. $T$               |
| (2)  | $\bigwedge \overline{w_1} \dots \overline{w_n} \overline{x_1} \dots \overline{x_r} \overline{y_1} \dots \overline{y_s} \in M \overline{\alpha_j} \rightarrow \overline{\alpha_i}$                                                                                                                                                            | Tma. $T$               |
| (3)  | $\overline{w_1} \in M \wedge \dots \wedge \overline{w_n} \in M \wedge$<br>$x (x=x) \in M \wedge \dots \wedge x (x=x) \in M \rightarrow$<br>$S_{\overline{x_r}}^{x (x=x)} \dots S_{\overline{x_1}}^{x (x=x)} \overline{\alpha_j}$                                                                                                             | EG 1 [Mteo. 3.6, 1.21] |
| (4)  | $\overline{w_1} \in M \wedge \dots \wedge \overline{w_n} \in M \wedge$<br>$x (x=x) \in M \wedge \dots \wedge x (x=x) \in M \wedge$<br>$\overline{y_1} \in M \wedge \dots \wedge \overline{y_s} \in M \rightarrow$<br>$(S_{\overline{x_r}}^{x (x=x)} \dots S_{\overline{x_1}}^{x (x=x)} \overline{\alpha_j} \rightarrow \overline{\alpha_i})$ | EG 2 [Mteo. 3.6, 1.21] |
| (5)  | $\overline{w_1} \in M \wedge \dots \wedge \overline{w_n} \in M \wedge$<br>$\overline{y_1} \in M \wedge \dots \wedge \overline{y_s} \in M$                                                                                                                                                                                                    | Hipótesis              |
| (6)  | $x (x=x) \in M \wedge \dots \wedge x (x=x) \in M$                                                                                                                                                                                                                                                                                            | IC Tma. $T$            |
| (7)  | $\overline{w_1} \in M \wedge \dots \wedge \overline{w_n} \in M \wedge$<br>$x (x=x) \in M \wedge \dots \wedge x (x=x) \in M \wedge$<br>$\overline{y_1} \in M \wedge \dots \wedge \overline{y_s} \in M$                                                                                                                                        | IC, EC 5, 6            |
| (8)  | $S_{\overline{x_r}}^{x (x=x)} \dots S_{\overline{x_1}}^{x (x=x)} \overline{\alpha_j} \rightarrow \overline{\alpha_i}$                                                                                                                                                                                                                        | MP 4, 7                |
| (9)  | $\overline{w_1} \in M \wedge \dots \wedge \overline{w_n} \in M \wedge$<br>$x (x=x) \in M \wedge \dots \wedge x (x=x) \in M$                                                                                                                                                                                                                  | IC, EC 5, 6            |
| (10) | $S_{\overline{x_r}}^{x (x=x)} \dots S_{\overline{x_1}}^{x (x=x)} \overline{\alpha_j}$                                                                                                                                                                                                                                                        | MP 3, 9                |
| (11) | $\overline{\alpha_i}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | MP 8, 10               |



- (12)  $\overline{w_1} \in M \wedge \cdots \wedge \overline{w_n} \in M \wedge$  Tma. deducción  
 $\overline{y_1} \in M \wedge \cdots \wedge \overline{y_s} \in M \rightarrow \overline{\alpha_i}$
- (13)  $\bigwedge \overline{w_1} \cdots \overline{w_n} \overline{y_1} \cdots \overline{y_s} \in M \overline{\alpha_i}$  IG 12 ( $\times n + s$ ) [Mteo. 3.6]

Vemos pues que **en cualquiera de los cuatro casos** obtenemos que  $\vdash_T \overline{\alpha_i}^c$ .

- Si  $\alpha_i$  se deduce por (IG), entonces tenemos una fórmula anterior en la demostración  $\alpha_j$  con  $j < i$  de modo que  $\alpha_j \equiv \bigwedge x \alpha_i$ . Por hipótesis de inducción tenemos que  $\vdash_T \overline{\alpha_j}^c$  y distinguimos tres casos:

Si  $\alpha_i$  **no tiene variables libres**, entonces claramente  $\alpha_j$  tampoco las tiene y tenemos que:

$$\begin{aligned}\overline{\alpha_j}^c &\equiv \bigwedge \bar{x} \in M \overline{\alpha_i}, \\ \overline{\alpha_i}^c &\equiv \overline{\alpha_i}.\end{aligned}$$

Como por el Metateorema D.4 se tiene que  $\bar{x}$  no está libre en  $\overline{\alpha_i}$  obtenemos la siguiente demostración de  $\overline{\alpha_i}^c$  en  $T$ :

- |     |                                                   |                        |
|-----|---------------------------------------------------|------------------------|
| (1) | $\bigwedge \bar{x} \in M \overline{\alpha_i}$     | Tma. $T$               |
| (2) | $z (z = z) \in M \rightarrow \overline{\alpha_i}$ | EG 1 [Mteo. 3.6, 1.21] |
| (3) | $z (z = z) \in M$                                 | Tma. $T$               |
| (4) | $\overline{\alpha_i}$                             | MP 2, 3                |

Si  $x_1, \dots, x_n$  **son las variables libres** de  $\alpha_i$ , con  $x$  distinto de cada  $x_l$ , entonces claramente  $\alpha_j$  tiene las mismas variables libres y tenemos que:

$$\begin{aligned}\overline{\alpha_j}^c &\equiv \bigwedge \overline{x_1} \cdots \overline{x_n} \bar{x} \in M \overline{\alpha_i}, \\ \overline{\alpha_i}^c &\equiv \bigwedge \overline{x_1} \cdots \overline{x_n} \in M \overline{\alpha_i}.\end{aligned}$$

Como por el Metateorema D.4 se tiene que  $\bar{x}$  no está libre en  $\overline{\alpha_i}$  obtenemos la siguiente demostración de  $\overline{\alpha_i}^c$  en  $T$ :

- |     |                                                                                                                         |                                 |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|
| (1) | $\bigwedge \overline{x_1} \cdots \overline{x_n} \bar{x} \in M \overline{\alpha_i}$                                      | Tma. $T$                        |
| (2) | $\overline{x_1} \in M \wedge \cdots \wedge \overline{x_n} \in M \wedge z (z = z) \in M \rightarrow \overline{\alpha_i}$ | EG 1 [Mteo. 3.6, 1.21]          |
| (3) | $z (z = z) \in M$                                                                                                       | Tma. $T$                        |
| (4) | $\overline{x_1} \in M \wedge \cdots \wedge \overline{x_n} \in M$                                                        | Hipótesis                       |
| (5) | $\overline{x_1} \in M \wedge \cdots \wedge \overline{x_n} \in M \wedge z (z = z) \in M$                                 | IC 3, 4                         |
| (6) | $\overline{\alpha_i}$                                                                                                   | MP 2, 5                         |
| (7) | $\overline{x_1} \in M \wedge \cdots \wedge \overline{x_n} \in M \rightarrow \overline{\alpha_i}$                        | Tma. deducción                  |
| (8) | $\bigwedge \overline{x_1} \cdots \overline{x_n} \in M \overline{\alpha_i}$                                              | IG 7 ( $\times n$ ) [Mteo. 3.6] |

Si  $x_1, \dots, x_n, x$  **son las variables libres** de  $\alpha_i$ , entonces **las variables libres** de  $\alpha_j$  son  $x_1, \dots, x_n$  y tenemos que:

$$\begin{aligned}\overline{\alpha_j}^c &\equiv \bigwedge \overline{x_1} \cdots \overline{x_n} \bar{x} \in M \overline{\alpha_i}, \\ \overline{\alpha_i}^c &\equiv \bigwedge \overline{x_1} \cdots \overline{x_n} \bar{x} \in M \overline{\alpha_i},\end{aligned}$$

es decir,  $\overline{\alpha_i}^c \equiv \overline{\alpha_j}^c$ , con lo que claramente  $\vdash_T \overline{\alpha_i}^c$ .

Vemos pues que **en cualquiera de los tres casos** obtenemos que  $\vdash_T \bar{\alpha}_i^c$ .

Esto concluye la inducción y, por tanto, queda demostrado que  $\bar{\alpha}^c$  es un teorema de  $T$ .  Con esto hemos ya demostrado el resultado principal sobre interpretaciones que ya anunciamos al comienzo del anexo, pero aún podemos generalizarlo un poco más:

### Metateorema D.8

Fijada una interpretación  $M$  de una teoría  $S$  en otra teoría  $T$ , para cualesquiera fórmulas  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha$  de  $\mathcal{L}_S$  si se cumple

$$\alpha_1, \dots, \alpha_n \vdash \alpha,$$

entonces

$$\bar{\alpha}_1^c, \dots, \bar{\alpha}_n^c \vdash_T \bar{\alpha}^c$$

donde para cualquier fórmula  $\gamma$  de  $\mathcal{L}_S$  denotamos por  $\bar{\gamma}^c$  la traducción de su clausura.

Sea  $S'$  la teoría axiomática sobre  $\mathcal{L}_S$  cuyos axiomas propios son las fórmulas  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  y  $T'$  la teoría axiomática sobre  $\mathcal{L}_T$  cuyos axiomas propios son los de  $T$  juntos a las fórmulas  $\bar{\alpha}_1^c, \dots, \bar{\alpha}_n^c$ .

Si vemos que  $S'$  se interpreta en  $T'$  con la misma interpretación de  $\mathcal{L}_S$  en  $\mathcal{L}_T$  dada para  $S$  y  $T^8$ , como  $\vdash_{S'} \alpha$ , por el Metateorema D.7 obtenemos que  $\vdash_{T'} \bar{\alpha}^c$ , lo cual es equivalente a que se cumpla (ver **Nota** pág. 81)

$$\bar{\alpha}_1^c, \dots, \bar{\alpha}_n^c \vdash_T \bar{\alpha}^c$$

tal como queremos demostrar.

Sin más, como ya sabemos que  $S$  se interpreta en  $T$  es claro (por el Metateorema 2.1) que para  $T'$  se cumplen los puntos (I), (II) y (III) en la Definición D.1. También es claro que se cumple (IV) pues la traducción de la clausura cada axioma propio de  $S'$  es un axioma de  $T'$ , luego en efecto  $S'$  se interpreta en  $T'$  a través de  $M$  y con ello finalizamos la demostración. 

Una consecuencia inmediata de los resultados anteriores es que si  $T$  es una teoría consistente y  $S$  se interpreta en  $T$ , entonces  $S$  es consistente.

En efecto, si  $S$  no fuera consistente, por el Teorema 3.3 tenemos que dada cualquier sentencia  $\alpha$  de  $\mathcal{L}_S$  se cumple que  $\vdash_S \alpha$  y  $\vdash_S \neg \alpha$ , luego por el Metateorema D.7 obtenemos (teniendo en cuenta que  $\neg \bar{\alpha} \equiv \bar{\neg \alpha}$ ) que  $\vdash_T \bar{\alpha}$  y  $\vdash_T \neg \bar{\alpha}$ , lo cual claramente contradice la consistencia de  $T$ . 

Por otro lado, una vez ha quedado claro que formalmente la definición de interpretación cumple lo que esperábamos de ella, podemos ver que significa semánticamente que una teoría interprete a otra.

<sup>8</sup> Luego las traducciones de cualquier expresión serán las mismas que para la interpretación dada de  $S$  en  $T$ , con lo que en particular las traducciones de las clausuras de  $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  son las mismas tanto en la interpretación de  $S$  en  $T$  como en la de  $S'$  en  $T'$ .

Para ello, observemos que si  $S$  se interpreta en  $T$  a través de  $M$  y  $N$  es un modelo de  $T$ , entonces podemos considerar el conjunto (bien definido)  $N_M$  formado por los objetos  $a$  de  $N$  que cumplen

$$N \models (x \in M)[v_x^a],$$

donde por el Teorema 1.9 (y teniendo en cuenta que  $x \in M$  tiene a  $x$  como única variable libre)  $N_M$  no dependerá de la valoración escogida. Por la definición de interpretación parece entonces que estos objetos deben cumplir todos los axiomas de  $S$ , es decir, deben formar un modelo de  $S$ . A continuación veremos que, en efecto, esto es así luego semánticamente lo que la interpretación de una teoría  $S$  en otra teoría  $T$  nos dice es que en cualquier modelo  $N$  de  $T$  podemos encontrar un modelo de  $S$ , es decir, que podemos seleccionar ciertos objetos de  $N$  de modo que cumplan todos los axiomas de  $S$ .

Más aún, el modelo de  $S$  lo podemos elegir de modo que si  $\alpha$  es una sentencia de  $\mathcal{L}_S$  verdadera en dicho modelo, entonces su traducción será verdadera en el modelo original.

### Metateorema D.9: Modelos de interpretaciones

En las condiciones de la Definición D.1 se tiene que si  $N$  es un modelo de  $T$ , entonces el siguiente modelo  $N_M$  de  $\mathcal{L}_S$  es un modelo de  $S$  que no depende de la valoración  $u$  de  $N$  escogida:

- El universo de  $N_M$  es el formado por los objetos de  $N$  que cumplen

$$N \models (x \in M)[u_x^a].$$

- Para cada constante  $c$  de  $\mathcal{L}_S$  es  $N_M(c) \equiv N(\bar{c})[u]$ .
- Para cada relator  $n$ -ádico  $R_i^n$  de  $\mathcal{L}_S$  consideramos la relación  $n$ -ádica  $N_M(R_i^n)$  que será verdadera sobre unos objetos  $a_1, \dots, a_n$  de  $N_M$  si, y solo si,

$$N \models \bar{R}_i^n[u_{x_1 \dots x_n}^{a_1 \dots a_n}].$$

- Para cada funtor  $n$ -ádico  $f_i^n$  de  $\mathcal{L}_S$  consideramos la función  $n$ -ádica  $N_M(f_i^n)$  definida como

$$N_M(f_i^n)(a_1, \dots, a_n) \equiv N(\bar{f}_i^n)[u_{x_1 \dots x_n}^{a_1 \dots a_n}]$$

para cualesquiera objetos  $a_1, \dots, a_n$  de  $N_M$ .

- Asignamos la descripción impropia  $d$  al objeto  $N(x|x=x)[u]$ .

Además, dada una expresión  $\theta$  de  $\mathcal{L}_S$  y  $w$  una valoración de  $N_M$  se tiene que

$$N_M \models \theta[w] \text{ syss } N \models \bar{\theta} \left[ u_{\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n}^{w(x_1) \dots w(x_n)} \right]$$

si  $\theta$  es una fórmula y

$$N_M(\theta)[w] \equiv N(\bar{\theta}) \left[ u_{\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n}^{w(x_1) \dots w(x_n)} \right]$$

si  $\theta$  es un término, siendo  $x_1, \dots, x_n$  las variables libres de  $\theta^a$ .

En particular, se tiene que una fórmula  $\alpha$  de  $\mathcal{L}_S$  es verdadera en  $N_M$  si, y solo si,  $\bar{\alpha}^c$  (la traducción de la clausura de  $\alpha$ ) es verdadera en  $N$ .

<sup>a</sup> Observemos que la elección de la valoración  $u$  también será indiferente para la validez de este resultado, pues por el Metateorema D.4 las variables libres de  $\bar{\theta}$  son  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$  y el Teorema 1.9 nos garantiza entonces que la satisfacción no depende de la elección de  $u$ .

**En primer lugar**, observemos que la definición del modelo es correcta y no depende de la valoración  $u$  escogida:

- Si  $u$  y  $v$  son valoraciones de  $N$ , como la fórmula  $x \in M$  tiene a  $x$  como única variable libre, el Teorema 1.9 nos da que para cualquier objeto  $a$  de  $N$  se cumple que

$$N \models (x \in M)[u_x^a] \text{ syss } N \models (x \in M)[v_x^a].$$

- Si  $u$  y  $v$  son valoraciones de  $N$ , como  $\bar{c}$  es un designador, el Teorema 1.9 nos da que, en efecto,  $N(\bar{c})[u] \equiv N(\bar{c})[v]$ . Además, como tenemos que para cada constante  $c$  de  $\mathcal{L}_S$  se cumple que  $\vdash_T \bar{c} \in M$ , por el teorema de corrección (ver [Nota 2 pag. 82](#)) tenemos que  $N \models \bar{c} \in M$ , luego por el Teorema 1.12

$$N \models (x \in M) \left[ u_x^{N(\bar{c})[u]} \right]$$

y así  $N(\bar{c})[u]$  es realmente un objeto de  $N_M$ .

- Si  $u$  y  $v$  son valoraciones de  $N$ , como las únicas variables libres de  $\overline{R_i^n}$  son  $x_1, \dots, x_n$ , por el el Teorema 1.9 se tiene que

$$N \models \overline{R_i^n}[u_{x_1 \dots x_n}^{a_1 \dots a_n}] \text{ syss } N \models \overline{R_i^n}[v_{x_1 \dots x_n}^{a_1 \dots a_n}].$$

- Si  $u$  y  $v$  son valoraciones de  $N$ , como las únicas variables libres de  $\overline{f_i^n}$  son  $x_1, \dots, x_n$ , por el el Teorema 1.9 se tiene que

$$N(\overline{f_i^n})[u_{x_1 \dots x_n}^{a_1 \dots a_n}] \equiv N(\overline{f_i^n})[v_{x_1 \dots x_n}^{a_1 \dots a_n}].$$

Además, como tenemos que para cada funtor  $n$ -ádico  $f_i^n$  de  $\mathcal{L}_S$  se cumple que

$$\vdash_T \bigwedge x_1 \dots x_n \in M \overline{f_i^n} \in M,$$

por el Metateorema 3.6 se tiene que

$$\vdash_T \bigwedge x_1 \dots x_n \left( x_1 \in M \wedge \dots \wedge x_n \in M \rightarrow \overline{f_i^n} \in M \right)$$

y por el teorema de corrección obtenemos que

$$N \models \bigwedge x_1 \dots x_n \left( x_1 \in M \wedge \dots \wedge x_n \in M \rightarrow \overline{f_i^n} \in M \right).$$

Esto implica que para cualesquiera objetos  $a_1, \dots, a_n$  de  $N$  si se cumple que para cada  $i = 1, \dots, n$

$$N \models (x_i \in M) \left[ u_{x_1 \dots x_n}^{a_1 \dots a_n} \right], \quad (\text{D.57})$$

entonces se satisface

$$N \models \left( \overline{f_i^n} \in M \right) \left[ u_{x_1 \dots x_n}^{a_1 \dots a_n} \right]. \quad (\text{D.58})$$

Por otra parte, observemos que si tenemos  $a_1, \dots, a_n$  objetos de  $N$ , por el Teorema 1.9 y 1.12 se tiene que

$$\begin{aligned} N \models (x \in M)[u_x^{a_i}] \text{ syss } N \models (x \in M) \left[ u_x^{N(x)[u_x^{a_i}]} \right] \text{ syss } N \models (x \in M) \left[ u_{x_i x}^{a_i N(x)[u_x^{a_i}]} \right] \\ \text{syss } N \models (x_i \in M)[u_{x_i}^{a_i}] \text{ syss } N \models (x_i \in M)[u_{x_1 \dots x_n}^{a_1 \dots a_n}]. \end{aligned} \quad (\text{D.59})$$

Por tanto, si  $a_1, \dots, a_n$  son objetos de  $N_M$ , es decir, tales que  $N \models (x \in M)[u_x^{a_i}]$  para cada  $i = 1, \dots, n$ , por (D.59) obtenemos que

$$N \models (x_i \in M) \left[ u_{x_1 \dots x_n}^{a_1 \dots a_n} \right]$$

para cada  $i = 1, \dots, n$  y por (D.57) y (D.58) concluimos que

$$N \models (\bar{f}_i^n \in M) \left[ u_{x_1 \dots x_n}^{a_1 \dots a_n} \right],$$

lo cual por el Teorema 1.9 y 1.12 ocurre si, y solo si,

$$N \models (x \in M) \left[ u_x^{N(\bar{f}_i^n)[u_{x_1 \dots x_n}^{a_1 \dots a_n}]} \right].$$

Queda entonces demostrado que si  $a_1, \dots, a_n$  son objetos de  $N_M$ , entonces

$$N(\bar{f}_i^n) \left[ u_{x_1 \dots x_n}^{a_1 \dots a_n} \right]$$

es también un objeto de  $N_M$ .

- Si  $u, v$  dos valoraciones de  $N$ , como  $x|(x = x)$  no tiene variables libres, por el Teorema 1.9 esta claro que  $N(x|x = x)[u] \equiv N(x|x = x)[v]$ . Además, como se tiene que  $\frac{\vdash}{T} (x|x = x) \in M$ , por el teorema de corrección obtenemos que

$$N \models (x|x = x) \in M$$

y por el Teorema 1.12 concluimos que

$$N \models (x \in M) \left[ u_x^{N(x|x = x)[u]} \right],$$

es decir, que  $N(x|x = x)[u]$  es un objeto de  $N_M$ .

**Veamos ahora que** si  $w$  es una valoración de  $N_M$

$$N_M \models \theta[w] \text{ syss } N \models \bar{\theta} \left[ u_{\bar{x}_1}^{w(x_1) \dots w(x_n)} \dots \bar{x}_n \right] \quad (\text{D.60})$$

si  $\theta$  es una fórmula y

$$N_M(\theta)[w] \equiv N(\bar{\theta}) \left[ u_{\bar{x}_1}^{w(x_1) \dots w(x_n)} \dots \bar{x}_n \right] \quad (\text{D.61})$$

si  $\theta$  es un término, siendo  $x_1, \dots, x_n$  las variables libres de  $\theta$ .

Lo demostraremos por inducción en la longitud de  $\theta$ :

- Si  $\theta \equiv z$ , entonces

$$\begin{aligned} N_M(\theta)[w] &\equiv N_M(z)[w] \equiv w(z), \\ N(\bar{\theta}) \left[ u_{\bar{z}}^{w(z)} \right] &\equiv N(\bar{z}) \left[ u_{\bar{z}}^{w(z)} \right] \equiv u_{\bar{z}}^{w(z)}(\bar{z}) \equiv w(z). \end{aligned}$$

- Si  $\theta \equiv c$ , entonces

$$\begin{aligned} N_M(\theta)[w] &\equiv N_M(c)[w] \equiv N_M(c) \equiv N(\bar{c})[u] \\ N(\bar{\theta})[u] &\equiv N(\bar{c})[u]. \end{aligned}$$

- Si  $\theta \equiv R_i^m t_1 \cdots t_m$ , entonces las variables libres de cada  $t_j$  estarán entre  $x_1, \dots, x_n$ , con lo que por hipótesis de inducción podemos asegurar<sup>9</sup> que para cada  $j = 1, \dots, m$

$$N_M(t_j)[w] \equiv N(\bar{t}_j) \left[ u_{\bar{x}_1}^{w(x_1)} \cdots u_{\bar{x}_n}^{w(x_n)} \right]. \quad (\text{D.62})$$

Ahora, por (D.62), el Teorema 1.9 y el Metateorema 1.12 obtenemos

$$\begin{aligned} N_M \models \theta[w] \text{ syss } N_M(R_i^m) (N_M(t_1)[w], \dots, N_M(t_m)[w]) \text{ syss} \\ N \models \overline{R_i^m} \left[ u_{z_1}^{N_M(t_1)[w] \cdots N_M(t_m)[w]} \right] \text{ syss} \\ N \models \overline{R_i^m} \left[ u_{z_1}^{N(\bar{t}_1) \left[ u_{\bar{x}_1}^{w(x_1)} \cdots u_{\bar{x}_n}^{w(x_n)} \right] \cdots N(\bar{t}_m) \left[ u_{\bar{x}_1}^{w(x_1)} \cdots u_{\bar{x}_n}^{w(x_n)} \right]} \right] \text{ syss} \\ N \models \overline{R_i^m} \left[ u_{\bar{x}_1}^{w(x_1) \cdots w(x_n)} \cdots u_{\bar{x}_n}^{w(x_1) \cdots w(x_n)} \right] \text{ syss} \\ N \models \overline{R_i^m} (\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_m) \left[ u_{\bar{x}_1}^{w(x_1)} \cdots u_{\bar{x}_n}^{w(x_n)} \right] \text{ syss } N \models \bar{\theta} \left[ u_{\bar{x}_1}^{w(x_1)} \cdots u_{\bar{x}_n}^{w(x_n)} \right] \end{aligned}$$

donde  $z_1, \dots, z_m$  son las variables libres de  $\overline{R_i^m}$ .

- Si  $\theta \equiv f_i^m t_1 \cdots t_m$  es completamente análogo al caso anterior.
- Si  $\theta \equiv \neg \alpha$ , por hipótesis de inducción tenemos que

$$N_M \models \alpha[w] \text{ syss } N \models \bar{\alpha} \left[ u_{\bar{x}_1}^{w(x_1)} \cdots u_{\bar{x}_n}^{w(x_n)} \right]$$

y así

$$\begin{aligned} N_M \models \theta[w] \text{ syss no } N_M \models \alpha[w] \text{ syss no } N \models \bar{\alpha} \left[ u_{\bar{x}_1}^{w(x_1)} \cdots u_{\bar{x}_n}^{w(x_n)} \right] \text{ syss} \\ N \models \bar{\theta} \left[ u_{\bar{x}_1}^{w(x_1)} \cdots u_{\bar{x}_n}^{w(x_n)} \right]. \end{aligned}$$

- Si  $\theta \equiv \alpha \rightarrow \beta$ , por hipótesis de inducción tenemos que

$$N_M \models \alpha[w] \text{ syss } N \models \bar{\alpha} \left[ u_{\bar{x}_1}^{w(x_1)} \cdots u_{\bar{x}_n}^{w(x_n)} \right]$$

<sup>9</sup> Observemos que por el Metateorema D.4 las variables libres de cada  $\bar{t}_i$  estarán entre  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ , con lo que por el Teorema 1.9 podemos añadir las que nos falten sin que se alteren el valor de la satisfacción de  $\bar{t}_j$ .

y

$$N_M \models \beta[w] \text{ syss } N \models \bar{\beta} \left[ u_{\overline{x_1}}^{w(x_1) \cdots w(x_n)} \right],$$

con lo que

$$\begin{aligned} N_M \models \theta[w] \text{ syss no } N_M \models \alpha[w] \text{ o } N_M \models \beta[w] \text{ syss no } N \models \bar{\alpha} \left[ u_{\overline{x_1}}^{w(x_1) \cdots w(x_n)} \right] \\ \text{ o } N \models \bar{\beta} \left[ u_{\overline{x_1}}^{w(x_1) \cdots w(x_n)} \right] \text{ syss } N \models \bar{\theta} \left[ u_{\overline{x_1}}^{w(x_1) \cdots w(x_n)} \right]. \end{aligned}$$

- Si  $\theta \equiv \bigwedge z \alpha$ , entonces las variables libres de  $\alpha$  son  $x_1, \dots, x_n$  y, tal vez,  $z$ . Por tanto, por hipótesis de inducción tenemos que para cualquier valoración  $v$  de  $N_M$  se cumple que<sup>10</sup>

$$N_M \models \alpha[v] \text{ syss } N \models \bar{\alpha} \left[ u_{\overline{x_1}}^{v(x_1) \cdots v(x_n) v(z)} \right]. \quad (\text{D.63})$$

Por un lado tenemos que por (D.63) y el Teorema 1.9 (teniendo en cuenta que  $z$  es distinta de cada  $x_i$  por estar los  $x_i$  libres en  $\theta$ )

$$\begin{aligned} N_M \models \theta[w] \text{ syss para cada objeto } a \text{ de } N_M \quad N_M \models \alpha[w_z^a] \\ \text{ syss para cada objeto } a \text{ de } N_M \quad N \models \bar{\alpha} \left[ u_{\overline{x_1}}^{w_z^a(x_1) \cdots w_z^a(x_n) w_z^a(z)} \right] \\ \text{ syss para cada objeto } a \text{ de } N_M \quad N \models \bar{\alpha} \left[ u_{\overline{x_1}}^{w(x_1) \cdots w(x_n) a} \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.64})$$

Por otra parte, como dado  $a$  un objeto de  $N$  por los Teoremas 1.9 y 1.12 tenemos que

$$\begin{aligned} N \models (\bar{z} \in M) \left[ u_{\overline{x_1}}^{w(x_1) \cdots w(x_n) a} \right] \text{ syss } N \models (x \in M) \left[ u_{\overline{x_1}}^{w(x_1) \cdots w(x_n) a N(\bar{z})} \left[ u_{\overline{x_1}}^{w(x_1) \cdots w(x_n) a} \right] \right] \\ \text{ syss } N \models (x \in M) [u_x^a], \end{aligned} \quad (\text{D.65})$$

teniendo en cuenta que  $\bar{\theta} \equiv \bigwedge \bar{z} (\bar{z} \in M \rightarrow \bar{\alpha})$  obtenemos que

$$\begin{aligned} N \models \bar{\theta} \left[ u_{\overline{x_1}}^{w(x_1) \cdots w(x_n)} \right] \text{ syss para cada objeto } a \text{ de } N \\ N \models (\bar{z} \in M \rightarrow \bar{\alpha}) \left[ u_{\overline{x_1}}^{w(x_1) \cdots w(x_n) a} \right] \text{ syss para cada objeto } a \text{ de } N \\ \text{ no } N \models (\bar{z} \in M) \left[ u_{\overline{x_1}}^{w(x_1) \cdots w(x_n) a} \right] \text{ o } N \models \bar{\alpha} \left[ u_{\overline{x_1}}^{w(x_1) \cdots w(x_n) a} \right] \text{ syss} \\ \text{ para cada objeto } a \text{ de } N \text{ no } N \models (x \in M) [u_x^a] \text{ o } N \models \bar{\alpha} \left[ u_{\overline{x_1}}^{w(x_1) \cdots w(x_n) a} \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.66})$$

Supongamos pues que se cumple que  $N \models \theta[w]$ . Entonces, dado un objeto  $a$  de  $N$  que cumpla  $N \models (x \in M) [u_x^a]$ , por definición tenemos que  $a$  será un objeto de  $N_M$  y por (D.64) se cumple que

$$N \models \bar{\alpha} \left[ u_{\overline{x_1}}^{w(x_1) \cdots w(x_n) a} \right].$$

Por (D.66) y la arbitrariedad de  $a$  concluimos que

$$N \models \bar{\theta} \left[ u_{\overline{x_1}}^{w(x_1) \cdots w(x_n)} \right].$$

<sup>10</sup> Observemos que si  $z$  no está libre en  $\alpha$ , entonces por el Metateorema D.4  $\bar{z}$  no lo está en  $\bar{\alpha}$  y el Teorema 1.9 nos garantiza que igualmente se cumple (D.63).

Recíprocamente, supongamos que

$$N \models \bar{\theta} \left[ u_{\frac{x_1}{x_1}}^{w(x_1) \cdots w(x_n)} \right].$$

Entonces, dado un objeto  $a$  de  $N_M$ , por definición se cumple que  $N \models (x \in M)[u_x^a]$  y por (D.66) obtenemos entonces que

$$N \models \bar{\alpha} \left[ u_{\frac{x_1}{x_1}}^{w(x_1) \cdots w(x_n)a} \right].$$

Por (D.64) y la arbitrariedad de  $a$  concluimos que  $N_M \models \theta[w]$ .

- Si  $\theta \equiv z|\alpha$ , entonces las variables libres de  $\alpha$  son  $x_1, \dots, x_n$  y, tal vez,  $z$ . Por tanto, por hipótesis de inducción tenemos que para cualquier valoración  $v$  de  $N_M$  se cumple que<sup>11</sup>

$$N_M \models \alpha[v] \text{ syss } N \models \bar{\alpha} \left[ u_{\frac{x_1}{x_1}}^{v(x_1) \cdots v(x_n)v(z)} \right]. \quad (\text{D.67})$$

Veamos en primer lugar que existe un único objeto  $a$  de  $N_M$  tal que

$$N_M \models \alpha[w_z^a] \quad (\text{D.68})$$

si, y solo si, existe un único objeto  $b$  de  $N$  tal que

$$N \models (x \in M)[u_x^b] \text{ y } N \models \bar{\alpha} \left[ u_{\frac{x_1}{x_1}}^{w(x_1) \cdots w(x_n)b} \right]. \quad (\text{D.69})$$

Además, dicho objeto único es el mismo.

En efecto, si existe un único objeto  $a$  de  $N_M$  tal que cumple (D.68), por ser un objeto de  $N_M$  es claro que cumple  $N \models (x \in M)[u_x^a]$  y por (D.67) tenemos que se cumple

$$N \models \bar{\alpha} \left[ u_{\frac{x_1}{x_1}}^{w_z^a(x_1) \cdots w_z^a(x_n)w_z^a(z)} \right],$$

que por el Teorema 1.9 (teniendo en cuenta que  $z$  es distinto de cada  $x_i$ ) es equivalente a

$$N \models \bar{\alpha} \left[ u_{\frac{x_1}{x_1}}^{w(x_1) \cdots w(x_n)a} \right].$$

Es decir,  $a$  cumple (D.69).

Además, si existe otro objeto  $b$  de  $N$  que cumple (D.69), entonces por la primera afirmación se tiene que  $b$  es un objeto de  $N_M$  y como la segunda es equivalente (por el Teorema 1.9) a

$$N \models \bar{\alpha} \left[ u_{\frac{x_1}{x_1}}^{w_z^b(x_1) \cdots w_z^b(x_n)w_z^b(z)} \right],$$

por (D.67) obtenemos que  $N_M \models \alpha[w_z^b]$ . Por unicidad tenemos entonces que  $b \equiv a$ .

Recíprocamente, si existe un único objeto  $b$  de  $N$  tal que cumple (D.69), por el mismo argumento del párrafo anterior se tiene que  $N_M \models \alpha[w_z^b]$ .

Además, si existe otro objeto  $a$  de  $N_M$  que cumple (D.68), por lo visto en el párrafo después de (D.69) se tiene que  $a$  cumple (D.69) y por unicidad obtenemos que  $a \equiv b$ .

<sup>11</sup> Observemos que si  $z$  no está libre en  $\alpha$ , entonces por el Metateorema D.4  $\bar{z}$  no lo está en  $\bar{\alpha}$  y el Teorema 1.9 nos garantiza que igualmente se cumple (D.67).



Teniendo en cuenta (D.65) hemos probado que existe un único objeto  $a$  de  $N_M$  tal que

$$N_M \models \alpha[w_z^a]$$

si, y solo si, existe un único objeto  $a$  de  $N$  tal que

$$N \models (\bar{z} \in M \wedge \bar{\alpha}) \left[ u_{\bar{x}_1}^{w(x_1) \cdots w(x_n)a} \cdots \bar{z} \right],$$

y en dicho caso son el mismo objeto único.

Con esto y teniendo en cuenta que  $\bar{\theta} \equiv \bar{z} | (\bar{z} \in M \wedge \bar{\alpha})$  distinguimos dos casos:

- Si existe un único objeto  $a$  de  $N_M$  tal que  $N_M \models \alpha[w_z^a]$ , entonces  $N_M(\theta)[w] \equiv a$ , pero por lo visto también se tiene que dicho  $a$  es el único objeto de  $N$  que cumple que

$$N \models (\bar{z} \in M \wedge \bar{\alpha}) \left[ u_{\bar{x}_1}^{w(x_1) \cdots w(x_n)a} \cdots \bar{z} \right],$$

luego

$$N(\bar{\theta}) \left[ u_{\bar{x}_1}^{w(x_1) \cdots w(x_n)} \cdots \bar{x}_n \right] \equiv a \equiv N_M(\theta)[w].$$

- Si no existe un único objeto  $a$  de  $N_M$  tal que  $N_M \models \alpha[w_z^a]$ , entonces

$$N_M(\theta)[w] \equiv d \equiv N(x|x=x)[u],$$

pero por lo visto tampoco existe un único objeto  $a$  de  $N$  tal que

$$N \models (\bar{z} \in M \wedge \bar{\alpha}) \left[ u_{\bar{x}_1}^{w(x_1) \cdots w(x_n)a} \cdots \bar{z} \right],$$

luego la descripción es también impropia en dicho caso y se tiene (ver Nota 3 pág. 23) que

$$N(\bar{\theta}) \left[ u_{\bar{x}_1}^{w(x_1) \cdots w(x_n)} \cdots \bar{x}_n \right] \equiv N(x|x=x)[u] \equiv N_M(\theta)[w].$$

En cualquier caso se cumple lo deseado.

Con esto se concluye la inducción y con ello esta parte de la prueba.

**Observemos ahora que** si es  $\alpha$  una fórmula de  $\mathcal{L}_S$  con variables libres  $x_1, \dots, x_n$ , entonces

$$N \models \bar{\alpha}^c[u] \text{ syss para cualesquiera objetos } a_1, \dots, a_n \text{ de } N_M \quad N \models \bar{\alpha} \left[ u_{\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n}^{a_1 \cdots a_n} \right]. \quad (\text{D.70})$$

Por el Metateorema 3.6 tenemos que

$$\vdash \bar{\alpha}^c \leftrightarrow \bigwedge \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n (\bar{x}_1 \in M \wedge \cdots \wedge \bar{x}_n \in M \rightarrow \bar{\alpha}),$$

luego por el teorema de corrección, (1.2) y un razonamiento análogo a lo visto en (D.65) tenemos que

$$\begin{aligned} N \models \bar{\alpha}^c[u] \text{ syss } N \models & \left( \bigwedge \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n (\bar{x}_1 \in M \wedge \cdots \wedge \bar{x}_n \in M \rightarrow \bar{\alpha}) \right) [u] \\ & \text{syss para cualesquiera objetos } a_1, \dots, a_n \text{ de } N, \text{ si} \\ N \models & (\bar{x}_1 \in M \wedge \cdots \wedge \bar{x}_n \in M) \left[ u_{\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n}^{a_1 \cdots a_n} \right] \text{ entonces } N \models \bar{\alpha} \left[ u_{\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n}^{a_1 \cdots a_n} \right] \\ & \text{syss para cualesquiera objetos } a_1, \dots, a_n \text{ de } N, \text{ si para cada } i = 1, \dots, n \\ N \models & (x \in M)[u_x^{a_i}] \text{ entonces } N \models \bar{\alpha} \left[ u_{\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n}^{a_1 \cdots a_n} \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.71})$$

Es claro entonces que si se cumple que  $N \models \bar{\alpha}^c[u]$  y  $a_1, \dots, a_n$  son objetos de  $N_M$ , por definición se cumple que  $N \models (x \in M)[u_x^{a_i}]$  para cada  $i = 1, \dots, n$ , luego por (D.71) se cumple que

$$N \models \bar{\alpha} \left[ u_{\frac{a_1 \dots a_n}{x_1 \dots x_n}} \right].$$

Recíprocamente, si para cualesquiera objetos  $b_1, \dots, b_n$  de  $N_M$  se cumple que

$$N \models \bar{\alpha} \left[ u_{\frac{b_1 \dots b_n}{x_1 \dots x_n}} \right] \quad (\text{D.72})$$

y son  $a_1, \dots, a_n$  objetos de  $N$  tales que para cada  $i = 1, \dots, n$  cumplen que

$$N \models (x \in M)[u_x^{a_i}],$$

entonces por definición  $a_1, \dots, a_n$  son objetos de  $N_M$  y debe cumplirse (D.72) para estos objetos. Por la arbitrariedad de los  $a_1, \dots, a_n$  y (D.71) concluimos que  $N \models \bar{\alpha}^c[u]$ .

Con todo, queda demostrado (D.70).

**Veamos ahora que** una fórmula  $\alpha$  de  $\mathcal{L}_S$  es verdadera en  $N_M$  si, y solo si,  $\bar{\alpha}^c$  es verdadera en  $N$ .

Supongamos pues que  $\alpha$  es verdadera en  $N_M$  y sea  $u$  una valoración de  $N$ . Por (D.70) basta ver que si  $x_1, \dots, x_n$  son las variables libres de  $\alpha$ , entonces para cualesquiera objetos  $a_1, \dots, a_n$  de  $N_M$  se cumple que

$$N \models \bar{\alpha} \left[ u_{\frac{a_1 \dots a_n}{x_1 \dots x_n}} \right].$$

Ahora bien, si tomamos  $w$  una valoración de  $N_M$  tal que  $w(x_i) \equiv a_i$ , lo anterior es equivalente a ver que

$$N \models \bar{\alpha} \left[ u_{\frac{w(x_1) \dots w(x_n)}{x_1 \dots x_n}} \right],$$

que por (D.60) es equivalente a que  $N_M \models \alpha[w]$ , lo cual es cierto por ser  $\alpha$  verdadera en  $N_M$ .

Recíprocamente, supongamos que  $\bar{\alpha}^c$  es verdadera en  $N$  y sea  $w$  una valoración de  $N_M$ . Entonces, por (D.70) tenemos que

$$N \models \bar{\alpha} \left[ u_{\frac{w(x_1) \dots w(x_n)}{x_1 \dots x_n}} \right],$$

que por (D.60) es equivalente a que  $N_M \models \alpha[w]$  y la arbitrariedad de  $w$  prueba que  $\alpha$  es verdadera en  $N_M$ .

**Finalmente veamos que**, en efecto,  $N_M$  es un modelo de  $S$ , es decir, que si  $\alpha$  es un axioma de  $S$ , entonces se cumple que  $N_M \models \alpha$ .

Sin más, por definición de interpretación tenemos que  $\bar{\alpha}^c$  será un teorema de  $T$ , luego por el teorema de corrección  $\bar{\alpha}^c$  será verdadera en  $N$  y por lo que acabamos de demostrar  $\alpha$  es verdadera en  $N_M$  como queríamos ver. 

Finalizaremos este anexo estudiando con más detalle un ejemplo muy importante en la lógica matemática, las teorías que interpretan a AP. Estas teorías se conocen como **teorías aritméticas** y son tan importantes que conviene tener una definición de las mismas que sea independiente de AP:

### Definición D.10: Teorías aritméticas

Una teoría axiomática  $T$  sobre un lenguaje formal  $\mathcal{L}$  **traduce a**  $\mathcal{L}_a$  si existen una fórmula  $x \in \mathbb{N}$  de  $\mathcal{L}$ , un designador 0 y unos términos  $x', x + y, x \cdot y$  con las variables libres indicadas<sup>a</sup> de manera que

$$\vdash_T x | (x = x) = 0.$$

En dicho caso, se dice que una expresión de  $\mathcal{L}$  es una **expresión aritmética pura** si se puede probar que lo está a partir de las siguientes reglas:

- a) 0 y las variables son términos aritméticos.
- b) Si  $t_1$  y  $t_2$  son términos aritméticos, entonces lo son  $t'_1, t_1 + t_2$  y  $t_1 \cdot t_2$ .
- c) Si  $t_1$  y  $t_2$  son términos aritméticos, entonces  $t_1 = t_2$  es una fórmula aritmética.
- d) Si  $\alpha$  y  $\beta$  son fórmulas aritméticas, también lo son  $\neg\alpha, \alpha \rightarrow \beta$  y  $\bigwedge x \in \mathbb{N} \alpha$ .

En general, diremos que una expresión de  $\mathcal{L}$  es una **expresión aritmética** si en  $T$  puede demostrarse que es equivalente o igual (en función de si es una fórmula o un término) a una expresión aritmética pura.

Diremos además que  $T$  es una **teoría aritmética** si también se cumplen:

- (i)  $\vdash_T 0 \in \mathbb{N}$ .
- (ii)  $\vdash_T \bigwedge n \in \mathbb{N} n' \in \mathbb{N}$ .
- (iii)  $\vdash_T \bigwedge n \in \mathbb{N} n' \neq 0$ .
- (iv)  $\vdash_T \bigwedge mn \in \mathbb{N} (m' = n' \rightarrow m = n)$ .
- (v)  $\vdash_T \bigwedge m \in \mathbb{N} m + 0 = m$ .
- (vi)  $\vdash_T \bigwedge mn \in \mathbb{N} m + n' = (m + n)'$ .
- (vii)  $\vdash_T \bigwedge n \in \mathbb{N} n \cdot 0 = 0$ .
- (viii)  $\vdash_T \bigwedge mn \in \mathbb{N} m \cdot n' = m \cdot n + m$ .
- (ix)  $\vdash_T \bigwedge x_1 \cdots x_n \in \mathbb{N} (\phi(0) \wedge \bigwedge n \in \mathbb{N} (\phi(n) \rightarrow \phi(n')) \rightarrow \bigwedge n \in \mathbb{N} \phi(n))$ ,  
donde  $\phi(x, x_1, \dots, x_n)$  es una fórmula aritmética pura con las variables libres indicadas<sup>b</sup>.

<sup>a</sup> Como en el caso de las interpretaciones, todo esto es mera notación y no tiene nada que ver con el relator  $\in$  de las teorías de conjuntos o la constante y funtores de  $\mathcal{L}_a$ . Simplemente los denotamos de este modo porque facilita la notación.

<sup>b</sup> Si  $\phi$  no tiene más variables libres distintas de  $x$ , entonces la fórmula que debe ser un teorema de  $T$  es

$$\phi(0) \wedge \bigwedge n \in \mathbb{N} (\phi(n) \rightarrow \phi(n')) \rightarrow \bigwedge n \in \mathbb{N} \phi(n).$$

Una primera observación importante sobre la definición anterior es que para cualquier fórmula aritmética  $\phi$ , existe una fórmula aritmética pura con las mismas variables libres que es equivalente a  $\phi$  en  $T$ .

Como  $\phi$  es una fórmula aritmética, por definición tenemos que existe una fórmula aritmética pura  $\psi$  tal que

$$\vdash_T \phi \leftrightarrow \psi. \quad (\text{D.73})$$

Además, si son  $z_1, \dots, z_m$  las variables libres de  $\psi$  que no están libres en  $\phi$ , observemos que

$$\vdash_T \phi \leftrightarrow \bigwedge z_1 \cdots z_m \in \mathbb{N} \phi. \quad (\text{D.74})$$

En efecto, tenemos la siguiente demostración:

|      |                                                                               |                                                     |
|------|-------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| (1)  | $\phi$                                                                        | Hipótesis                                           |
| (2)  | $z_1 \in \mathbb{N} \wedge \cdots \wedge z_m \in \mathbb{N}$                  | Hipótesis                                           |
| (3)  | $\phi$                                                                        | R 1                                                 |
| (4)  | $z_1 \in \mathbb{N} \wedge \cdots \wedge z_m \in \mathbb{N} \rightarrow \phi$ | Tma. deducción                                      |
| (5)  | $\bigwedge z_1 \cdots z_m \in \mathbb{N} \phi$                                | IG 4 ( $z_1, \dots, z_n$ no libre en 1) [Mteo. 3.6] |
| (6)  | $\phi \rightarrow \bigwedge z_1 \cdots z_n \in \mathbb{N} \phi$               | Tma. deducción                                      |
| (7)  | $\bigwedge z_1 \cdots z_n \in \mathbb{N} \phi$                                | Hipótesis                                           |
| (8)  | $0 \in \mathbb{N} \wedge \cdots 0 \in \mathbb{N} \rightarrow \phi$            | EG 7 [Mteo. 3.6 y 1.21]                             |
| (9)  | $0 \in \mathbb{N} \wedge \cdots 0 \in \mathbb{N}$                             | IC (Tma. $T$ [(i)])                                 |
| (10) | $\phi$                                                                        | MP 8, 9                                             |
| (11) | $\bigwedge z_1 \cdots z_n \in \mathbb{N} \phi \rightarrow \phi$               | Tma. deducción                                      |
| (12) | $\phi \leftrightarrow \bigwedge z_1 \cdots z_n \in \mathbb{N} \phi$           | IB 6, 11                                            |

Utilizando el Teorema 2.11 2) junto a (D.73) (y el Teorema 2.7) obtenemos que

$$\vdash_T (z_1 \in \mathbb{N} \wedge \cdots \wedge z_m \in \mathbb{N} \rightarrow \phi) \leftrightarrow (z_1 \in \mathbb{N} \wedge \cdots \wedge z_m \in \mathbb{N} \rightarrow \psi),$$

con lo que por los Metateoremas 2.10 y 3.6 se obtiene que

$$\vdash_T \bigwedge z_1 \cdots z_m \in \mathbb{N} \phi \leftrightarrow \bigwedge z_1 \cdots z_m \in \mathbb{N} \psi,$$

luego si las variables libres de  $\phi$  son  $x_1, \dots, x_n$  es inmediato que

$$\vdash_T \bigwedge z_1 \cdots z_m \in \mathbb{N} \phi \leftrightarrow \bigwedge z_1 \cdots z_m \in \mathbb{N} \psi \wedge x_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge x_n = x_n. \quad (\text{D.75})$$

Utilizando la regla (MBB) junto a (D.74) y (D.75) obtenemos finalmente que

$$\vdash_T \phi \leftrightarrow \bigwedge z_1 \cdots z_m \in \mathbb{N} \psi \wedge x_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge x_n = x_n$$

donde la última fórmula es aritmética pura (pues en la demostración del Metateorema D.11 se ve que la conjunción de fórmulas aritméticas puras es una fórmula aritmética pura) y tiene las mismas variables libres que  $\phi$ . 

Lo anterior también nos permite obtener que (ix) será también un teorema de  $T$  si  $\phi$  es una fórmula aritmética cualquiera no necesariamente pura.

En efecto, si  $\phi(x, x_1, \dots, x_n)$  es una fórmula aritmética con las variables libres indicadas, sabemos que existe una fórmula aritmética pura  $\psi(x, x_1, \dots, x_n)$  con las variables libres indicadas tal que

$$\vdash_T \phi \leftrightarrow \psi.$$

Así, por el Metateorema 1.18 obtenemos que

$$\begin{aligned} \vdash_T \phi(0) &\leftrightarrow \psi(0) \\ \vdash_T \phi(n) &\leftrightarrow \psi(n) \\ \vdash_T \phi(n') &\leftrightarrow \psi(n') \end{aligned}$$

y por el Teorema 2.11 que

$$\begin{aligned} \vdash_T \bigwedge x_1 \cdots x_n \in \mathbb{N} \left( \phi(0) \wedge \bigwedge n \in \mathbb{N} (\phi(n) \rightarrow \phi(n')) \rightarrow \bigwedge n \in \mathbb{N} \phi(n) \right) &\leftrightarrow \\ \bigwedge x_1 \cdots x_n \in \mathbb{N} \left( \psi(0) \wedge \bigwedge n \in \mathbb{N} (\psi(n) \rightarrow \psi(n')) \rightarrow \bigwedge n \in \mathbb{N} \psi(n) \right). \end{aligned}$$

Como por (ix) la segunda fórmula en la equivalencia anterior es un teorema de  $T$ , concluimos que la primera también lo será tal y como queríamos ver. 

Antes de ver que la definición anterior es equivalente a decir AP se interpreta en  $T$ , veamos un resultado básico sobre las expresiones aritméticas:

### Metateorema D.11

Sea  $T$  una teoría aritmética sobre un lenguaje formal  $\mathcal{L}$  y  $\alpha, \beta$  dos fórmulas aritméticas. Entonces se cumplen:

- (i)  $\alpha \vee \beta$  es una fórmula aritmética.
- (ii)  $\alpha \wedge \beta$  es una fórmula aritmética.
- (iii)  $\alpha \leftrightarrow \beta$  es una fórmula aritmética.
- (iv)  $\forall n \in \mathbb{N} \alpha$  es una fórmula aritmética.

**Comencemos viendo que** si  $\alpha$  y  $\beta$  son fórmulas aritméticas puras, entonces  $\alpha \vee \beta$ ,  $\alpha \wedge \beta$  y  $\alpha \leftrightarrow \beta$  también lo son.

En efecto, por definición tenemos que

$$\begin{aligned} \alpha \vee \beta &\equiv \neg \alpha \rightarrow \beta, \\ \alpha \wedge \beta &\equiv \neg(\neg \alpha \vee \neg \beta) \equiv \neg(\neg \neg \alpha \rightarrow \neg \beta), \\ \alpha \leftrightarrow \beta &\equiv ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)) \equiv \neg(\neg \neg(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg(\beta \rightarrow \alpha)), \end{aligned}$$

y es inmediato a partir de la Definición D.10 que las tres son fórmulas aritméticas puras siempre que lo sean  $\alpha$  y  $\beta$ .

**En general**, si  $\alpha$  y  $\beta$  son expresiones aritméticas, entonces existen dos fórmulas aritméticas puras  $\alpha', \beta'$  tales que  $\vdash_T \alpha \leftrightarrow \alpha'$  y  $\vdash_T \beta \leftrightarrow \beta'$ . Por lo visto tenemos que  $\alpha' \vee \beta', \alpha' \wedge \beta'$

y  $\alpha' \leftrightarrow \beta'$  son fórmulas aritméticas puras y utilizando el Teorema 2.11 3), 4) y 5) respectivamente obtenemos que

$$\begin{aligned}\vdash_T (\alpha \vee \beta) &\leftrightarrow (\alpha' \vee \beta'), \\ \vdash_T (\alpha \wedge \beta) &\leftrightarrow (\alpha' \wedge \beta'), \\ \vdash_T (\alpha \leftrightarrow \beta) &\leftrightarrow (\alpha' \leftrightarrow \beta'),\end{aligned}$$

lo que prueba que, en efecto,  $\alpha \vee \beta$ ,  $\alpha \wedge \beta$  y  $\alpha \leftrightarrow \beta$  son fórmulas aritméticas.

**Veamos ahora (iv).**

Observemos en primer lugar que si  $\gamma$  es una fórmula aritmética y  $\delta$  otra fórmula tal que  $\vdash_T \gamma \leftrightarrow \delta$ , entonces  $\delta$  es también una fórmula aritmética.

En efecto, por ser  $\gamma$  una fórmula aritmética, existe una fórmula aritmética pura  $\gamma'$  tal que  $\vdash_T \gamma \leftrightarrow \gamma'$ , luego por la regla (MBB) es  $\vdash_T \delta \leftrightarrow \gamma'$  y esto prueba que es una fórmula aritmética.

Así, como sabemos que  $\alpha$  es una fórmula aritmética, existe una fórmula aritmética pura  $\alpha'$  tal que  $\vdash_T \alpha \leftrightarrow \alpha'$  y basta entonces con demostrar que  $\forall x \in \mathbb{N} \alpha'$  es una fórmula aritmética, pues por el Teorema 2.11 7) se tiene que

$$\vdash_T \forall x \in \mathbb{N} \alpha \leftrightarrow \forall x \in \mathbb{N} \alpha'$$

y aplicando lo anterior obtenemos que  $\forall x \in \mathbb{N} \alpha$  es una fórmula aritmética.

Ahora, respecto a  $\forall x \in \mathbb{N} \alpha'$ , por el Metateorema 3.6 tenemos que

$$\vdash \neg \forall x \in \mathbb{N} \alpha' \leftrightarrow \bigwedge x \in \mathbb{N} \neg \alpha',$$

luego por el Teorema 2.11 1) obtenemos que

$$\vdash \neg \neg \forall x \in \mathbb{N} \alpha' \leftrightarrow \neg \bigwedge x \in \mathbb{N} \neg \alpha'$$

y por (DN) que

$$\vdash \forall x \in \mathbb{N} \alpha' \leftrightarrow \neg \neg \bigwedge x \in \mathbb{N} \neg \alpha'.$$

Como la última fórmula es aritmética pura (al serlo  $\alpha'$ ), concluimos con que, en efecto,  $\forall x \in \mathbb{N} \alpha'$  es una fórmula aritmética. 

Ahora sí, veamos la relación entre las teorías aritméticas y las interpretaciones de AP:

### Metateorema D.12

Sea  $T$  una teoría axiomática sobre un lenguaje formal  $\mathcal{L}$ . Se cumplen:

- (i) Si  $T$  interpreta a AP, entonces  $T$  es una teoría aritmética. Además, en este caso se pueden definir los parámetros de la teoría aritmética de modo que toda traducción de una expresión sin descriptores de  $\mathcal{L}_a$  será una expresión aritmética pura y, si la interpretación hace corresponder todas las variables de  $\mathcal{L}_a$  con todas las de  $\mathcal{L}$ , entonces el recíproco es también cierto.
- (ii) Si  $T$  es una teoría aritmética, entonces  $T$  interpreta a AP. Además, en este

caso se pueden elegir la interpretación de modo que toda traducción de una expresión (sin descriptores) de  $\mathcal{L}_a$  será una expresión aritmética (pura) y si la interpretación hace corresponder todas las variables de  $\mathcal{L}_a$  con todas las de  $\mathcal{L}$ , entonces el recíproco es también cierto.

**Comencemos demostrando (i).**

Si  $M$  es una interpretación de AP<sup>12</sup> en  $T$ , entonces al considerar  $x \in \mathbb{N} \equiv x \in M$ ,  $0 \equiv \bar{0}$ ,  $x' \equiv \bar{S}(x)$ ,  $x + y \equiv \bar{+}(x, y)$  y  $x \cdot y \equiv \bar{\cdot}(x, y)$  se tiene que  $T$  traduce a  $\mathcal{L}_a$  y que toda traducción de una expresión sin descriptores de  $\mathcal{L}_a$  es una expresión aritmética pura.

**En primer lugar**, por definición de interpretación se tiene que las traducciones de las clausuras de todos los axiomas de AP son teoremas de  $T$ , luego obtenemos que

$$\vdash_T \bar{x} | (\bar{x} \in M \wedge \bar{x} = \bar{x}) = \bar{0}.$$

Ahora bien, como se vio en (D.53) tenemos que

$$\vdash_T \bar{x} | (\bar{x} \in M \wedge \bar{x} = \bar{x}) = \bar{x} | (\bar{x} = \bar{x}),$$

con lo que por la regla (TI) obtenemos que

$$\vdash_T \bar{x} | (\bar{x} = \bar{x}) = \bar{0}.$$

Esto prueba que  $T$  traduce a  $\mathcal{L}_a$ .

**Demostraremos lo dicho sobre las traducciones por inducción en la longitud de la expresión  $\theta$  de  $\mathcal{L}_a$ :**

- Si  $\theta \equiv y$ , entonces  $\bar{\theta} \equiv \bar{y}$  una variable, luego es un término aritmético puro.
- Si  $\theta \equiv 0$ , entonces  $\bar{\theta} \equiv \bar{0} \equiv 0$  (donde el último 0 es el designador que asignamos a la teoría), luego es un término aritmético puro.
- Si  $\theta \equiv t_1 = t_2$  donde  $t_1$  y  $t_2$  son términos sin descriptores, entonces por hipótesis de inducción tenemos que  $\bar{t}_1$  y  $\bar{t}_2$  son términos aritméticos puros, luego es claro que  $\bar{\theta} \equiv \bar{t}_1 = \bar{t}_2$  es una expresión aritmética pura.
- Si  $\theta \equiv St$  con  $t$  un término sin descriptores, entonces por hipótesis de inducción tenemos que  $\bar{t}$  es un término aritmético puro y con ello  $\bar{\theta} \equiv \bar{S}(\bar{t}) \equiv \bar{t}'$  también lo es.
- Si  $\theta \equiv t_1 + t_2$  con  $t_1, t_2$  términos sin descriptores, entonces por hipótesis de inducción tenemos que  $\bar{t}_1$  y  $\bar{t}_2$  son términos aritméticos puros, luego  $\bar{\theta} \equiv \bar{+}(\bar{t}_1, \bar{t}_2) \equiv \bar{t}_1 + \bar{t}_2$  también lo es.
- Si  $\theta \equiv t_1 \cdot t_2$  con  $t_1, t_2$  términos sin descriptores es análogo al caso anterior.
- Si  $\theta \equiv \neg \alpha$  donde  $\alpha$  es una fórmula sin descriptores, entonces por hipótesis de inducción  $\bar{\alpha}$  es una fórmula aritmética pura y con ello  $\bar{\theta} \equiv \neg \bar{\alpha}$  también lo es.

<sup>12</sup> Tal y como se justifica al final del Capítulo 3 (ver Nota 3 pág. 117 y Nota 4 pág. 117), incluiremos como axioma semilógico de AP la fórmula  $x | (x = x) = 0$ .

- Si  $\theta \equiv \alpha \rightarrow \beta$  donde  $\alpha$  y  $\beta$  son fórmulas sin descriptores, entonces por hipótesis de inducción  $\bar{\alpha}$  y  $\bar{\beta}$  son fórmulas aritméticas puras y con ello  $\bar{\theta} \equiv \bar{\alpha} \rightarrow \bar{\beta}$  también lo es.
- Si  $\theta \equiv \bigwedge x \alpha$  donde  $\alpha$  es una fórmula sin descriptores, entonces por hipótesis de inducción  $\bar{\alpha}$  es una fórmula aritmética pura y con ello  $\bar{\theta} \equiv \bigwedge \bar{x} \in M \bar{\alpha} \equiv \bigwedge \bar{x} \in \mathbb{N} \bar{\alpha}$  también lo es.

Esto concluye la inducción y con ello esta parte de la prueba.

**Veamos ahora que si** en la interpretación cada variable de  $\mathcal{L}$  es la traducción de alguna variable de  $\mathcal{L}_a$ , entonces el recíproco de lo anterior es también cierto, es decir, que toda expresión aritmética pura  $\theta(x_1, \dots, x_n)$  cuyas variables libres están entre las indicadas es la traducción de una expresión  $\psi(y_1, \dots, y_n)$  de  $\mathcal{L}_a$  sin descriptores, cuyas variables libres están entre las indicadas y de modo que para cada  $i = 1, \dots, n$  se cumple que  $\bar{y}_i \equiv x_i$ .

Antes de demostrarlo, observemos que si  $\theta(x_1, \dots, x_n)$  es una expresión sin descriptores con las variables libres indicadas, entonces la expresión  $\psi(y_1, \dots, y_n)$  tiene exactamente las variables libres indicadas, pues sabemos que están entre  $y_1, \dots, y_n$  y tomando una de ellas, digamos  $y_i$ , sabemos que  $\bar{y}_i \equiv x_i$ , luego  $\bar{y}_i$  está libre en  $\theta$  y como  $\theta \equiv \bar{\psi}$ , el Metateorema D.4 nos da que  $y_i$  está libre en  $\psi$ .

Como antes, lo probaremos por inducción en la longitud de  $\theta$  una expresión aritmética pura:

- Si  $\theta \equiv 0$ , es decir,  $\theta \equiv \bar{0}$ , entonces el resultado es claro y como 0 y  $\bar{0}$  no tienen variables libres basta tomar  $y_1, \dots, y_n$  de modo que  $x_i \equiv \bar{y}_i$ .
- Si  $\theta \equiv y$  una variable, entonces es alguna de las variables  $x_i$  y sabemos que es la traducción de alguna variable  $y_i$  de  $\mathcal{L}_a$ , luego tomando el resto de  $y_j$  como en el caso anterior tenemos lo deseado.
- Si  $\theta \equiv t'$ , es decir,  $\theta \equiv \bar{S}(t)$  con  $t$  un término aritmético puro, entonces las variables libres de  $t$  están entre  $x_1, \dots, x_n$  (por el Teorema 1.13 3)) y por hipótesis de inducción existe un término  $s(y_1, \dots, y_n)$  de  $\mathcal{L}_a$  cuyas variables libres están entre las indicadas, sin descriptores, de modo que  $\bar{y}_i \equiv x_i$  y que cumple que  $t \equiv \bar{s}$ . Así,  $\theta \equiv \bar{S}(\bar{s})$  es la traducción del término  $Ss$  de  $\mathcal{L}_a$ , el cual no tiene descriptores y cuyas variables libres son las de  $s$ , luego claramente están entre  $y_1, \dots, y_n$  y ya hemos visto que cumplen lo deseado.
- Si  $\theta \equiv t_1 + t_2$ , es decir,  $\theta \equiv \bar{+}(t_1, t_2)$  con  $t_1, t_2$  términos aritméticos puros, entonces las variables libres de ambos términos están entre  $x_1, \dots, x_n$  (por el Metateorema 1.15) y por hipótesis de inducción tenemos que existen dos términos  $s_1(y_1, \dots, y_n), s_2(z_1, \dots, z_n)$  de  $\mathcal{L}_a$  cuyas variables libres están entre las indicadas, sin descriptores, de modo que  $\bar{y}_i \equiv x_i$  y  $\bar{z}_i \equiv x_i$  y que cumplen que  $t_1 \equiv \bar{s}_1$  y  $t_2 \equiv \bar{s}_2$ . Observemos entonces que  $\bar{y}_i \equiv \bar{z}_i$ , con lo que por definición de interpretación  $y_i \equiv z_i$ . Así  $\theta \equiv \bar{+}(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$  es la traducción del término  $s_1 + s_2$  de  $\mathcal{L}_a$ , el cual no tiene descriptores y cuyas variables libres son las de  $s_1$  y  $s_2$ , luego están entre  $y_1, \dots, y_n$  y ya hemos visto que cumplen lo deseado.
- Si  $\theta \equiv t_1 \cdot t_2$ , es decir,  $\theta \equiv \bar{\cdot}(t_1, t_2)$  con  $t_1, t_2$  términos aritméticos puros, se ve de forma análoga al caso anterior.



- Si  $\theta \equiv t_1 = t_2$  con  $t_1, t_2$  términos aritméticos puros, entonces las variables libres de ambos términos están entre  $x_1, \dots, x_n$  y por hipótesis de inducción tenemos que existen dos términos  $s_1(y_1, \dots, y_n), s_2(z_1, \dots, z_n)$  de  $\mathcal{L}_a$  cuyas variables libres están entre las indicadas, sin descriptores, de modo que  $\bar{y}_i \equiv x_i$  y  $\bar{z}_i \equiv x_i$  y que cumplen que  $t_1 \equiv \bar{s}_1$  y  $t_2 \equiv \bar{s}_2$ . Observemos entonces que  $\bar{y}_i \equiv \bar{z}_i$ , con lo que por definición de interpretación  $y_i \equiv z_i$ . Así  $\theta \equiv \bar{s}_1 = \bar{s}_2$  es la traducción de la fórmula  $s_1 = s_2$  de  $\mathcal{L}_a$ , la cual no tiene descriptores y cuyas variables libres son las de  $s_1$  y  $s_2$ , luego están entre  $y_1, \dots, y_n$  y ya hemos visto que cumplen lo deseado.
- Si  $\theta \equiv \neg\alpha$  con  $\alpha$  una fórmula aritmética pura, entonces las variables libres de  $\alpha$  están entre  $x_1, \dots, x_n$  y por hipótesis de inducción tenemos que existe una fórmula  $\gamma(y_1, \dots, y_n)$  de  $\mathcal{L}_a$  cuyas variables libres están entre las indicadas, sin descriptores, de modo que  $\bar{y}_i \equiv x_i$  y que cumple que  $\gamma \equiv \bar{\alpha}$ . Así,  $\theta \equiv \neg\bar{\gamma}$  es la traducción de la fórmula  $\neg\gamma$  de  $\mathcal{L}_a$ , la cual no tiene descriptores y tiene las mismas variables libres que  $\gamma$ , luego claramente están entre  $y_1, \dots, y_n$  y ya hemos visto que cumplen lo deseado.
- Si  $\theta \equiv \alpha \rightarrow \beta$  con  $\alpha$  y  $\beta$  fórmulas aritméticas puras, entonces las variables libres de ambas fórmulas están entre  $x_1, \dots, x_n$  y por hipótesis de inducción tenemos que existen dos fórmulas  $\gamma(y_1, \dots, y_n), \delta(z_1, \dots, z_n)$  de  $\mathcal{L}_a$  cuyas variables libres están entre las indicadas, sin descriptores, de modo que  $\bar{y}_i \equiv x_i$  y  $\bar{z}_i \equiv x_i$  y que cumplen que  $\alpha \equiv \bar{\gamma}$  y  $\beta \equiv \bar{\delta}$ . Observemos entonces que  $\bar{y}_i \equiv \bar{z}_i$ , con lo que por definición de interpretación  $y_i \equiv z_i$ . Así,  $\theta \equiv \bar{\gamma} \rightarrow \bar{\delta}$  es la traducción de la fórmula  $\gamma \rightarrow \delta$  de  $\mathcal{L}_a$ , la cual no tiene descriptores y cuyas variables libres son las de  $\gamma$  y  $\delta$ , luego están entre  $y_1, \dots, y_n$  y ya hemos visto que cumplen lo deseado.
- Si  $\theta \equiv \bigwedge x \in \mathbb{N} \alpha$ , es decir,  $\theta \equiv \bigwedge x \in M \alpha$  con  $\alpha$  una fórmula aritmética pura, entonces las variables libres de  $\alpha$  están entre  $x, x_1, \dots, x_n$ , con lo que por hipótesis de inducción tenemos que existe una fórmula  $\gamma(y, y_1, \dots, y_n)$  de  $\mathcal{L}_a$  cuyas variables libres están entre las indicadas, sin descriptores, de modo que  $\bar{y} \equiv x$ ,  $\bar{y}_i \equiv x_i$  y que cumple que  $\gamma \equiv \bar{\alpha}$ . Así,  $\theta \equiv \bigwedge \bar{y} \in M \bar{\gamma}$  es la traducción de la fórmula  $\bigwedge y \gamma$  de  $\mathcal{L}_a$ , la cual no tiene descriptores y tiene las mismas variables libres que  $\gamma$  salvo  $y$ , luego claramente están entre  $y_1, \dots, y_n$  y ya hemos visto que cumplen lo deseado.

Esto concluye la inducción y con ello esta parte de la prueba.

**Por último**, para ver que realmente  $T$  es una teoría aritmética, debemos ver que se satisfacen los puntos del (i) al (ix) en la Definición D.10. Por las definiciones que hemos elegido para la teoría aritmética se tiene que las dos primeras no son más que las condiciones (II) y (III) en la definición de interpretación (para la constante 0 de  $\mathcal{L}_a$  y el functor monádico  $S$ ). Por otra parte, los puntos del (iii) al (viii) no son más que las traducciones de las clausuras de los seis primeros axiomas de Peano y por la definición de interpretación concluimos que, en efecto, son teoremas de  $T$ . Finalmente, para el punto (ix) observemos que si  $\phi(x, x_1, \dots, x_n)$  es una fórmula aritmética pura con las variables libres indicadas, por lo visto tenemos que existe una fórmula  $\psi(y, y_1, \dots, y_n)$  de  $\mathcal{L}_a$  con las variables libres indicadas, sin descriptores, de modo que  $\bar{y} \equiv x$  y  $\bar{y}_i \equiv x_i$  para cada  $i = 1, \dots, n$  y tal que

$\phi \equiv \bar{\psi}$ . Así pues, se tiene que si  $n \equiv \bar{m}$

$$\begin{aligned}\phi(0) &\equiv S_x^0 \phi \equiv S_{\bar{y}}^{\bar{0}} \bar{\psi}, \\ \phi(n) &\equiv S_x^n \phi \equiv S_{\bar{y}}^{\bar{m}} \bar{\psi}, \\ \phi(n') &\equiv S_x^{n'} \phi \equiv S_x^{\bar{S}(n)} \equiv S_{\bar{y}}^{\bar{S}m} \bar{\psi},\end{aligned}$$

luego por el Metateorema D.5 tenemos que

$$\begin{aligned}\vdash \phi(0) &\leftrightarrow \overline{S_y^0 \psi} \left[ \equiv \overline{\psi(0)} \right], \\ \phi(n) &\leftrightarrow \overline{S_y^m \psi} \left[ \equiv \overline{\psi(m)} \right], \\ \phi(n') &\leftrightarrow \overline{S_y^{S^m} \psi} \left[ \equiv \overline{\psi(m')} \right],\end{aligned}$$

y usando el Teorema 2.11 obtenemos que

$$\frac{\vdash \bigwedge x_1 \cdots x_n \in \mathbb{N} \left( \phi(0) \wedge \bigwedge n \in \mathbb{N} (\phi(n) \rightarrow \phi(n')) \rightarrow \bigwedge n \in \mathbb{N} \phi(n) \right) \leftrightarrow \bigwedge y_1 \cdots y_n \left( \psi(0) \wedge \bigwedge m (\psi(m) \rightarrow \psi(m')) \rightarrow \bigwedge m \psi(m) \right)}{\vdash \bigwedge x_1 \cdots x_n \in \mathbb{N} \left( \phi(0) \wedge \bigwedge n \in \mathbb{N} (\phi(n) \rightarrow \phi(n')) \rightarrow \bigwedge n \in \mathbb{N} \phi(n) \right) \leftrightarrow \bigwedge y_1 \cdots y_n \left( \psi(0) \wedge \bigwedge m (\psi(m) \rightarrow \psi(m')) \rightarrow \bigwedge m \psi(m) \right)}.$$

Como esta última fórmula no es más que la traducción de la clausura de un caso particular del axioma de inducción, por la definición de interpretación será un teorema de  $T$  y con ello lo es la fórmula buscada.

### Demostremos ahora (ii).

Si  $T$  es una teoría aritmética, veamos que interpreta a AP al considerar como universo de la interpretación la fórmula  $x \in \mathbb{N}$ , como traducción del cero el designador  $0$  de  $\mathcal{L}_T$  y como traducción de los funtores  $S, +$  y  $\cdot$  los términos  $x', x + y$  y  $x \cdot y$  de  $\mathcal{L}_T$ . Además, a la variable de índice  $i$  de  $\mathcal{L}_a$  le asignaremos la variable de índice  $i$  de  $\mathcal{L}_T$ .

Es claro que con esto  $\mathbb{N}$  es una interpretación de  $\mathcal{L}_a$  en  $\mathcal{L}_T$  y análogo a lo visto en la demostración de (i) se ve que toda traducción de una expresión sin descriptores de  $\mathcal{L}_a$  es una expresión aritmética pura, y que dada una expresión aritmética pura  $\theta(x_1, \dots, x_n)$  cuyas variables libres están entre las indicadas es la traducción de una expresión  $\psi(y_1, \dots, y_n)$  de  $\mathcal{L}_a$  sin descriptores, cuyas variables libres están entre las indicadas y de modo que para cada  $i = 1, \dots, n$  se cumple que  $\bar{y}_i \equiv x_i$ .

Resta pues ver que se cumplen los puntos del (I) al (IV) en la Definición D.1 para concluir la demostración.

**Para demostrar (I)**, observemos que como  $T$  es una teoría aritmética se tiene que  $\vdash_T x|(x = x) = 0$  y que  $\vdash_T 0 \in \mathbb{N}$ , luego por (ETI) obtenemos que, en efecto,  $x|(x = x) \in \mathbb{N}$ .

La **demostración de (II)** es también inmediata pues la única constante de  $\mathcal{L}_a$  es el cero y por ser  $T$  una teoría aritmética se cumple que  $\vdash_T \bar{0} \in \mathbb{N}$  (donde por la definición que hemos dado para la interpretación  $\bar{0}$  es el designador  $0$  de  $T$  dado por la definición de teoría aritmética).

Para **demostrar (III)** tenemos que ver que

$$\vdash_T \bigwedge x \in \mathbb{N} x' \in \mathbb{N} \tag{D.76}$$

$$\vdash_T \bigwedge xy \in \mathbb{N} x + y \in \mathbb{N} \tag{D.77}$$

$$\vdash_T \bigwedge xy \in \mathbb{N} x \cdot y \in \mathbb{N}. \tag{D.78}$$

Observemos que (D.76) no es más que el punto (ii) en la Definición D.10.

Ahora, para probar (D.77) consideremos la fórmula aritmética  $\forall z \in \mathbb{N} z = x + y$  (sabemos que es aritmética por el Metateorema D.11 (iv)) y observemos que por el segundo comentario tras la Definición D.10 tenemos que

$$\begin{aligned} \vdash_T \bigwedge x \in \mathbb{N} \big( \forall z \in \mathbb{N} z = x + 0 \wedge \bigwedge n \in \mathbb{N} \big( \forall z \in \mathbb{N} z = x + n \rightarrow \forall z \in \mathbb{N} z = x + n' \big) \rightarrow \\ \bigwedge n \in \mathbb{N} \forall z \in \mathbb{N} z = x + n \big). \end{aligned} \quad (\text{D.79})$$

A partir de (D.79) podemos demostrar que

$$\vdash_T \bigwedge xy \in \mathbb{N} \forall z \in \mathbb{N} z = x + y. \quad (\text{D.80})$$

En efecto, tenemos la siguiente demostración: EN PROCESO



## E. Demostración del Teorema 3.32

Reescribiremos en este anexo la demostración del Teorema 3.32 (páginas 118-124) para mantener un mayor orden y coherencia dentro de la propia prueba del que obtendríamos con muchas anotaciones por separado.

Antes de comenzar cabe aclarar que, como estamos tratando con dos lenguajes formales,  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{L}'$ , cuando utilicemos el símbolo “ $\vdash$ ” nos referiremos siempre a demostraciones o deducciones en  $K_{\mathcal{L}}$  (luego claramente las fórmulas involucradas no tendrán descriptor), mientras que si queremos hablar en algún momento de demostraciones en  $K_{\mathcal{L}'}$  lo especificaremos escribiendo  $\vdash_{K_{\mathcal{L}'}}$ . Por otra parte, las notaciones  $\vdash_T$  y  $\vdash_{T'}$  tienen el significado usual.

Entrando ya en la demostración en sí, observemos en primer lugar que para cualquier variable  $y$  se tiene que

$$\vdash_T \bigvee^1 y \phi(y) \quad (\text{E.1})$$

y

$$\vdash_{T'} y = x | (x = x) \leftrightarrow \phi(y). \quad (\text{E.2})$$

En efecto, para (E.1) basta observar que si  $y \equiv u$  es simplemente la hipótesis dada en el enunciado del teorema, mientras que si  $y \not\equiv u$ , entonces  $y$  no está libre en  $\phi(u)$  y por el Metateorema 3.7 (iii) tenemos que

$$\vdash \bigvee^1 u \phi(u) \leftrightarrow \bigvee^1 y S_u^y \phi(u). \quad (\text{E.3})$$

Utilizando el Metateorema 1.21 sabemos que

$$\vdash S_u^y \phi(u) \leftrightarrow \phi(y)$$

y por el Teorema 2.11 8) tenemos que

$$\vdash \bigvee^1 y S_u^y \phi(u) \leftrightarrow \bigvee^1 y \phi(y). \quad (\text{E.4})$$

Usando la regla (MBB) junto a (E.3) y (E.4) tenemos que

$$\vdash \bigvee^1 u \phi(u) \leftrightarrow \bigvee^1 y \phi(y)$$

y como la primera fórmula es un teorema de  $T$ , concluimos que la segunda también tiene que serlo.

Para (E.2) tenemos la siguiente demostración:

|     |                                       |                |
|-----|---------------------------------------|----------------|
| (1) | $y = x   (x = x)$                     | Hipótesis      |
| (2) | $\phi(x   x = x)$                     | Tma. $T'$      |
| (3) | $\phi(y)$                             | ETI 1, 2       |
| (4) | $y = x   (x = x) \rightarrow \phi(y)$ | Tma. deducción |
| (5) | $\phi(y)$                             | Hipótesis      |
| (6) | $\phi(x   x = x)$                     | Tma. $T'$      |

$$\begin{array}{ll}
(7) & \bigvee^1 x \phi(x) \quad (\text{E.1}) \\
(8) & y = x | (x = x) \quad \text{Mteo. 2.4 5, 6, 7} \\
(9) & \phi(y) \rightarrow y = x | (x = x) \quad \text{Tma. deducción} \\
(10) & y = x | (x = x) \leftrightarrow \phi(y) \quad \text{IB 4, 9}
\end{array}$$

Quedan pues demostrados (E.1) y (E.2). 

Más aún, aplicando el Teorema 2.11 junto a (E.2) y el Teorema 3.33 obtenemos que si  $y$  es una variable que no está en  $u|\alpha$ , entonces

$$\vdash_{T'} y = u | \alpha \leftrightarrow \bigwedge u (\alpha \leftrightarrow u = y) \vee \left( \neg \bigvee^1 u \alpha \wedge \phi(y) \right). \quad (\text{E.5})$$

Dada una expresión  $\theta$  de  $\mathcal{L}'$ , definiremos a continuación una fórmula  $\theta^*$  de  $\mathcal{L}$  con las mismas variables libres si  $\theta$  es una fórmula y que tendrá una única variable libre adicional  $y_\theta$  (la variable de menor índice que no está en  $\theta$ ) si  $\theta$  es un término.

### Definición E.1

Dada  $\theta$  una expresión de  $\mathcal{L}'$  definimos la fórmula  $\theta^*$  como aquella que se obtiene a partir de las siguiente reglas, siendo  $y_\theta$  la variable de menor índice que no está en  $\theta$  y  $u_1, \dots, u_n$  las variables de menor índice que no están en  $\theta$  y distintas de  $y_\theta$ :

(i) Si  $\theta \equiv x_i$ , entonces

$$\theta^* \equiv y_\theta = x_i.$$

(ii) Si  $\theta \equiv c_i$ , entonces

$$\theta^* \equiv y_\theta = c_i.$$

(iii) Si  $\theta \equiv R_i^n t_1 \dots t_n$ , entonces

$$\theta^* \equiv \bigvee u_1 \dots u_n \left( S_{y_{t_1}}^{u_1} t_1^* \wedge \dots \wedge S_{y_{t_n}}^{u_n} t_n^* \wedge R_i^n u_1 \dots u_n \right).$$

(iv) Si  $\theta \equiv f_i^n t_1 \dots t_n$ , entonces

$$\theta^* \equiv \bigvee u_1 \dots u_n \left( S_{y_{t_1}}^{u_1} t_1^* \wedge \dots \wedge S_{y_{t_n}}^{u_n} t_n^* \wedge y_\theta = f_i^n u_1 \dots u_n \right).$$

(v) Si  $\theta \equiv \neg \alpha$ , entonces

$$\theta^* \equiv \neg \alpha^*.$$

(vi) Si  $\theta \equiv \alpha \rightarrow \beta$ , entonces

$$\theta^* \equiv \alpha^* \rightarrow \beta^*.$$

(vii) Si  $\theta \equiv \bigwedge u \alpha$ , entonces

$$\theta^* \equiv \bigwedge u \alpha^*.$$

(viii) Si  $\theta \equiv u | \alpha$ , entonces

$$\theta^* \equiv \bigwedge u (\alpha^* \leftrightarrow u = y_\theta) \vee \left( \neg \bigvee^1 u \alpha^* \wedge \phi(y_\theta) \right).$$

Observemos en primer lugar que la definición realmente cumple lo deseado:

### Metateorema E.2

Dada  $\theta$  una expresión de  $\mathcal{L}'$  se tiene que  $\theta^*$  es una fórmula de  $\mathcal{L}$ . Además, si  $\theta$  es una fórmula se tiene que  $\theta^*$  tiene las mismas variables libres y si  $\theta$  es un término, entonces tiene las mismas variables libres más la variable libre adicional  $y_\theta$ .

Lo demostraremos por inducción en la longitud de  $\theta$ :

- Si  $\theta \equiv x_i$ , entonces  $\theta^* \equiv y_\theta = x_i$  y es claro que no tiene descriptores y que sus variables libres son las de  $\theta$  más la variable  $y_\theta$ .
- Si  $\theta \equiv c_i$ , entonces  $\theta^* \equiv y_\theta = c_i$  y es claro que no tiene descriptores y que sus variables libres son las de  $\theta$  más la variable  $y_\theta$ .
- Si  $\theta \equiv R_i^n t_1 \cdots t_n$ , entonces

$$\theta^* \equiv \bigvee u_1 \cdots u_n \left( S_{y_{t_1}}^{u_1} t_1^* \wedge \cdots \wedge S_{y_{t_n}}^{u_n} t_n^* \wedge R_i^n u_1 \cdots u_n \right)$$

siendo  $u_1, \dots, u_n$  las variables de menor índice que no están en  $\theta$  y distintas de  $y_\theta$ . Por hipótesis de inducción tenemos entonces que  $t_1^*, \dots, t_n^*$  son fórmulas sin descriptor y con ello claramente lo es  $\theta^*$ . Además, la hipótesis de inducción también nos da que las variables libres de cada  $t_j^*$  son las variables libres de  $t_j$  más  $y_{t_j}$ , luego por el Teorema 1.13 3), las variables libres de  $S_{y_{t_j}}^{u_j} t_j^*$  son las variables libres de  $t_j$  más  $u_j$ . Como  $u_1, \dots, u_n$  no están en ningún  $t_j$  (pues no están en  $\theta$ ) concluimos que las variables libres de  $\theta^*$  son las variables libres en  $t_1, \dots, t_n$ , es decir, las variables libres en  $\theta$ .

- Si  $\theta \equiv f_i^n t_1 \cdots t_n$ , entonces

$$\theta^* \equiv \bigvee u_1 \cdots u_n \left( S_{y_{t_1}}^{u_1} t_1^* \wedge \cdots \wedge S_{y_{t_n}}^{u_n} t_n^* \wedge y_\theta = f_i^n u_1 \cdots u_n \right)$$

siendo  $u_1, \dots, u_n$  las variables de menor índice que no están en  $\theta$  y distintas de  $y_\theta$ . Por hipótesis de inducción tenemos entonces que  $t_1^*, \dots, t_n^*$  son fórmulas sin descriptor y con ello claramente lo es  $\theta^*$ . Además, la hipótesis de inducción también nos da que las variables libres de cada  $t_j^*$  son las variables libres de  $t_j$  más  $y_{t_j}$ , luego por el Teorema 1.13 3), las variables libres de  $S_{y_{t_j}}^{u_j} t_j^*$  son las variables libres de  $t_j$  más  $u_j$ . Como  $u_1, \dots, u_n$  no están en ningún  $t_j$  (pues no están en  $\theta$ ) concluimos que las variables libres de  $\theta^*$  son las variables libres en  $t_1, \dots, t_n$ , es decir, las variables libres en  $\theta$ , más  $y_\theta$ .

- Si  $\theta \equiv \neg \alpha$ , entonces  $\theta^* \equiv \neg \alpha^*$ . Por hipótesis de inducción tenemos que  $\alpha^*$  es una fórmula sin descriptores, luego lo es  $\theta^*$ , y también que las variables libres de  $\alpha^*$  son las de  $\alpha$ , luego las de  $\theta$ , y con ello las variables libres de  $\theta^*$  son las de  $\theta$ .
- Si  $\theta \equiv \alpha \rightarrow \beta$ , entonces  $\theta^* \equiv \alpha^* \rightarrow \beta^*$ . Por hipótesis de inducción tenemos que  $\alpha^*$  y  $\beta^*$  son fórmulas sin descriptores, luego lo es  $\theta^*$ , y también que las variables libres de  $\alpha^*$  y  $\beta^*$  son las de  $\alpha$  y  $\beta$  respectivamente, luego las de  $\theta^*$  son las de  $\alpha$  y  $\beta$ , es decir, las de  $\theta$ .

- Si  $\theta \equiv \bigwedge u \alpha$ , entonces  $\theta^* \equiv \bigwedge u \alpha^*$ . Por hipótesis de inducción tenemos que  $\alpha^*$  es una fórmula sin descriptores, luego lo es  $\theta^*$ , y también que las variables libres de  $\alpha^*$  son las de  $\alpha$ . Como  $v$  está libre en  $\theta$  si y sólo si  $v \neq u$  y  $v$  está libre en  $\alpha$ , y esto es equivalente a que  $v \neq u$  y  $v$  está libre en  $\alpha^*$ , obtenemos que las variables libres de  $\theta^*$  son las de  $\theta$ .
- Si  $\theta \equiv u|\alpha$ , entonces

$$\theta^* \equiv \bigwedge u (\alpha^* \leftrightarrow u = y_\theta) \vee \left( \neg \bigvee^1 u \alpha^* \wedge \phi(y_\theta) \right).$$

Como por hipótesis de inducción tenemos que  $\alpha^*$  es una fórmula sin descriptores y  $\phi$  también lo es, concluimos que, en efecto,  $\theta^*$  es una fórmula sin descriptores. Además, las variables libres de  $\theta^*$  son las de  $\alpha^*$  distintas de  $u$  y también la variable  $y_\theta$  (y no tiene más variables libres, pues  $\phi$  tiene como única variable libre a  $x$ , luego  $\phi(y_\theta)$  tiene como única variable libre a  $y_\theta$ ), luego por hipótesis de inducción son las de  $\alpha$  distintas de  $u$  más la variable  $y_\theta$ , es decir, las de  $\theta$  más  $y_\theta$ .

Esto finaliza la inducción y con ello la demostración. 

Veamos también que la elección de las variables  $u_1, \dots, u_n$  en los casos del relator y el functor es, como siempre, un mero tecnicismo para fijar las definiciones:

### Metateorema E.3

Dada  $\theta$  una expresión de  $\mathcal{L}'$  y  $v_1, \dots, v_n$  variables que no están en  $\theta$  y distintas de  $y_\theta$  se cumplen:

- (i) Si  $\theta \equiv R_i^n t_1 \dots t_n$ , entonces

$$\vdash \theta^* \leftrightarrow \bigvee v_1 \dots v_n \left( S_{y_{t_1}}^{v_1} t_1^* \wedge \dots \wedge S_{y_{t_n}}^{v_n} t_n^* \wedge R_i^n v_1 \dots v_n \right).$$

- (ii) Si  $\theta \equiv f_i^n t_1 \dots t_n$ , entonces

$$\vdash \theta^* \leftrightarrow \bigvee v_1 \dots v_n \left( S_{y_{t_1}}^{v_1} t_1^* \wedge \dots \wedge S_{y_{t_n}}^{v_n} t_n^* \wedge y_\theta = f_i^n v_1 \dots v_n \right).$$

Demostraremos el caso para el functor, pues para el relator es completamente análogo.

Sean  $w_1, \dots, w_n$  variables que no están en  $\theta \equiv f_i^n t_1 \dots t_n$  y distintas de  $u_1, \dots, u_n, y_\theta$ , entonces como las variables libres de cada  $S_{y_{t_j}}^{u_j} t_j^*$  son las de  $t_j$  junto a  $u_j$  (por el Metateorema E.2 y el Teorema 1.13 3)), tenemos que ningún  $w_k$  está libre en  $S_{y_{t_j}}^{u_j} t_j^*$ . Además, por la misma razón ningún  $w_k$  está libre en  $S_{y_{t_j}}^{w_j} t_j^*$  para  $j \neq k$ . Denotando entonces por

$$\theta^{**} \equiv \bigvee w_1 \dots w_n \left( S_{y_{t_1}}^{w_1} t_1^* \wedge \dots \wedge S_{y_{t_n}}^{w_n} t_n^* \wedge y_\theta = f_i^n w_1 \dots w_n \right)$$

se tiene la siguiente demostración:

|     |                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                       |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| (1) | $\theta^*$                                                                                                                                                                                | Hipótesis                                                                                                             |
| (2) | $S_{u_n}^{w_n} \dots S_{u_1}^{w_1} S_{y_{t_1}}^{u_1} t_1^* \wedge \dots \wedge$<br>$S_{u_n}^{w_n} \dots S_{u_1}^{w_1} S_{y_{t_n}}^{u_n} t_n^* \wedge$<br>$y_\theta = f_i^n w_1 \dots w_n$ | EP 1 ( $\times n$ )<br>[(1.37), $w_1, \dots, w_n$ no libre en 1<br>ni en la fórmula dentro de los particularizadores] |

|      |                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                       |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| (3)  | $S_{y_{t_1}}^{w_1} t_1^* \wedge \cdots \wedge S_{y_{t_n}}^{w_n} t_n^* \wedge y_\theta = f_i^n w_1 \cdots w_n$                                                                       | SE 2, Tma. 2.11 [Teo. 1.13 2), Mteo. 2.2]                                                                             |
| (4)  | $\theta^{**}$                                                                                                                                                                       | IP 3 ( $\times n$ ) [ $w_1, \dots, w_n$ no libres]                                                                    |
| (5)  | $\theta^* \rightarrow \theta^{**}$                                                                                                                                                  | Tma. deducción                                                                                                        |
| (6)  | $\theta^{**}$                                                                                                                                                                       | Hipótesis                                                                                                             |
| (7)  | $S_{w_n}^{u_n} \cdots S_{w_1}^{u_1} S_{y_{t_1}}^{w_1} t_1^* \wedge \cdots \wedge S_{w_n}^{u_n} \cdots S_{w_1}^{u_1} S_{y_{t_n}}^{w_n} t_n^* \wedge y_\theta = f_i^n u_1 \cdots u_n$ | EP 6 ( $\times n$ )<br>[(1.37), $u_1, \dots, u_n$ no libre en 6<br>ni en la fórmula dentro de los particularizadores] |
| (8)  | $S_{y_{t_1}}^{u_1} t_1^* \wedge \cdots \wedge S_{y_{t_n}}^{u_n} t_n^* \wedge y_\theta = f_i^n u_1 \cdots u_n$                                                                       | SE 7, Tma. 2.11 [Teo. 1.13 2), Mteo. 2.2]                                                                             |
| (9)  | $\theta^*$                                                                                                                                                                          | IP 8 ( $\times n$ ) [ $u_1, \dots, u_n$ no libres]                                                                    |
| (10) | $\theta^{**} \rightarrow \theta^*$                                                                                                                                                  | Tma. deducción                                                                                                        |
| (11) | $\theta^* \leftrightarrow \theta^{**}$                                                                                                                                              | IB 5, 10                                                                                                              |

Con ello, si son  $v_1, \dots, v_n$  variables que no están en  $\theta$  y distintas de  $y_\theta$ , podemos tomar  $w_1, \dots, w_n$  variables que no están en  $\theta$  y distintas de  $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n, y_\theta$ , y si denotamos por

$$\theta^{***} \equiv \bigvee v_1 \cdots v_n \left( S_{y_{t_1}}^{v_1} t_1^* \wedge \cdots \wedge S_{y_{t_n}}^{v_n} t_n^* \wedge y_\theta = f_i^n v_1 \cdots v_n \right),$$

con demostraciones completamente análogas a la dada se tiene que

$$\vdash \theta^* \leftrightarrow \theta^{**}$$

y

$$\vdash \theta^{***} \leftrightarrow \theta^{**},$$

con lo que por la regla (MBB) concluimos que

$$\vdash \theta^* \leftrightarrow \theta^{***}$$

tal y como queríamos ver. 

Para poder concluir la demostración necesitaremos de una serie de resultados que enunciaremos y probaremos a continuación:

#### Metateorema E.4

Si  $\theta$  es una expresión de  $\mathcal{L}'$  se cumple que

$$\vdash_{T'} \theta^* \leftrightarrow \theta$$

si  $\theta$  es una fórmula y

$$\vdash_{T'} \theta^* \leftrightarrow y_\theta = \theta$$

si  $\theta$  es un término.

Además, si  $\theta$  no tiene descriptores, entonces las equivalencias anteriores pueden probarse en  $T$ .

Lo demostraremos por inducción en la longitud de  $\theta$ :



- Si  $\theta \equiv x_i$ , entonces  $\theta^* \equiv y_\theta = x_i$  y el resultado no es más que una aplicación del Teorema 2.7.
- Si  $\theta \equiv c_i$ , entonces  $\theta^* \equiv y_\theta = c_i$  y el resultado no es más que una aplicación del Teorema 2.7.
- Si  $\theta \equiv R_i^n t_1 \cdots t_n$ , por hipótesis de inducción tenemos que para cada  $j = 1, \dots, n$  se tiene que

$$\vdash_{T'} t_j^* \leftrightarrow y_{t_j} = t_j.$$

Más aún, por el Metateorema 1.18 obtenemos que para cada  $j = 1, \dots, n$  se cumple que (teniendo en cuenta que  $y_{t_j}$  no está en  $t_j$ )

$$\vdash_{T'} S_{y_{t_j}}^{u_j} t_j^* \leftrightarrow u_j = t_j.$$

Así, tenemos que por el Teorema 2.11 se cumple que

$$\vdash_{T'} \theta^* \leftrightarrow \bigvee u_1 \cdots u_n (u_1 = t_1 \wedge \cdots \wedge u_n = t_n \wedge R_i^n u_1 \cdots u_n). \quad (\text{E.6})$$

Por otra parte, si tomamos  $x_1, \dots, x_n$  variables distintas de  $u_1, \dots, u_n$  que no estén en  $\theta$ , denotando por

$$\alpha(x_1, \dots, x_n) \equiv R_i^n x_1 \cdots x_n$$

se tiene que (para ciertas variables  $z_1, \dots, z_n$  que no están en  $\alpha, t_1, \dots, t_n$  ni en  $x_1, \dots, x_n$ )

$$\alpha(t_1, \dots, t_n) \equiv S_{z_1}^{t_1} \cdots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \cdots S_{x_n}^{z_n} R_i^n x_1 \cdots x_n \equiv R_i^n t_1 \cdots t_n \equiv \theta$$

y

$$S_{x_1}^{u_1} \cdots S_{x_n}^{u_n} \alpha \equiv R_i^n u_1 \cdots u_n,$$

luego el Metateorema 1.20 nos garantiza que

$$\vdash \theta \leftrightarrow \bigvee u_1 \cdots u_n (u_1 = t_1 \wedge \cdots \wedge u_n = t_n \wedge R_i^n u_1 \cdots u_n). \quad (\text{E.7})$$

Juntando (E.6) y (E.7) obtenemos lo deseado.

Está claro que si  $\theta$  no tiene descriptores, entonces no los tiene ningún  $t_j$  y con ello todo lo anterior puede probarse en  $T$ .

- Si  $\theta \equiv f_i^n t_1 \cdots t_n$ , por hipótesis de inducción tenemos que para cada  $j = 1, \dots, n$  se tiene que

$$\vdash_{T'} t_j^* \leftrightarrow y_{t_j} = t_j.$$

Más aún, por el Metateorema 1.18 obtenemos que para cada  $j = 1, \dots, n$  se cumple que (teniendo en cuenta que  $y_{t_j}$  no está en  $t_j$ )

$$\vdash_{T'} S_{y_{t_j}}^{u_j} t_j^* \leftrightarrow u_j = t_j.$$

Así, tenemos que por el Teorema 2.11 se cumple que

$$\vdash_{T'} \theta^* \leftrightarrow \bigvee u_1 \cdots u_n (u_1 = t_1 \wedge \cdots \wedge u_n = t_n \wedge y_\theta = f_i^n u_1 \cdots u_n). \quad (\text{E.8})$$

Por otra parte, si tomamos  $x_1, \dots, x_n$  variables distintas de  $y_\theta, u_1, \dots, u_n$  que no estén en  $\theta$ , denotando por

$$\alpha(x_1, \dots, x_n) \equiv y_\theta = f_i^n x_1 \cdots x_n$$

se tiene que tomando  $z_1, \dots, z_n$  que no estén en  $\alpha, t_1, \dots, t_n$  ni en  $x_1, \dots, x_n$  por el Metateorema 1.16 es

$$\vdash \alpha(t_1, \dots, t_n) \leftrightarrow S_{z_1}^{t_1} \cdots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \cdots S_{x_n}^{z_n} (y_\theta = f_i^n x_1 \cdots x_n) \quad (\text{E.9})$$

siendo

$$S_{z_1}^{t_1} \cdots S_{z_n}^{t_n} S_{x_1}^{z_1} \cdots S_{x_n}^{z_n} (y_\theta = f_i^n x_1 \cdots x_n) \equiv y_\theta = f_i^n t_1 \cdots t_n \equiv y_\theta = \theta.$$

Además,

$$S_{x_1}^{u_1} \cdots S_{x_n}^{u_n} \alpha \equiv y_\theta = f_i^n u_1 \cdots u_n,$$

luego el Metateorema 1.20 y (E.9) nos garantizan que

$$\vdash y_\theta = \theta \leftrightarrow \bigvee u_1 \cdots u_n (u_1 = t_1 \wedge \cdots \wedge u_n = t_n \wedge y_\theta = f_i^n u_1 \cdots u_n). \quad (\text{E.10})$$

Juntando (E.8) y (E.10) obtenemos lo deseado.

Está claro que si  $\theta$  no tiene descriptores, entonces no los tiene ningún  $t_j$  y con ello todo lo anterior puede probarse en  $T$ .

- Si  $\theta \equiv \neg \alpha$ , entonces por hipótesis de inducción tenemos que

$$\vdash_{T'} \alpha^* \leftrightarrow \alpha.$$

Teniendo en cuenta que  $\theta^* \equiv \neg \alpha^*$ , utilizando la regla (SE) junto al Teorema 2.11 1) obtenemos que

$$\vdash_{T'} \theta^* \leftrightarrow \theta$$

como queríamos.

Está claro que si  $\theta$  no tiene descriptores, entonces no los tiene  $\alpha$  y con ello todo lo anterior puede probarse en  $T$ .

- Si  $\theta \equiv \alpha \rightarrow \beta$ , entonces por hipótesis de inducción tenemos que

$$\vdash_{T'} \alpha^* \leftrightarrow \alpha$$

y

$$\vdash_{T'} \beta^* \leftrightarrow \beta.$$

Teniendo en cuenta que  $\theta^* \equiv \alpha^* \rightarrow \beta^*$ , el Teorema 2.11 2) nos da que

$$\vdash_{T'} \theta^* \leftrightarrow \theta$$

como queríamos.

Está claro que si  $\theta$  no tiene descriptores, entonces no los tienen  $\alpha$  ni  $\beta$  y con ello todo lo anterior puede probarse en  $T$ .

- Si  $\theta \equiv \bigwedge u\alpha$ , entonces por hipótesis de inducción tenemos que

$$\vdash_{T'} \alpha^* \leftrightarrow \alpha.$$

Teniendo en cuenta que  $\theta^* \equiv \bigwedge u\alpha^*$ , utilizando el Metateorema 2.10 obtenemos que

$$\vdash_{T'} \theta^* \leftrightarrow \theta.$$

tal y como buscábamos.

Está claro que si  $\theta$  no tiene descriptores, entonces no los tiene  $\alpha$  y con ello todo lo anterior puede probarse en  $T$ .

- Si  $\theta \equiv u|\alpha$ , entonces por hipótesis de inducción tenemos que

$$\vdash_{T'} \alpha^* \leftrightarrow \alpha.$$

Por otra parte, por (E.5) tenemos que

$$\vdash_{T'} y_\theta = u|\alpha \leftrightarrow \bigwedge u(\alpha \leftrightarrow u = y_\theta) \vee \left( \neg \bigvee^1 u\alpha \wedge \phi(y_\theta) \right)$$

y por el Teorema 2.11 es

$$\vdash \bigwedge u(\alpha \leftrightarrow u = y_\theta) \vee \left( \neg \bigvee^1 u\alpha \wedge \phi(y_\theta) \right) \leftrightarrow \bigwedge u(\alpha^* \leftrightarrow u = y_\theta) \vee \left( \neg \bigvee^1 u\alpha^* \wedge \phi(y_\theta) \right)$$

siendo la segunda fórmula de la equivalencia justamente  $\theta^*$ . Usando entonces la regla (MBB) obtenemos lo deseado.

Esto concluye la inducción y con ello la demostración. 

### Metateorema E.5

Si  $t$  es un término de  $\mathcal{L}'$  se cumple que

$$\vdash_T \bigvee^1 y_t t^*.$$

Lo demostraremos por inducción en la longitud del término  $t$ :

- Si  $t \equiv x_i$ , entonces  $t^* \equiv y_t = x_i$  con  $y_t \not\equiv x_i$  y tenemos la siguiente demostración (donde  $v$  es una variable que no está en  $t^*$ ):

- |     |                                                        |                                                   |
|-----|--------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| (1) | $t^* \leftrightarrow y_t = x_i$                        | Tma. 2.7                                          |
| (2) | $t^* \leftrightarrow x_i = y_t$                        | MBB 1, Tma. $y_t = x_i \leftrightarrow x_i = y_t$ |
| (3) | $\bigwedge y_t(t^* \leftrightarrow x_i = y_t)$         | IG 2                                              |
| (4) | $S_v^{x_i} \bigwedge y_t(t^* \leftrightarrow v = y_t)$ | R 3                                               |
| (5) | $\bigvee v \bigwedge y_t(t^* \leftrightarrow v = y_t)$ | IP 4                                              |
| (6) | $\bigvee^1 y_t t^*$                                    | SE 5, Tma. 2.9 3)                                 |

- Si  $t \equiv c_i$ , entonces  $t^* \equiv y_t = c_i$  y se prueba análogamente al caso anterior.
- Si  $t \equiv f_i^n t_1 \cdots t_n$ , por hipótesis de inducción tenemos que para cada  $j = 1, \dots, n$  se cumple que

$$\vdash_T \bigvee^1_{y_{t_j}} t_j^*. \quad (\text{E.11})$$

Así, por el Teorema 2.12 tenemos entonces que para cada  $j = 1, \dots, n$  se cumple que

$$\vdash_T \bigvee_{y_{t_j}} t_j^*$$

y esto nos permite probar que

$$\vdash_T \bigvee_{y_t} t^* \quad (\text{E.12})$$

como muestra la siguiente demostración (donde usamos que  $y_t$  no está libre en ningún  $S_{y_{t_j}}^{u_j} t_j^*$  por no estar libre en  $t_j$  y ser distinta de  $u_j$ ):

|        |                                                                                                                                               |                                                                             |
|--------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| (1)    | $\bigvee_{y_{t_1}} t_1^*$                                                                                                                     | Tma. $T$                                                                    |
|        | $\dots$                                                                                                                                       |                                                                             |
| (n)    | $\bigvee_{y_{t_n}} t_n^*$                                                                                                                     | Tma. $T$                                                                    |
| (n+1)  | $S_{y_{t_1}}^{u_1} t_1^*$                                                                                                                     | EP 1 ( $u_1$ no libre en $t_1^*$ o $u_1 \equiv y_{t_1}$ )                   |
| (n+2)  | $S_{y_{t_2}}^{u_2} t_2^*$                                                                                                                     | EP 2 ( $u_2$ no libre en $t_2^*$ [o $u_2 \equiv y_{t_2}$ ] ni en $n+1$ )    |
|        | $\dots$                                                                                                                                       |                                                                             |
| (2n)   | $S_{y_{t_n}}^{u_n} t_n^*$                                                                                                                     | EP $n$ ( $u_n$ no libre en $t_n^*$ [o $u_n \equiv y_{t_n}$ ] ni anteriores) |
| (2n+1) | $S_{y_{t_1}}^{u_1} t_1^* \wedge \dots \wedge S_{y_{t_n}}^{u_n} t_n^*$                                                                         | IC $n+1, \dots, 2n$                                                         |
| (2n+2) | $S_{y_{t_1}}^{u_1} t_1^* \wedge \dots \wedge S_{y_{t_n}}^{u_n} t_n^* \wedge$<br>$f_i^n u_1 \cdots u_1 = f_i^n u_1 \cdots u_1$                 | IC $2n+1, \text{I}$                                                         |
| (2n+3) | $S_{y_t}^{f_i^n u_1 \cdots u_n} (S_{y_{t_1}}^{u_1} t_1^* \wedge \dots \wedge$<br>$S_{y_{t_n}}^{u_n} t_n^* \wedge y_t = f_i^n u_1 \cdots u_1)$ | R $2n+2$                                                                    |
| (2n+4) | $\bigvee_{y_t} (S_{y_{t_1}}^{u_1} t_1^* \wedge \dots \wedge S_{y_{t_n}}^{u_n} t_n^* \wedge$<br>$y_t = f_i^n u_1 \cdots u_1)$                  | IP $2n+3$                                                                   |
| (2n+5) | $\bigvee_{u_1 \cdots u_n} y_t (S_{y_{t_1}}^{u_1} t_1^* \wedge \dots \wedge$<br>$S_{y_{t_n}}^{u_n} t_n^* \wedge y_t = f_i^n u_1 \cdots u_1)$   | IP $2n+4$ ( $\times n$ ) [ $u_1, \dots, u_n$ no libres]                     |
| (2n+6) | $\bigvee_{y_t} u_1 \cdots u_n (S_{y_{t_1}}^{u_1} t_1^* \wedge \dots \wedge$<br>$S_{y_{t_n}}^{u_n} t_n^* \wedge y_t = f_i^n u_1 \cdots u_1)$   | SE $2n+5$ , Mteo. 3.3                                                       |
| (2n+7) | $\bigvee_{y_t} t^*$                                                                                                                           | R $2n+6$                                                                    |

Por otro lado, si  $z$  es una variable que no está en  $t^*$ , también se tiene que

$$\vdash_T \bigwedge_{y_t} z (t^* \wedge S_{y_t}^z t^* \rightarrow z = y_t) \quad (\text{E.13})$$

como muestra la siguiente demostración (donde  $v_1, \dots, v_n$  son variables que no están en  $t$  y distintas de  $u_1, \dots, u_n, y_t, z$ ):

|     |                            |           |
|-----|----------------------------|-----------|
| (1) | $t^* \wedge S_{y_t}^z t^*$ | Hipótesis |
| (2) | $t^*$                      | EC 1      |
| (3) | $S_{y_t}^z t^*$            | EC 1      |

|         |                                                                                                                                 |                                               |
|---------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| (4)     | $\forall v_1 \cdots v_n (S_{y_{t_1}}^{v_1} t_1^* \wedge \cdots \wedge S_{y_{t_n}}^{v_n} t_n^* \wedge z = f_i^n v_1 \cdots v_n)$ | SE 3, Mteo. E.3 [Mteo. 1.18]<br>[(1.37)]      |
| (5)     | $S_{y_{t_1}}^{u_1} t_1^* \wedge \cdots \wedge S_{y_{t_n}}^{u_n} t_n^* \wedge y_t = f_i^n u_1 \cdots u_n$                        | EP 2 ( $u_1, \dots, u_n$ no libre en 1)       |
| (6)     | $S_{y_{t_1}}^{v_1} t_1^* \wedge \cdots \wedge S_{y_{t_n}}^{v_n} t_n^* \wedge z = f_i^n v_1 \cdots v_n$                          | EP 4 ( $v_1, \dots, v_n$ no libre en 1 ni 5)  |
| (7)     | $\bigvee_{y_{t_1}}^1 t_1^* \wedge S_{y_{t_1}}^{u_1} t_1^* \wedge S_{y_{t_1}}^{v_1} t_1^*$                                       | IC (E.11), (EC 5), (EC 6)                     |
| (8)     | $u_1 = v_1$                                                                                                                     | Mteo. 2.4 7                                   |
|         | $\dots$                                                                                                                         |                                               |
| (2n+6)  | $u_n = v_n$                                                                                                                     | Mteo. 2.4 $2n + 5$                            |
| (2n+7)  | $u_1 = v_1 \wedge \cdots \wedge u_n = v_n$                                                                                      | IC 8, 10, $\dots, 2n + 6$                     |
| (2n+8)  | $f_i^n u_1 \cdots u_n = f_i^n v_1 \cdots v_n$                                                                                   | Mteo. 2.17 $2n + 7$                           |
| (2n+9)  | $y_t = f_i^n u_1 \cdots u_n$                                                                                                    | EC 5                                          |
| (2n+10) | $y_t = f_i^n v_1 \cdots v_n$                                                                                                    | TI $2n + 8, 2n + 9$                           |
| (2n+11) | $z = f_i^n v_1 \cdots v_n$                                                                                                      | EC 6                                          |
| (2n+12) | $f_i^n v_1 \cdots v_n = y_t$                                                                                                    | SI $2n + 10$                                  |
| (2n+13) | $z = y_t$                                                                                                                       | TI $2n + 11, 2n + 12$ ( $u_j, v_k$ no libres) |
| (2n+14) | $t^* \wedge S_{y_t}^z t^* \rightarrow z = y_t$                                                                                  | Teo. deducción                                |
| (2n+15) | $\wedge y_t z (t^* \wedge S_{y_t}^z t^* \rightarrow z = y_t)$                                                                   | IG $2n + 14 (\times 2)$                       |

Usando el Teorema 2.12 junto a (E.12) y (E.13) obtenemos lo deseado.

- Si  $t \equiv u|\alpha$ , entonces  $y_t$  no está en  $\alpha$  y es distinta de  $u$ , luego por el Metateorema E.2  $y_t$  no puede estar libre en  $\alpha^*$ . Tomando entonces  $v$  una variable que no está en  $t^*$  (luego distinta de  $y_t$ ) tenemos la siguiente demostración:

|      |                                                                                                             |                                                       |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| (1)  | $\bigvee^1 u \alpha^*$                                                                                      | Hipótesis                                             |
| (2)  | $\forall y_t \wedge u(\alpha^* \leftrightarrow y_t = u)$                                                    | SE 1, Tma. 2.9 3) (Nota 5 pág. 67)                    |
| (3)  | $\forall y_t \wedge u(\alpha^* \leftrightarrow u = y_t)$                                                    | SE 2, Tma. 2.11 [ $y_t = u \leftrightarrow u = y_t$ ] |
| (4)  | $\wedge u(\alpha^* \leftrightarrow u = y_t)$                                                                | EP 3 ( $y_t$ no libre en 1)                           |
| (5)  | $t^*$                                                                                                       | ID 4                                                  |
| (6)  | $\forall y_t t^*$                                                                                           | IP 5 ( $y_t$ no libre)                                |
| (7)  | $t^* \wedge S_{y_t}^v t^*$                                                                                  | Hipótesis                                             |
| (8)  | $\wedge u(\alpha^* \leftrightarrow u = y_t) \vee \left( \neg \bigvee^1 u \alpha^* \wedge \phi(y_t) \right)$ | EC 7                                                  |
| (9)  | $\neg \neg \bigvee^1 u \alpha^*$                                                                            | DN 1                                                  |
| (10) | $\neg \neg \bigvee^1 u \alpha^* \vee \neg \phi(y_t)$                                                        | ID 9                                                  |
| (11) | $\neg \left( \neg \bigvee^1 u \alpha^* \wedge \phi(y_t) \right)$                                            | DM 10                                                 |
| (12) | $\wedge u(\alpha^* \leftrightarrow u = y_t)$                                                                | MTP 8, 11                                             |
| (13) | $\wedge u(\alpha^* \leftrightarrow u = v) \vee \left( \neg \bigvee^1 u \alpha^* \wedge \phi(v) \right)$     | EC 7 (Mteo. 1.21)                                     |
| (14) | $\neg \neg \bigvee^1 u \alpha^* \vee \neg \phi(v)$                                                          | ID 9                                                  |
| (15) | $\neg \left( \neg \bigvee^1 u \alpha^* \wedge \phi(v) \right)$                                              | DM 14                                                 |
| (16) | $\wedge u(\alpha^* \leftrightarrow u = v)$                                                                  | MTP 13, 15                                            |
| (17) | $S_u^{u \alpha^*} \alpha^* \leftrightarrow u \alpha^* = y_t$                                                | EG 12                                                 |

|      |                                                                                                                                            |                                                             |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| (18) | $S_u^{u \alpha^*} \alpha^* \leftrightarrow u \alpha^* = v$                                                                                 | EG 16                                                       |
| (19) | $S_u^{u \alpha^*} \alpha^*$                                                                                                                | DP 1                                                        |
| (20) | $u \alpha^* = y_t$                                                                                                                         | SE 17, 19                                                   |
| (21) | $u \alpha^* = v$                                                                                                                           | SE 18, 19                                                   |
| (22) | $v = u \alpha^*$                                                                                                                           | SI 21                                                       |
| (23) | $v = y_t$                                                                                                                                  | TI 20, 22                                                   |
| (24) | $t^* \wedge S_{y_t}^v t^* \rightarrow v = y_t$                                                                                             | Tma. deducción                                              |
| (25) | $\wedge v y_t (t^* \wedge S_{y_t}^v t^* \rightarrow v = y_t)$                                                                              | IG 24 ( $\times 2$ ) ( $v, y_t$ no libres en 1)             |
| (26) | $\forall y_t t^* \wedge \wedge v y_t (t^* \wedge S_{y_t}^v t^* \rightarrow v = y_t)$                                                       | IC 6, 25                                                    |
| (27) | $\overset{1}{\forall} u \alpha^* \rightarrow$<br>$\forall y_t t^* \wedge \wedge v y_t (t^* \wedge S_{y_t}^v t^* \rightarrow v = y_t)$      | Tma. deducción                                              |
| (28) | $\overset{1}{\neg \forall} u \alpha^*$                                                                                                     | Hipótesis                                                   |
| (29) | $\overset{1}{\forall} x \phi(x)$                                                                                                           | Tma. $T$ [Mteo. 3.7 (iii)]                                  |
| (30) | $\forall x \phi(x)$                                                                                                                        | EC (SE 29, Teo. 2.12)                                       |
| (31) | $\phi(y_t)$                                                                                                                                | EP 30 ( $y_t$ no libre en $\phi$ [o $y_t \equiv x$ ] ni 28) |
| (32) | $\overset{1}{\neg \forall} u \alpha^* \wedge \phi(y_t)$                                                                                    | IC 28, 31                                                   |
| (33) | $t^*$                                                                                                                                      | ID 32                                                       |
| (34) | $\forall y_t t^*$                                                                                                                          | IP 33 ( $y_t$ no libre)                                     |
| (35) | $t^* \wedge S_{y_t}^v t^*$                                                                                                                 | Hipótesis                                                   |
| (36) | $\wedge u (\alpha^* \leftrightarrow u = y_t)$                                                                                              | Hipótesis (RA)                                              |
| (37) | $\forall y_t \wedge u (\alpha^* \leftrightarrow u = y_t)$                                                                                  | IP 36                                                       |
| (38) | $\overset{1}{\forall} u \alpha^*$                                                                                                          | SE 37, Tma. 2.9 3) (contr. con 28)                          |
| (39) | $\neg \wedge u (\alpha^* \leftrightarrow u = y_t)$                                                                                         | Red. absurdo                                                |
| (40) | $t^*$                                                                                                                                      | EC 35                                                       |
| (41) | $\overset{1}{\neg \forall} u \alpha^* \wedge \phi(y_t)$                                                                                    | MTP 39, 40                                                  |
| (42) | $\wedge u (\alpha^* \leftrightarrow u = v)$                                                                                                | Hipótesis (RA)                                              |
| (43) | $\forall v \wedge u (\alpha^* \leftrightarrow u = v)$                                                                                      | IP 42                                                       |
| (44) | $\overset{1}{\forall} u \alpha^*$                                                                                                          | SE 43, Tma. 2.9 3) (contr. con 28)                          |
| (45) | $\neg \wedge u (\alpha^* \leftrightarrow u = v)$                                                                                           | Red. absurdo                                                |
| (46) | $\wedge u (\alpha^* \leftrightarrow u = v) \vee \left( \overset{1}{\neg \forall} u \alpha^* \wedge \phi(v) \right)$                        | EC 35 (Mteo. 1.21)                                          |
| (47) | $\overset{1}{\neg \forall} u \alpha^* \wedge \phi(v)$                                                                                      | MTP 45, 46                                                  |
| (48) | $\phi(y_t)$                                                                                                                                | EC 41                                                       |
| (49) | $\phi(v)$                                                                                                                                  | EC 47                                                       |
| (50) | $v = y_t$                                                                                                                                  | Mteo. 2.4 29, 48, 49                                        |
| (51) | $t^* \wedge S_{y_t}^v t^* \rightarrow v = y_t$                                                                                             | Tma. deducción                                              |
| (52) | $\wedge v y_t (t^* \wedge S_{y_t}^v t^* \rightarrow v = y_t)$                                                                              | IG 51 ( $\times 2$ ) ( $v, y_t$ no libres en 28)            |
| (53) | $\forall y_t t^* \wedge \wedge v y_t (t^* \wedge S_{y_t}^v t^* \rightarrow v = y_t)$                                                       | IC 34, 52                                                   |
| (54) | $\overset{1}{\neg \forall} u \alpha^* \rightarrow$<br>$\forall y_t t^* \wedge \wedge v y_t (t^* \wedge S_{y_t}^v t^* \rightarrow v = y_t)$ | Tma. deducción                                              |
| (55) | $\left( \overset{1}{\forall} u \alpha^* \vee \neg \overset{1}{\forall} u \alpha^* \right) \rightarrow$                                     | Dil 27, 54                                                  |

- $$\begin{aligned} & \forall y_t t^* \wedge \wedge v y_t (t^* \wedge S_{y_t}^v t^* \rightarrow v = y_t) \\ (56) \quad & \overset{1}{\forall} u \alpha^* \vee \neg \overset{1}{\forall} u \alpha^* & \text{TND} \\ (57) \quad & \forall y_t t^* \wedge \wedge v y_t (t^* \wedge S_{y_t}^v t^* \rightarrow v = y_t) & \text{MP 55, 56} \\ (58) \quad & \overset{1}{\forall} y_t t^* & \text{SE 57, Teo. 2.12} \end{aligned}$$

Esto finaliza la inducción y con ello la demostración. 

Para demostrar el siguiente metateorema relativo a la demostración necesitaremos previamente un resultado general:

### Metateorema E.6

Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje formal,  $\psi, \alpha, \beta, \gamma$  fórmulas en  $\mathcal{L}$ . Se cumplen:

- (i)  $\overset{1}{\forall} u \psi(u) \vdash \neg \forall u (\psi(u) \wedge \alpha) \leftrightarrow \forall u (\psi(u) \wedge \neg \alpha)$ .
- (ii)  $\overset{1}{\forall} u \psi(u) \vdash (\forall u (\psi(u) \wedge \alpha) \rightarrow \forall u (\psi(u) \wedge \beta)) \leftrightarrow \forall u (\psi(u) \wedge \alpha \rightarrow \beta)$ .
- (iii) Si  $v$  es una variable que no está libre en  $\psi(u)$ , entonces

$$\overset{1}{\forall} u \psi(u) \vdash \wedge v \forall u (\psi(u) \wedge \alpha) \leftrightarrow \forall u (\psi(u) \wedge \wedge v \alpha).$$

- (iv) Si  $v$  es una variable cualquiera y  $u$  una variable que no está libre en  $\beta$  ni  $\gamma$ , entonces

$$\begin{aligned} \overset{1}{\forall} u \psi(u) \vdash \wedge v (\forall u (\psi(u) \wedge \alpha) \leftrightarrow \beta) \vee \left( \neg \overset{1}{\forall} v \forall u (\psi(u) \wedge \alpha) \wedge \gamma \right) \leftrightarrow \\ \forall u \left( \psi(u) \wedge \left( \wedge v (\alpha \leftrightarrow \beta) \vee \left( \neg \overset{1}{\forall} v \alpha \wedge \gamma \right) \right) \right) \end{aligned}$$

Para **(i)** tenemos la siguiente demostración donde  $x$  y  $y$  son variables que no están en  $\psi(u)$  ni  $\alpha$  y distintas de  $u$ :

|      |                                                                                                  |                                          |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------|
| (1)  | $\neg \forall u (\psi(u) \wedge \alpha)$                                                         | Hipótesis                                |
| (2)  | $\wedge u (\neg \psi(u) \vee \neg \alpha)$                                                       | NP 1, Tma. 2.11 6) (DM)                  |
| (3)  | $\overset{1}{\forall} u \psi(u)$                                                                 | Premisa                                  |
| (4)  | $\forall u \psi(u)$                                                                              | EC (SE 3, Tma. 2.12)                     |
| (5)  | $\psi(u)$                                                                                        | EP 4 ( $u$ no libre en 1)                |
| (6)  | $\neg \psi(u) \vee \neg \alpha$                                                                  | EG 2                                     |
| (7)  | $\neg \alpha$                                                                                    | MTP (DN 5), 6                            |
| (8)  | $\psi(u) \wedge \neg \alpha$                                                                     | IC 5, 7                                  |
| (9)  | $\forall u (\psi(u) \wedge \neg \alpha)$                                                         | IP 8 ( $u$ no libre)                     |
| (10) | $\neg \forall u (\psi(u) \wedge \alpha) \rightarrow$<br>$\forall u (\psi(u) \wedge \neg \alpha)$ | Tma. deducción                           |
| (11) | $\forall u (\psi(u) \wedge \neg \alpha)$                                                         | Hipótesis                                |
| (12) | $\forall u (\psi(u) \wedge \alpha)$                                                              | Hipótesis (RA)                           |
| (13) | $S_u^x \psi(u) \wedge \neg S_u^x \alpha$                                                         | EP 11 ( $x \neq u$ no libre en 11 ni 12) |

|      |                                                                                               |                                              |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|
| (14) | $S_u^y \psi(u) \wedge S_u^y \alpha$                                                           | EP 12 ( $y \neq u$ no libre en 11, 12 ni 13) |
| (15) | $\bigvee^1 u \psi(u)$                                                                         | Premisa                                      |
| (16) | $x = y$                                                                                       | Mteo. 2.4 (EC 13), (EC 14), 15               |
| (17) | $S_u^x \alpha$                                                                                | ETI (EC 14), 16                              |
| (18) | $u = u \wedge u \neq u$                                                                       | C (EC 13), 17 ( $x, y$ no libres)            |
| (19) | $\neg \bigvee u(\psi(u) \wedge \alpha)$                                                       | Red. absurdo                                 |
| (20) | $\bigvee u(\psi(u) \wedge \neg \alpha) \rightarrow \neg \bigvee u(\psi(u) \wedge \alpha)$     | Tma. deducción                               |
| (21) | $\neg \bigvee u(\psi(u) \wedge \alpha) \leftrightarrow \bigvee u(\psi(u) \wedge \neg \alpha)$ | IB 10, 20                                    |

Para (ii) tenemos la siguiente demostración donde  $x$  y  $y$  son variables que no están en  $\psi(u)$ ,  $\alpha$  ni  $\beta$  y distintas de  $u$ :

|      |                                                                                |                                               |
|------|--------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| (1)  | $\bigvee u(\psi(u) \wedge \alpha) \rightarrow \bigvee u(\psi(u) \wedge \beta)$ | Hipótesis                                     |
| (2)  | $\neg \bigvee u(\psi(u) \wedge \alpha \rightarrow \beta)$                      | Hipótesis (RA)                                |
| (3)  | $\bigwedge u(\neg \psi(u) \vee (\alpha \wedge \neg \beta))$                    | NP 2, Tma. 2.11 (DM, NI <sub>1</sub> )        |
| (4)  | $\bigvee^1 u \psi(u)$                                                          | Premisa                                       |
| (5)  | $\bigvee u \psi(u)$                                                            | EC (SE 4, Tma. 2.12)                          |
| (6)  | $\psi(u)$                                                                      | EP 5 ( $u$ no libre 1 ni 2)                   |
| (7)  | $\neg \psi(u) \vee (\alpha \wedge \neg \beta)$                                 | EG 3                                          |
| (8)  | $\alpha \wedge \neg \beta$                                                     | MTP (DN 6), 7                                 |
| (9)  | $\psi(u) \wedge \alpha$                                                        | IC 6, (EC 8)                                  |
| (10) | $\bigvee u(\psi(u) \wedge \alpha)$                                             | IP 9                                          |
| (11) | $\bigvee u(\psi(u) \wedge \beta)$                                              | MP 1, 10                                      |
| (12) | $S_u^x \psi(u) \wedge S_u^x \beta$                                             | EP 11 ( $x \neq u$ no libre en 1, 2, 6 ni 11) |
| (13) | $S_u^x \psi(u)$                                                                | EC 12                                         |
| (14) | $u = x$                                                                        | Mteo. 2.4 4, 6, 13                            |
| (15) | $\beta$                                                                        | ETI (EC 12), 14                               |
| (16) | $y = y \wedge y \neq y$                                                        | C (EC 8), 15 ( $u, x$ no libres)              |
| (17) | $\bigvee u(\psi(u) \wedge \alpha \rightarrow \beta)$                           | Red. absurdo                                  |
| (18) | $(1) \rightarrow \bigvee u(\psi(u) \wedge \alpha \rightarrow \beta)$           | Tma. deducción                                |
| (19) | $\bigvee u(\psi(u) \wedge \alpha \rightarrow \beta)$                           | Hipótesis                                     |
| (20) | $\bigvee u(\psi(u) \wedge \alpha)$                                             | Hipótesis                                     |
| (21) | $S_u^x \psi(u) \wedge (S_u^x \alpha \rightarrow S_u^x \beta)$                  | EP 19 ( $x \neq u$ no libre 19 ni 20)         |
| (22) | $S_u^y \psi(u) \wedge S_u^y \alpha$                                            | EP 20 ( $y \neq u$ no libre 19, 20 ni 21)     |
| (23) | $\bigvee^1 u \psi(u)$                                                          | Premisa                                       |
| (24) | $x = y$                                                                        | Mteo. 2.4 (EC 21), (EC 22), 23                |
| (25) | $S_u^x \alpha$                                                                 | ETI (EC 22), 24                               |
| (26) | $S_u^x \beta$                                                                  | MP (EC 21), 25                                |
| (27) | $S_u^x(\psi(u) \wedge \beta)$                                                  | IC (EC 21), 26                                |
| (28) | $\bigvee u(\psi(u) \wedge \beta)$                                              | IP 27 ( $x, y$ no libres)                     |
| (29) | $\bigvee u(\psi(u) \wedge \alpha) \rightarrow \bigvee u(\psi(u) \wedge \beta)$ | Tma. deducción                                |
| (30) | $\bigvee u(\psi(u) \wedge \alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (1)$           | Tma. deducción                                |
| (31) | $(1) \leftrightarrow \bigvee u(\psi(u) \wedge \alpha \rightarrow \beta)$       | IB 18, 30                                     |



Para **demostrar (iii)** observemos en primer lugar que como  $v$  no está libre en  $\psi(u)$  el Teorema 2.14 nos da que

$$\vdash (\psi(u) \wedge \bigwedge v \alpha) \leftrightarrow \bigwedge v (\psi(u) \wedge \alpha).$$

Utilizando entonces el Metateorema 2.10 obtenemos que

$$\vdash \bigvee u (\psi(u) \wedge \bigwedge v \alpha) \leftrightarrow \bigvee u \bigwedge v (\psi(u) \wedge \alpha),$$

con lo que, por la regla (MBB), basta ver que

$$\overset{1}{\bigvee u} \psi(u) \vdash \bigvee u \bigwedge v (\psi(u) \wedge \alpha) \leftrightarrow \bigwedge v \bigvee u (\psi(u) \wedge \alpha). \quad (\text{E.14})$$

Para probar esto último tenemos la siguiente demostración (donde  $w$  no está en  $\psi(u)$  ni  $\alpha$  y es distinta de  $u, v$ ):

|      |                                                                                                                    |                                             |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|
| (1)  | $\bigvee u \bigwedge v (\psi(u) \wedge \alpha)$                                                                    | Hipótesis                                   |
| (2)  | $\bigwedge v (\psi(u) \wedge \alpha)$                                                                              | EP 1 ( $u$ no libre en 1)                   |
| (3)  | $\psi(u) \wedge \alpha$                                                                                            | EG 2                                        |
| (4)  | $\bigvee u (\psi(u) \wedge \alpha)$                                                                                | IP 3 ( $u$ no libre)                        |
| (5)  | $\bigwedge v \bigvee u (\psi(u) \wedge \alpha)$                                                                    | IG 4 ( $v$ no libre en 1)                   |
| (6)  | $\bigvee u \bigwedge v (\psi(u) \wedge \alpha) \rightarrow$<br>$\bigwedge v \bigvee u (\psi(u) \wedge \alpha)$     | Tma. deducción                              |
| (7)  | $\bigwedge v \bigvee u (\psi(u) \wedge \alpha)$                                                                    | Hipótesis                                   |
| (8)  | $\overset{1}{\bigvee u} \psi(u)$                                                                                   | Premisa                                     |
| (9)  | $\bigvee u \psi(u)$                                                                                                | EC (SE 8, Tma. 2.12)                        |
| (10) | $\psi(u)$                                                                                                          | EP 9 ( $u$ no libre en 7)                   |
| (11) | $\bigvee u (\psi(u) \wedge \alpha)$                                                                                | EG 7                                        |
| (12) | $S_u^w \psi(u) \wedge S_u^w \alpha$                                                                                | EP 11 ( $w \neq u$ no libre en 7, 10 ni 11) |
| (13) | $u = w$                                                                                                            | Mteo. 2.4 8, 10, (EC 12)                    |
| (14) | $\alpha$                                                                                                           | ETI (EC 12), 13                             |
| (15) | $\psi(u) \wedge \alpha$                                                                                            | IC 10, 14 ( $w$ no libre)                   |
| (16) | $\bigwedge v (\psi(u) \wedge \alpha)$                                                                              | IG 15 ( $v$ no libre en 7 ni 10)            |
| (17) | $\bigvee u \bigwedge v (\psi(u) \wedge \alpha)$                                                                    | IP 16 ( $u$ no libre)                       |
| (18) | $\bigwedge v \bigvee u (\psi(u) \wedge \alpha) \rightarrow$<br>$\bigvee u \bigwedge v (\psi(u) \wedge \alpha)$     | Tma. deducción                              |
| (19) | $\bigvee u \bigwedge v (\psi(u) \wedge \alpha) \leftrightarrow$<br>$\bigwedge v \bigvee u (\psi(u) \wedge \alpha)$ | IB 6, 18                                    |

Tenemos pues probado (E.14) y con ello concluimos la demostración.

Finalmente, para **demostrar (iv)** veamos en primer lugar que

$$\overset{1}{\bigvee u} \psi(u) \vdash \psi(u) \rightarrow (\alpha \leftrightarrow \bigvee u (\psi(u) \wedge \alpha)). \quad (\text{E.15})$$

Para ello tenemos la siguiente demostración donde  $w$  es una variable distinta de  $u$  que no está libre en  $\psi(u)$  ni  $\alpha$ :

|      |                                                                                 |                                       |
|------|---------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------|
| (1)  | $\psi(u)$                                                                       | Hipótesis                             |
| (2)  | $\alpha$                                                                        | Hipótesis                             |
| (3)  | $\psi(u) \wedge \alpha$                                                         | IC 1, 2                               |
| (4)  | $\forall u(\psi(u) \wedge \alpha)$                                              | IP 3                                  |
| (5)  | $\alpha \rightarrow \forall u(\psi(u) \wedge \alpha)$                           | Tma. deducción                        |
| (6)  | $\forall u(\psi(u) \wedge \alpha)$                                              | Hipótesis                             |
| (7)  | $S_u^w \psi(u) \wedge S_u^w \alpha$                                             | EP 6 ( $w \neq u$ no libre en 1 ni 6) |
| (8)  | $S_u^w \psi(u)$                                                                 | EC 7                                  |
| (9)  | $\overset{1}{\forall} u \psi(u)$                                                | Premisa                               |
| (10) | $u = w$                                                                         | Mteo. 2.4 1, 8, 9                     |
| (11) | $\alpha$                                                                        | ETI (EC 7), 10 ( $w$ no libre)        |
| (12) | $\forall u(\psi(u) \wedge \alpha) \rightarrow \alpha$                           | Tma. deducción                        |
| (13) | $\alpha \leftrightarrow \forall u(\psi(u) \wedge \alpha)$                       | IB 5, 12                              |
| (14) | $\psi(u) \rightarrow (\alpha \leftrightarrow \forall u(\psi(u) \wedge \alpha))$ | Tma. deducción                        |

Con esto podemos ya probar el resultado buscado (donde  $w$  es una variable distinta de  $u, v$  que no está en  $\psi(u), \alpha, \beta$  ni  $\gamma$ ):

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                       |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------|
| (1)  | $\overset{1}{\forall} u \psi(u)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | Premisa                               |
| (2)  | $\psi(u) \rightarrow (\alpha \leftrightarrow \forall u(\psi(u) \wedge \alpha))$                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | (E.15) 1                              |
| (3)  | $\forall u \psi(u)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | EC (SE 1, Tma. 2.12)                  |
| (4)  | $\psi(u)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | EP 2                                  |
| (5)  | $\alpha \leftrightarrow \forall u(\psi(u) \wedge \alpha)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | MP 2, 4                               |
| (6)  | $\wedge v (\forall u(\psi(u) \wedge \alpha) \leftrightarrow \beta) \vee$<br>$\left( \neg \overset{1}{\forall} v \forall u(\psi(u) \wedge \alpha) \wedge \gamma \right)$                                                                                                                                                                                                                    | Hipótesis                             |
| (7)  | $\wedge v (\alpha \leftrightarrow \beta) \vee \left( \neg \overset{1}{\forall} v \alpha \wedge \gamma \right)$                                                                                                                                                                                                                                                                             | Tma. 2.11 5, 6                        |
| (8)  | $\psi(u) \wedge \left( \wedge v (\alpha \leftrightarrow \beta) \vee \left( \neg \overset{1}{\forall} v \alpha \wedge \gamma \right) \right)$                                                                                                                                                                                                                                               | IC 4, 7                               |
| (9)  | $\forall u \left( \psi(u) \wedge \left( \wedge v (\alpha \leftrightarrow \beta) \vee \left( \neg \overset{1}{\forall} v \alpha \wedge \gamma \right) \right) \right)$                                                                                                                                                                                                                      | IP 8                                  |
| (10) | $\left( \wedge v (\forall u(\psi(u) \wedge \alpha) \leftrightarrow \beta) \vee \right.$<br>$\left. \left( \neg \overset{1}{\forall} v \forall u(\psi(u) \wedge \alpha) \wedge \gamma \right) \right) \rightarrow$<br>$\forall u \left( \psi(u) \wedge \left( \wedge v (\alpha \leftrightarrow \beta) \vee \left( \neg \overset{1}{\forall} v \alpha \wedge \gamma \right) \right) \right)$ | Tma. deducción                        |
| (11) | $\forall u \left( \psi(u) \wedge \left( \wedge v (\alpha \leftrightarrow \beta) \vee \left( \neg \overset{1}{\forall} v \alpha \wedge \gamma \right) \right) \right)$                                                                                                                                                                                                                      | Hipótesis                             |
| (12) | $S_u^w \psi(u) \wedge S_u^w \left( \wedge v (\alpha \leftrightarrow \beta) \vee \left( \neg \overset{1}{\forall} v \alpha \wedge \gamma \right) \right)$                                                                                                                                                                                                                                   | EP 11 ( $w \neq u$ no libre en 4, 11) |
| (13) | $S_u^w \psi(u)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | EC 12                                 |
| (14) | $u = w$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Mteo. 2.4 1, 4, 13                    |
| (15) | $\wedge v (\alpha \leftrightarrow \beta) \vee \left( \neg \overset{1}{\forall} v \alpha \wedge \gamma \right)$                                                                                                                                                                                                                                                                             | ETI (EC 12), 14                       |
| (16) | $\wedge v (\forall u(\psi(u) \wedge \alpha) \leftrightarrow \beta) \vee$<br>$\left( \neg \overset{1}{\forall} v \forall u(\psi(u) \wedge \alpha) \wedge \gamma \right)$                                                                                                                                                                                                                    | Tma. 2.11 5, 15 ( $w$ no libre)       |
| (17) | $\forall u \left( \psi(u) \wedge \left( \wedge v (\alpha \leftrightarrow \beta) \vee \left( \neg \overset{1}{\forall} v \alpha \wedge \gamma \right) \right) \right) \rightarrow$                                                                                                                                                                                                          | Tma. deducción                        |

$$\begin{aligned}
(18) \quad & \left( \left( \bigwedge v (\bigvee u (\psi(u) \wedge \alpha) \leftrightarrow \beta) \vee \right. \right. \\
& \left. \left. \left( \neg \bigvee^1 v \bigvee u (\psi(u) \wedge \alpha) \wedge \gamma \right) \right) \right) \\
& \left( \bigwedge v (\bigvee u (\psi(u) \wedge \alpha) \leftrightarrow \beta) \vee \right. \\
& \left. \left( \neg \bigvee^1 v \bigvee u (\psi(u) \wedge \alpha) \wedge \gamma \right) \right) \leftrightarrow \\
& \bigvee u \left( \psi(u) \wedge \left( \bigwedge v (\alpha \leftrightarrow \beta) \vee \left( \neg \bigvee^1 v \alpha \wedge \gamma \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

IB 10, 17 ( $u$  no libre)

Con esto concluye la demostración de (iv) y con ello del metateorema.



### Metateorema E.7

Sean  $\theta$  y  $t$  una expresión y un término de  $\mathcal{L}'$ ,  $z$  una variable y  $u$  una variable que no está en  $\theta$  ni en  $t$  y distinta de  $z, y_\theta$  e  $y_t$ . Se cumple que

$$\vdash_T (S_z^t \theta)^* \leftrightarrow \bigvee u (S_{y_t}^u t^* \wedge S_z^u \theta^*)$$

si  $\theta$  es una fórmula y

$$\vdash_T S_{y_{S_z^t \theta}}^y (S_z^t \theta)^* \leftrightarrow \bigvee u (S_{y_t}^u t^* \wedge S_z^u S_{y_\theta}^y \theta^*)$$

si  $\theta$  es un término, siendo  $y$  cualquier variable que no esté en  $\theta$  ni  $S_z^t \theta$  y sea distinta de  $z$  y  $u$ .

Lo demostraremos por inducción en la longitud de  $\theta$ :

■ Si  $\theta \equiv x_i$  distinguimos dos casos:

- Si  $x_i \equiv z$ , entonces debemos demostrar que (donde usamos que  $y \neq z$ )

$$\vdash_T S_{y_t}^y t^* \leftrightarrow \bigvee u (S_{y_t}^u t^* \wedge y = u), \quad (\text{E.16})$$

lo cual se obtiene con la siguiente demostración (donde usamos que  $u$  no está libre en  $t^*$  por no estar en  $t$  y ser distinta de  $y_t$ ):

|      |                                                                    |                           |
|------|--------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| (1)  | $S_{y_t}^y t^*$                                                    | Hipótesis                 |
| (2)  | $S_u^y S_{y_t}^u t^*$                                              | SE 1, Mteo. 2.2           |
| (3)  | $S_u^y S_{y_t}^u t^* \wedge y = y$                                 | IC 1, I                   |
| (4)  | $S_u^y (S_{y_t}^u t^* \wedge y = u)$                               | R 3                       |
| (5)  | $\bigvee u (S_{y_t}^u t^* \wedge y = u)$                           | IP 4                      |
| (6)  | $S_{y_t}^y t^* \rightarrow \bigvee u (S_{y_t}^u t^* \wedge y = u)$ | Tma. deducción            |
| (7)  | $\bigvee u (S_{y_t}^u t^* \wedge y = u)$                           | Hipótesis                 |
| (8)  | $S_{y_t}^u t^* \wedge y = u$                                       | EP 7 ( $u$ no libre en 7) |
| (9)  | $S_{y_t}^u t^*$                                                    | EC 8                      |
| (10) | $y = u$                                                            | EC 8                      |
| (11) | $S_{y_t}^y t^*$                                                    | ETI 9, 10 ( $u$ no libre) |

$$(12) \quad \forall u (S_{y_t}^u t^* \wedge y = u) \rightarrow S_{y_t}^y t^* \quad \text{Tma. deducción}$$

$$(13) \quad S_{y_t}^y t^* \leftrightarrow \forall u (S_{y_t}^u t^* \wedge y = u) \quad \text{IB 6, 12}$$

- Si  $x_i \neq z$ , entonces debemos demostrar que (donde usamos que  $y \neq z$ )

$$\vdash_T y = x_i \leftrightarrow \forall u (S_{y_t}^u t^* \wedge y = x_i), \quad (\text{E.17})$$

lo cual se obtiene con la siguiente demostración (donde usamos que  $u$  no está libre en  $t^*$  por no estar en  $t$  y ser distinta de  $y_t$ ):

|      |                                                                    |                                       |
|------|--------------------------------------------------------------------|---------------------------------------|
| (1)  | $y = x_i$                                                          | Hipótesis                             |
| (2)  | $\overset{1}{\forall} y_t t^*$                                     | Mteo. E.5                             |
| (3)  | $\forall y_t t^*$                                                  | EC (SE 2, Tma. 2.12)                  |
| (4)  | $S_{y_t}^u t^*$                                                    | EP 3 ( $u$ no libre en $t^*$ ni en 1) |
| (5)  | $S_{y_t}^u t^* \wedge y = x_i$                                     | IC 1, 4                               |
| (6)  | $\forall u (S_{y_t}^u t^* \wedge y = x_i)$                         | IP 5 ( $u$ no libre)                  |
| (7)  | $y = x_i \rightarrow \forall u (S_{y_t}^u t^* \wedge y = x_i)$     | Tma. deducción                        |
| (8)  | $\forall u (S_{y_t}^u t^* \wedge y = x_i)$                         | Hipótesis                             |
| (9)  | $S_{y_t}^u t^* \wedge y = x_i$                                     | EP 9 ( $u$ no libre en 8)             |
| (10) | $y = x_i$                                                          | EC 9 ( $u$ no libre)                  |
| (11) | $\forall u (S_{y_t}^u t^* \wedge y = x_i) \rightarrow y = x_i$     | Tma. deducción                        |
| (12) | $y = x_i \leftrightarrow \forall u (S_{y_t}^u t^* \wedge y = x_i)$ | IB 7, 11                              |

En cualquiera de los dos casos obtenemos lo deseado.

- Si  $\theta \equiv c_i$ , entonces entonces debemos demostrar que (donde usamos que  $y \neq z$ )

$$\vdash_T y = c_i \leftrightarrow \forall u (S_{y_t}^u t^* \wedge y = c_i), \quad (\text{E.18})$$

lo cual se obtiene con la siguiente demostración (donde usamos que  $u$  no está libre en  $t^*$  por no estar en  $t$  y ser distinta de  $y_t$ ):

|      |                                                                    |                                       |
|------|--------------------------------------------------------------------|---------------------------------------|
| (1)  | $y = c_i$                                                          | Hipótesis                             |
| (2)  | $\overset{1}{\forall} y_t t^*$                                     | Mteo. E.5                             |
| (3)  | $\forall y_t t^*$                                                  | EC (SE 2, Tma. 2.12)                  |
| (4)  | $S_{y_t}^u t^*$                                                    | EP 3 ( $u$ no libre en $t^*$ ni en 1) |
| (5)  | $S_{y_t}^u t^* \wedge y = c_i$                                     | IC 1, 4                               |
| (6)  | $\forall u (S_{y_t}^u t^* \wedge y = c_i)$                         | IP 5 ( $u$ no libre)                  |
| (7)  | $y = c_i \rightarrow \forall u (S_{y_t}^u t^* \wedge y = c_i)$     | Tma. deducción                        |
| (8)  | $\forall u (S_{y_t}^u t^* \wedge y = c_i)$                         | Hipótesis                             |
| (9)  | $S_{y_t}^u t^* \wedge y = c_i$                                     | EP 9 ( $u$ no libre en 8)             |
| (10) | $y = c_i$                                                          | EC 9 ( $u$ no libre)                  |
| (11) | $\forall u (S_{y_t}^u t^* \wedge y = c_i) \rightarrow y = c_i$     | Tma. deducción                        |
| (12) | $y = c_i \leftrightarrow \forall u (S_{y_t}^u t^* \wedge y = c_i)$ | IB 7, 11                              |

- Si  $\theta \equiv R_i^n t_1 \cdots t_n$  tomamos  $v_1, \dots, v_n$  variables que no están en  $\theta, t$  ni  $S_z^t \theta$  y distintas de  $y_\theta, z, y_{S_z^t \theta}$  y  $u$ , con lo que por el Metateorema E.3 obtenemos que

$$\vdash \theta^* \leftrightarrow \bigvee v_1 \cdots v_n \left( S_{y_{t_1}}^{v_1} t_1^* \wedge \cdots \wedge S_{y_{t_n}}^{v_n} t_n^* \wedge R_i^n v_1 \cdots v_n \right) \quad (\text{E.19})$$

y

$$\vdash (S_z^t \theta)^* \leftrightarrow \bigvee v_1 \cdots v_n \left( S_{y_{S_z^t t_1}}^{v_1} (S_z^t t_1)^* \wedge \cdots \wedge S_{y_{S_z^t t_n}}^{v_n} (S_z^t t_n)^* \wedge R_i^n v_1 \cdots v_n \right). \quad (\text{E.20})$$

Además, si tomamos  $w$  una variable que no está en  $\theta$  ni  $t$  y distinta de  $z, y_t, y_\theta, u, y_{t_1}, \dots, y_{t_n}$  y de cada  $v_j$ , por hipótesis de inducción tenemos que

$$\vdash_T S_{y_{S_z^t t_j}}^{v_j} (S_z^t t_j)^* \leftrightarrow \bigvee w \left( S_{y_t}^w t^* \wedge S_z^w S_{y_{t_j}}^{v_j} t_j^* \right). \quad (\text{E.21})$$

Con esto podemos demostrar que

$$\vdash_T \underbrace{S_{y_{S_z^t t_1}}^{v_1} (S_z^t t_1)^* \wedge \cdots \wedge S_{y_{S_z^t t_n}}^{v_n} (S_z^t t_n)^* \wedge R_i^n v_1 \cdots v_n}_{\alpha} \leftrightarrow \bigvee u \left( \underbrace{S_{y_t}^u t^* \wedge S_z^u}_{\beta} \left( \underbrace{S_{y_{t_1}}^{v_1} t_1^* \wedge \cdots \wedge S_{y_{t_n}}^{v_n} t_n^* \wedge R_i^n v_1 \cdots v_n}_{\gamma} \right) \right). \quad (\text{E.22})$$

En efecto, para la demostración de la implicación de izquierda a derecha tenemos (donde observamos que  $u$  no está libre en  $t^*$  porque no está en  $t$  y es distinta de  $y_t$ , y no está libre en  $\alpha$  pues es distinta de cada  $v_j$  y no está en  $t$  ni  $t_j$ ):

|          |                                                                               |                                            |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|
| (1)      | $\alpha$                                                                      | Hipótesis                                  |
| (2)      | $\bigvee y_t t^*$                                                             | Mteo. E.5                                  |
| (3)      | $\bigvee y_t t^*$                                                             | EC 2, Teo. 2.12                            |
| (4)      | $S_{y_t}^u t^*$                                                               | EP 3 ( $u$ no libre en $t^*$ ni $\alpha$ ) |
| (5)      | $\bigvee w \left( S_{y_t}^w t^* \wedge S_z^w S_{y_{t_1}}^{v_1} t_1^* \right)$ | SE (EC 1), (E.21)                          |
| (6)      | $S_{y_t}^w t^* \wedge S_z^w S_{y_{t_1}}^{v_1} t_1^*$                          | EP 5 ( $w$ no libre en 1 ni 4)             |
| (7)      | $S_{y_t}^w t^*$                                                               | EC 6                                       |
| (8)      | $u = w$                                                                       | Mteo. 2.4 2, 4, 7                          |
| (9)      | $S_z^w S_{y_{t_1}}^{v_1} t_1^*$                                               | EC 6                                       |
| (10)     | $S_z^u S_{y_{t_1}}^{v_1} t_1^*$                                               | ETI 8, 9 ( $w$ no libre)                   |
|          | $\dots$                                                                       |                                            |
| (6n - 1) | $\bigvee w \left( S_{y_t}^w t^* \wedge S_z^w S_{y_{t_n}}^{v_n} t_n^* \right)$ | SE (EC 1), (E.21)                          |
| (6n)     | $S_{y_t}^w t^* \wedge S_z^w S_{y_{t_n}}^{v_n} t_n^*$                          | EP 6n - 1 ( $w$ no libre en 1 ni 4)        |
| (6n + 1) | $S_{y_t}^w t^*$                                                               | EC 6n                                      |
| (6n + 2) | $u = w$                                                                       | Mteo. 2.4 2, 4, 6n + 1                     |
| (6n + 3) | $S_z^w S_{y_{t_n}}^{v_n} t_n^*$                                               | EC 6n                                      |
| (6n + 4) | $S_z^u S_{y_{t_n}}^{v_n} t_n^*$                                               | ETI 6n + 2, 6n + 3 ( $w$ no libre)         |

|                                                   |                                     |
|---------------------------------------------------|-------------------------------------|
| $(6n+5) \quad \beta$                              | IC 4, 10, $\dots$ , $6n+4$ , (EC 1) |
| $(6n+6) \quad \forall u \beta$                    | IP $6n+5$ ( $u$ no libre)           |
| $(6n+7) \quad \alpha \rightarrow \forall u \beta$ | Tma. deducción                      |

Por otra parte, si denotamos por

$$\beta_w \equiv S_{y_t}^w t^* \wedge S_z^w (S_{y_{t_1}}^{v_1} t_1^* \wedge \dots \wedge S_{y_{t_n}}^{v_n} t_n^* \wedge R_i^n v_1 \dots v_n),$$

el Metateorema 2.2 nos garantiza que

$$\vdash S_u^w \beta \leftrightarrow \beta_w, \quad (\text{E.23})$$

y con ello obtenemos la siguiente demostración para la implicación de derecha a izquierda en (E.22):

|        |                                                                  |                                                 |
|--------|------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| (1)    | $\forall u \beta$                                                | Hipótesis                                       |
| (2)    | $S_u^w \beta$                                                    | EP 1 ( $w$ no libre en $\beta$ ni 1)            |
| (3)    | $\beta_w$                                                        | SE 2, (E.23)                                    |
| (4)    | $S_{y_t}^w t^* \wedge S_z^w S_{y_{t_1}}^{v_1} t_1^*$             | EC 3                                            |
| (5)    | $\forall w (S_{y_t}^w t^* \wedge S_z^w S_{y_{t_1}}^{v_1} t_1^*)$ | IP 4                                            |
| (6)    | $S_{y_{S_z^t t_1}}^{v_1} (S_z^t t_1)^*$                          | SE 5, (E.21)                                    |
| ...    |                                                                  |                                                 |
| (3n)   | $S_{y_t}^w t^* \wedge S_z^w S_{y_{t_n}}^{v_n} t_n^*$             | EC 3                                            |
| (3n+1) | $\forall w (S_{y_t}^w t^* \wedge S_z^w S_{y_{t_n}}^{v_n} t_n^*)$ | IP 3n                                           |
| (3n+2) | $S_{y_{S_z^t t_n}}^{v_n} (S_z^t t_n)^*$                          | SE 3n+1, (E.21)                                 |
| (3n+3) | $\alpha$                                                         | IC 6, $\dots$ , $3n+2$ , (EC 3) ( $w$ no libre) |
| (3n+4) | $\forall u \beta \rightarrow \alpha$                             | Tma. deducción                                  |

Con todo, usando la regla (IB) junto a las demostraciones anteriores obtenemos que, en efecto, se cumple (E.22).

Finalmente, tenemos la siguiente demostración:

|      |                                                                                |                                                        |
|------|--------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| (1)  | $(S_z^t \theta)^*$                                                             | Hipótesis                                              |
| (2)  | $\forall v_1 \dots v_n \alpha$                                                 | SE 1, (E.20)                                           |
| (3)  | $\alpha$                                                                       | EP 2 ( $\times n$ ) ( $v_1, \dots, v_n$ no libre en 1) |
| (4)  | $\forall u \beta$                                                              | SE 3, (E.22)                                           |
| (5)  | $\beta$                                                                        | EP 4 ( $u$ no libre en 1 ni 3)                         |
| (6)  | $S_z^u \gamma$                                                                 | EC 5                                                   |
| (7)  | $\forall v_1 \dots v_n S_z^u \gamma$                                           | IP 6 ( $\times n$ )                                    |
| (8)  | $S_z^u \forall v_1 \dots v_n \gamma$                                           | R 7 [(1.37)]                                           |
| (9)  | $S_z^u \theta^*$                                                               | SE 8, (Mteo. 1.18 (E.19))                              |
| (10) | $S_{y_t}^u t^* \wedge S_z^u \theta^*$                                          | IC (EC 5), 9                                           |
| (11) | $\forall u (S_{y_t}^u t^* \wedge S_z^u \theta^*)$                              | IP 10 ( $v_1, \dots, v_n, u$ no libres)                |
| (12) | $(S_z^t \theta)^* \rightarrow \forall u (S_{y_t}^u t^* \wedge S_z^u \theta^*)$ | Teo. deducción                                         |
| (13) | $\forall u (S_{y_t}^u t^* \wedge S_z^u \theta^*)$                              | Hipótesis                                              |
| (14) | $S_{y_t}^u t^* \wedge S_z^u \theta^*$                                          | EP 13 ( $u$ no libre en 13)                            |
| (15) | $S_z^u \theta^*$                                                               | EC 14                                                  |
| (16) | $S_z^u \forall v_1 \dots v_n \gamma$                                           | SE 15, (Mteo. 1.18 (E.19))                             |

|      |                                                                                    |                                                                |
|------|------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| (17) | $\forall v_1 \cdots v_n S_z^u \gamma$                                              | R 16 [(1.37)]                                                  |
| (18) | $S_z^u \gamma$                                                                     | EP 17 ( $\times n$ ) ( $v_1, \dots, v_n$ no libre en 13 ni 14) |
| (19) | $\beta$                                                                            | IC (EC 14), 18                                                 |
| (20) | $\forall u \beta$                                                                  | IP 19                                                          |
| (21) | $\alpha$                                                                           | SE 20, (E.22)                                                  |
| (22) | $\forall v_1 \cdots v_n \alpha$                                                    | IP 21 ( $\times n$ ) ( $u, v_1, \dots, v_n$ no libres)         |
| (23) | $(S_z^t \theta)^*$                                                                 | SE 22, (E.20)                                                  |
| (24) | $\forall u (S_{y_t}^u t^* \wedge S_z^u \theta^*) \rightarrow (S_z^t \theta)^*$     | Tma. deducción                                                 |
| (25) | $(S_z^t \theta)^* \leftrightarrow \forall u (S_{y_t}^u t^* \wedge S_z^u \theta^*)$ | IB 12, 24                                                      |

Con esto queda demostrado lo buscado.

- Si  $\theta \equiv f_i^n t_1 \cdots t_n$  tomamos  $v_1, \dots, v_n$  variables que no están en  $\theta, t$  ni  $S_z^t \theta$  y distintas de  $y, y_\theta, z, y_{S_z^t \theta}$  y  $u$ , con lo que por el Metateorema E.3 obtenemos que

$$\vdash \theta^* \leftrightarrow \bigvee v_1 \cdots v_n \left( S_{y_{t_1}}^{v_1} t_1^* \wedge \cdots \wedge S_{y_{t_n}}^{v_n} t_n^* \wedge y_\theta = f_i^n v_1 \cdots v_n \right)$$

y

$$\vdash (S_z^t \theta)^* \leftrightarrow \bigvee v_1 \cdots v_n \left( S_{y_{S_z^t t_1}}^{v_1} (S_z^t t_1)^* \wedge \cdots \wedge S_{y_{S_z^t t_n}}^{v_n} (S_z^t t_n)^* \wedge y_{S_z^t \theta} = f_i^n v_1 \cdots v_n \right).$$

Aplicando entonces el Metateorema 1.18 y utilizando (1.37) (teniendo en cuenta que  $y_\theta$  no está libre en  $S_{y_{t_j}}^{v_j} t_j^*$  por no estar en  $t_j$  y ser  $y_\theta \neq v_j$  y que  $y_{S_z^t \theta}$  no está libre en  $S_{y_{S_z^t t_j}}^{v_j} (S_z^t t_j)^*$  por no estar en  $S_z^t t_j$  y ser  $y_{S_z^t \theta} \neq v_j$ ) obtenemos que

$$\vdash S_{y_\theta}^y \theta^* \leftrightarrow \bigvee v_1 \cdots v_n \left( S_{y_{t_1}}^{v_1} t_1^* \wedge \cdots \wedge S_{y_{t_n}}^{v_n} t_n^* \wedge y = f_i^n v_1 \cdots v_n \right) \quad (\text{E.24})$$

y

$$\vdash S_{y_{S_z^t \theta}}^y (S_z^t \theta)^* \leftrightarrow \bigvee v_1 \cdots v_n \left( S_{y_{S_z^t t_1}}^{v_1} (S_z^t t_1)^* \wedge \cdots \wedge S_{y_{S_z^t t_n}}^{v_n} (S_z^t t_n)^* \wedge y = f_i^n v_1 \cdots v_n \right). \quad (\text{E.25})$$

Además, si tomamos  $w$  una variable que no está en  $\theta$  ni  $t$  y distinta de  $y, z, y_t, y_\theta, u, y_{t_1}, \dots, y_{t_n}$  y de cada  $v_j$ , por hipótesis de inducción tenemos que

$$\vdash_T S_{y_{S_z^t t_j}}^{v_j} (S_z^t t_j)^* \leftrightarrow \bigvee w \left( S_{y_t}^w t^* \wedge S_z^w S_{y_{t_j}}^{v_j} t_j^* \right) \quad (\text{E.26})$$

y análogo al caso del relator (donde ahora se tiene que  $u$  tampoco está en  $\alpha$  porque  $u \neq y$ ) se prueba que

$$\begin{aligned} & \vdash_T \underbrace{S_{y_{S_z^t t_1}}^{v_1} (S_z^t t_1)^* \wedge \cdots \wedge S_{y_{S_z^t t_n}}^{v_n} (S_z^t t_n)^* \wedge y = f_i^n v_1 \cdots v_n}_{\alpha} \\ & \bigvee u \left( \underbrace{S_{y_t}^u t^* \wedge S_z^u \left( \underbrace{S_{y_{t_1}}^{v_1} t_1^* \wedge \cdots \wedge S_{y_{t_n}}^{v_n} t_n^* \wedge y = f_i^n v_1 \cdots v_n}_{\gamma} \right)}_{\beta} \right). \end{aligned} \quad (\text{E.27})$$

Finalmente, tenemos la siguiente demostración:

|      |                                                                                                                               |                                                                |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| (1)  | $S_{y_{S_z^t \theta}}^y (S_z^t \theta)^*$                                                                                     | Hipótesis                                                      |
| (2)  | $\forall v_1 \cdots v_n \alpha$                                                                                               | SE 1, (E.25)                                                   |
| (3)  | $\alpha$                                                                                                                      | EP 2 ( $\times n$ ) ( $v_1, \dots, v_n$ no libre en 1)         |
| (4)  | $\forall u \beta$                                                                                                             | SE 3, (E.27)                                                   |
| (5)  | $\beta$                                                                                                                       | EP 4 ( $u$ no libre en 1 ni 3)                                 |
| (6)  | $S_z^u \gamma$                                                                                                                | EC 5                                                           |
| (7)  | $\forall v_1 \cdots v_n S_z^u \gamma$                                                                                         | IP 6 ( $\times n$ )                                            |
| (8)  | $S_z^u \forall v_1 \cdots v_n \gamma$                                                                                         | R 7 [(1.37)]                                                   |
| (9)  | $S_z^u S_{y_\theta}^y \theta^*$                                                                                               | SE 8, (Mteo. 1.18 (E.24))                                      |
| (10) | $S_{y_t}^u t^* \wedge S_z^u S_{y_\theta}^y \theta^*$                                                                          | IC (EC 5), 9                                                   |
| (11) | $\forall u (S_{y_t}^u t^* \wedge S_z^u S_{y_\theta}^y \theta^*)$                                                              | IP 10 ( $v_1, \dots, v_n, u$ no libres)                        |
| (12) | $S_{y_{S_z^t \theta}}^y (S_z^t \theta)^* \rightarrow$<br>$\forall u (S_{y_t}^u t^* \wedge S_z^u S_{y_\theta}^y \theta^*)$     | Teo. deducción                                                 |
| (13) | $\forall u (S_{y_t}^u t^* \wedge S_z^u S_{y_\theta}^y \theta^*)$                                                              | Hipótesis                                                      |
| (14) | $S_{y_t}^u t^* \wedge S_z^u S_{y_\theta}^y \theta^*$                                                                          | EP 13 ( $u$ no libre en 13)                                    |
| (15) | $S_z^u S_{y_\theta}^y \theta^*$                                                                                               | EC 14                                                          |
| (16) | $S_z^u \forall v_1 \cdots v_n \gamma$                                                                                         | SE 15, (Mteo. 1.18 (E.24))                                     |
| (17) | $\forall v_1 \cdots v_n S_z^u \gamma$                                                                                         | R 16 [(1.37)]                                                  |
| (18) | $S_z^u \gamma$                                                                                                                | EP 17 ( $\times n$ ) ( $v_1, \dots, v_n$ no libre en 13 ni 14) |
| (19) | $\beta$                                                                                                                       | IC (EC 14), 18                                                 |
| (20) | $\forall u \beta$                                                                                                             | IP 19                                                          |
| (21) | $\alpha$                                                                                                                      | SE 20, (E.27)                                                  |
| (22) | $\forall v_1 \cdots v_n \alpha$                                                                                               | IP 21 ( $\times n$ ) ( $u, v_1, \dots, v_n$ no libres)         |
| (23) | $S_{y_{S_z^t \theta}}^y (S_z^t \theta)^*$                                                                                     | SE 22, (E.25)                                                  |
| (24) | $\forall u (S_{y_t}^u t^* \wedge S_z^u S_{y_\theta}^y \theta^*) \rightarrow$<br>$S_{y_{S_z^t \theta}}^y (S_z^t \theta)^*$     | Tma. deducción                                                 |
| (25) | $S_{y_{S_z^t \theta}}^y (S_z^t \theta)^* \leftrightarrow$<br>$\forall u (S_{y_t}^u t^* \wedge S_z^u S_{y_\theta}^y \theta^*)$ | IB 12, 24                                                      |

Con esto queda demostrado lo buscado.

- Si  $\theta \equiv \neg \alpha$ , entonces  $y_\theta \equiv y_\alpha$ , luego  $u$  también es distinto de  $y_\alpha$  y por hipótesis de inducción tenemos que

$$\vdash_T (S_z^t \alpha)^* \leftrightarrow \forall u (S_{y_t}^u t^* \wedge S_z^u \alpha^*).$$

Así, teniendo en cuenta el Teorema 2.11 1) y que  $\neg(S_z^t \alpha)^* \equiv (\neg S_z^t \alpha)^* \equiv (S_z^t \theta)^*$  se tiene que

$$\vdash_T (S_z^t \theta)^* \leftrightarrow \neg \forall u (S_{y_t}^u t^* \wedge S_z^u \alpha^*).$$

Por tanto, la regla (MBB) junto a lo anterior nos muestra que basta ver que

$$\vdash_T \neg \forall u (S_{y_t}^u t^* \wedge S_z^u \alpha^*) \leftrightarrow \forall u (S_{y_t}^u t^* \wedge S_z^u \theta^*). \quad (\text{E.28})$$

Por el Metateorema E.5 sabemos que

$$\vdash_T \bigvee_{y_t}^1 t^*$$



y como  $u$  no está libre en  $t^*$  (pues es distinta de  $y_t$  y no está en  $t$ ) el Metateorema 3.7 (iii) nos da que

$$\vdash_T \bigvee^1 u S_{y_t}^u t^*.$$

Como además también se tiene que

$$\neg S_z^u \alpha^* \equiv S_z^u (\neg \alpha^*) \equiv S_z^u \theta^*,$$

el Metateorema E.6 (i) nos muestra que, en efecto, se cumple (E.28).

- Si  $\theta \equiv \alpha \rightarrow \beta$ , tomando  $w$  una variable que no esté en  $\theta$  ni en  $t$  y sea distinta de  $u, z, y_\theta, y_t, y_\alpha$  e  $y_\beta$ , por hipótesis de inducción tenemos que

$$\vdash_T (S_z^t \alpha)^* \leftrightarrow \bigvee w (S_{y_t}^w t^* \wedge S_z^w \alpha^*)$$

y

$$\vdash_T (S_z^t \beta)^* \leftrightarrow \bigvee w (S_{y_t}^w t^* \wedge S_z^w \beta^*).$$

Por el Teorema 2.11 2) y teniendo en cuenta que

$$(S_z^t \theta)^* \equiv (S_z^t \alpha \rightarrow S_z^t \beta)^* \equiv (S_z^t \alpha)^* \rightarrow (S_z^t \beta)^*,$$

obtenemos entonces que

$$\vdash_T (S_z^t \theta)^* \leftrightarrow \left( \bigvee w (S_{y_t}^w t^* \wedge S_z^w \alpha^*) \rightarrow \bigvee w (S_{y_t}^w t^* \wedge S_z^w \beta^*) \right). \quad (\text{E.29})$$

Por otro lado, el Metateorema E.5 nos garantiza que

$$\vdash_T \bigvee^1 y_t t^*$$

y como  $w$  no está libre en  $t^*$  (pues es distinta de  $y_t$  y no está en  $t$ ) el Metateorema 3.7 (iii) nos da que

$$\vdash_T \bigvee^1 w S_{y_t}^w t^*,$$

luego por el Metateorema E.6 (ii) y teniendo en cuenta que

$$S_z^w \alpha^* \rightarrow S_z^w \beta^* \equiv S_z^w (\alpha^* \rightarrow \beta^*) \equiv S_z^w \theta^*$$

obtenemos que

$$\vdash_T \left( \bigvee w (S_{y_t}^w t^* \wedge S_z^w \alpha^*) \rightarrow \bigvee w (S_{y_t}^w t^* \wedge S_z^w \beta^*) \right) \leftrightarrow \bigvee w (S_{y_t}^w t^* \wedge S_z^w \theta^*). \quad (\text{E.30})$$

Usando la regla (MBB) junto a (E.29) y (E.30) concluimos que

$$\vdash_T (S_z^t \theta)^* \leftrightarrow \bigvee w (S_{y_t}^w t^* \wedge S_z^w \theta^*) \quad (\text{E.31})$$

y nuevamente por la regla (MBB) basta ver que

$$\vdash \bigvee w (S_{y_t}^w t^* \wedge S_z^w \theta^*) \leftrightarrow \bigvee u (S_{y_t}^u t^* \wedge S_z^u \theta^*) \quad (\text{E.32})$$

para concluir con lo deseado.

Sin más, aplicando el Metateorema 3.7 (ii) (teniendo en cuenta que  $w$  no está libre en  $S_{y_t}^u t^* \wedge S_z^u \theta^*$ ) tenemos que

$$\vdash \bigvee u (S_{y_t}^u t^* \wedge S_z^u \theta^*) \leftrightarrow \bigvee w S_u^w (S_{y_t}^u t^* \wedge S_z^u \theta^*),$$

y, como  $u$  no está libre en  $t^*$  ni  $\theta^*$  (porque no está en  $t$  ni  $\theta$  y es distinta de  $y_t$ ) y es distinta de  $w$ , el Metateorema 2.3 (junto al Teorema 2.11) nos da que

$$\vdash S_u^w (S_{y_t}^u t^* \wedge S_z^u \theta^*) \leftrightarrow (S_{y_t}^w t^* \wedge S_z^w \theta^*).$$

Juntando estos dos últimos teoremas lógicos y utilizando el Teorema 2.11 7) obtenemos (E.32) tal y como buscábamos.

■ Si  $\theta \equiv \bigwedge x_i \alpha$  distinguimos tres subcasos:

- Si  $z$  no está libre en  $\theta$ , entonces por el Metateorema E.2 se tiene que  $z$  tampoco está libre en  $\theta^*$  y así, por el Teorema 1.13 2),

$$(S_z^t \theta)^* \equiv \theta^*$$

y

$$S_z^u \theta^* \equiv \theta^*,$$

con lo que debemos probar que

$$\vdash_T \theta^* \leftrightarrow \bigvee u (S_{y_t}^u t^* \wedge \theta^*). \quad (\text{E.33})$$

Para ello, observemos que el Metateorema E.5 nos garantiza que

$$\vdash_T \bigvee^1_{y_t} t^*$$

y como  $u$  no está libre en  $t^*$  (pues es distinta de  $y_t$  y no está en  $t$ ) el Metateorema 3.7 (iii) nos da que

$$\vdash_T \bigvee^1_u S_{y_t}^u t^*.$$

Con esto tenemos la siguiente demostración:

|      |                                                                  |                                |
|------|------------------------------------------------------------------|--------------------------------|
| (1)  | $\bigvee^1_u S_{y_t}^u t^*$                                      | Teo. T                         |
| (2)  | $\bigvee u S_{y_t}^u t^*$                                        | SE 1, Tma. 2.9 3)              |
| (3)  | $S_{y_t}^u t^*$                                                  | EP 2                           |
| (4)  | $\theta^*$                                                       | Hipótesis                      |
| (5)  | $S_{y_t}^u t^* \wedge \theta^*$                                  | IC 3, 4                        |
| (6)  | $\bigvee u (S_{y_t}^u t^* \wedge \theta^*)$                      | IP 5                           |
| (7)  | $\theta^* \rightarrow \bigvee u (S_{y_t}^u t^* \wedge \theta^*)$ | Tma. deducción ( $u$ no libre) |
| (8)  | $\bigvee u (S_{y_t}^u t^* \wedge \theta^*)$                      | Hipótesis                      |
| (9)  | $S_{y_t}^u t^* \wedge \theta^*$                                  | EP 8 ( $u$ no libre en 8)      |
| (10) | $\theta^*$                                                       | EC 9 ( $u$ no libre)           |

$$(11) \quad \forall u(S_{y_t}^u t^* \wedge \theta^*) \rightarrow \theta^* \quad \text{Tma. deducción}$$

$$(12) \quad \theta^* \leftrightarrow \forall u(S_{y_t}^u t^* \wedge \theta^*) \quad \text{IB 7, 11}$$

Esto prueba (E.33) y con ello concluimos este caso.

- Si  $z$  está libre en  $\theta$  y  $x_i$  no lo está en  $t$ , tenemos que

$$(S_z^t \theta)^* \equiv (\bigwedge x_i S_z^t \alpha)^* \equiv \bigwedge x_i (S_z^t \alpha)^*.$$

Por otra parte, tomando  $w$  una variable que no esté en  $\theta$  ni en  $t$  y sea distinta de  $u, z, y_\theta, y_t$  e  $y_\alpha$ , por hipótesis de inducción tenemos que

$$\vdash_T (S_z^t \alpha)^* \leftrightarrow \bigvee w(S_{y_t}^w t^* \wedge S_z^w \alpha^*),$$

luego por el Metateorema 2.10

$$\vdash_T (S_z^t \theta)^* \leftrightarrow \bigwedge x_i \bigvee w(S_{y_t}^w t^* \wedge S_z^w \alpha^*). \quad (\text{E.34})$$

Observemos también que el Metateorema E.5 nos garantiza que

$$\vdash_T \bigvee^1 y_t t^*$$

y como  $w$  no está libre en  $t^*$  (pues es distinta de  $y_t$  y no está en  $t$ ) el Metateorema 3.7 (iii) nos da que

$$\vdash_T \bigvee^1 w S_{y_t}^w t^*.$$

Por tanto, como  $x_i$  no está libre en  $S_{y_t}^w t^*$  (pues no está libre en  $t$  y es distinta de  $w$  al no estar  $w$  en  $\theta$ ), por el Metateorema E.6 (iii) obtenemos que

$$\vdash_T \bigwedge x_i \bigvee w(S_{y_t}^w t^* \wedge S_z^w \alpha^*) \leftrightarrow \bigvee w(S_{y_t}^w t^* \wedge \bigwedge x_i S_z^w \alpha^*).$$

Además, como  $z$  está libre en  $\theta^* \equiv \bigwedge x_i \alpha^*$  (pues lo está en  $\theta$ ) y  $x_i$  no está libre en  $w$ , se tiene que

$$S_z^w \theta^* \equiv S_z^w (\bigwedge x_i \alpha^*) \equiv \bigwedge x_i S_z^w \alpha^*,$$

y concluimos con que

$$\vdash_T \bigwedge x_i \bigvee w(S_{y_t}^w t^* \wedge S_z^w \alpha^*) \leftrightarrow \bigvee w(S_{y_t}^w t^* \wedge S_z^w \theta^*). \quad (\text{E.35})$$

Usando la regla (MBB) junto a (E.34) y (E.35) obtenemos que

$$\vdash_T (S_z^t \theta)^* \leftrightarrow \bigvee w(S_{y_t}^w t^* \wedge S_z^w \theta^*),$$

con lo que para concluir este caso bastará con utilizar una vez más la regla (MBB) junto al teorema lógico

$$\vdash \bigvee w(S_{y_t}^w t^* \wedge S_z^w \theta^*) \leftrightarrow \bigvee u(S_{y_t}^u t^* \wedge S_z^u \theta^*),$$

el cual se prueba de forma completamente análoga a lo visto al final del caso de la implicación.

- Si  $z$  está libre en  $\theta$  y  $x_i$  lo está en  $t$ , tenemos que

$$(S_z^t \theta)^* \equiv \left( \bigwedge w S_z^t S_{x_i}^w \alpha \right)^* \equiv \bigwedge w \left( S_z^t S_{x_i}^w \alpha \right)^* \quad (\text{E.36})$$

donde  $w$  es la variable de menor índice que no está en  $\theta$  ni en  $t$ .

Además, si  $s$  es una variable que no está en  $\theta$ ,  $S_{x_i}^w \alpha$  ni en  $t$  y distinta de  $u, w, y_\theta, y_\alpha, y_w$  y de  $z, y_{S_{x_i}^w \alpha}$  e  $y_t$ , por la hipótesis de inducción aplicada a  $S_{x_i}^w \alpha$  (que tiene menor longitud que  $\theta$  por el Metateorema 1.6) obtenemos que

$$\vdash_T (S_z^t S_{x_i}^w \alpha)^* \leftrightarrow \bigvee s \left( S_{y_t}^s t^* \wedge S_z^s (S_{x_i}^w \alpha)^* \right). \quad (\text{E.37})$$

También podemos aplicar la hipótesis de inducción a  $\alpha$  y obtener que

$$\vdash_T (S_{x_i}^w \alpha)^* \leftrightarrow \bigvee s \left( S_{y_w}^s w^* \wedge S_{x_i}^s \alpha^* \right),$$

y como

$$S_{y_w}^s w^* \equiv S_{y_w}^s (y_w = w) \equiv s = w$$

tenemos que

$$\vdash_T (S_{x_i}^w \alpha)^* \leftrightarrow \bigvee s \left( s = w \wedge S_{x_i}^s \alpha^* \right). \quad (\text{E.38})$$

Más aún, a continuación veremos que

$$\vdash \bigvee s \left( s = w \wedge S_{x_i}^s \alpha^* \right) \leftrightarrow S_{x_i}^w \alpha^*, \quad (\text{E.39})$$

con lo que la regla (MBB) aplicada junto a (E.38) y (E.39) nos da que

$$\vdash_T (S_{x_i}^w \alpha)^* \leftrightarrow S_{x_i}^w \alpha^*. \quad (\text{E.40})$$

En efecto, como  $s$  no está libre en  $S_{x_i}^w \alpha^*$  (pues  $s \neq w$  y no está libre en  $\alpha^*$  al no estar en  $\theta$ ) tenemos la siguiente demostración de (E.39):

|      |                                                                                               |                               |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|
| (1)  | $\bigvee s \left( s = w \wedge S_{x_i}^s \alpha^* \right)$                                    | Hipótesis                     |
| (2)  | $s = w \wedge S_{x_i}^s \alpha^*$                                                             | EP 2 ( $s$ no libre en 1)     |
| (3)  | $w = s$                                                                                       | SI (EC 2)                     |
| (4)  | $S_{x_i}^w \alpha^*$                                                                          | ETI (EC 2), 3 ( $s$ no libre) |
| (5)  | $\bigvee s \left( s = w \wedge S_{x_i}^s \alpha^* \right) \rightarrow S_{x_i}^w \alpha^*$     | Tma. deducción                |
| (6)  | $S_{x_i}^w \alpha^*$                                                                          | Hipótesis                     |
| (7)  | $S_s^w S_{x_i}^s \alpha^*$                                                                    | SE 6, Mteo. 2.3               |
| (8)  | $w = w$                                                                                       | I                             |
| (9)  | $S_s^w (s = w \wedge S_{x_i}^s \alpha^*)$                                                     | IC 7, 8                       |
| (10) | $\bigvee s \left( s = w \wedge S_{x_i}^s \alpha^* \right)$                                    | IP 8                          |
| (11) | $S_{x_i}^w \alpha^* \rightarrow \bigvee s \left( s = w \wedge S_{x_i}^s \alpha^* \right)$     | Tma. deducción                |
| (12) | $\bigvee s \left( s = w \wedge S_{x_i}^s \alpha^* \right) \leftrightarrow S_{x_i}^w \alpha^*$ | IB 5, 11                      |

De (E.40) y el Metateorema 1.18 obtenemos que

$$\vdash_T S_z^s (S_{x_i}^w \alpha)^* \leftrightarrow S_z^s S_{x_i}^w \alpha^*$$

y por el Teorema 2.11

$$\vdash_T S_{y_t}^s t^* \wedge S_z^s (S_{x_i}^w \alpha)^* \leftrightarrow S_{y_t}^s t^* \wedge S_z^s S_{x_i}^w \alpha^*,$$

con lo que finalmente el Metateorema 2.10 nos da que

$$\vdash_T \bigvee s \left( S_{y_t}^s t^* \wedge S_z^s (S_{x_i}^w \alpha)^* \right) \leftrightarrow \bigvee s \left( S_{y_t}^s t^* \wedge S_z^s S_{x_i}^w \alpha^* \right). \quad (\text{E.41})$$

Usando entonces la regla (MBB) junto a (E.37) y (E.41) tenemos que

$$\vdash_T (S_z^t S_{x_i}^w \alpha)^* \leftrightarrow \bigvee s \left( S_{y_t}^s t^* \wedge S_z^s S_{x_i}^w \alpha^* \right)$$

y utilizando una vez más el Metateorema 2.10 (junto a (E.36)) concluimos que

$$\vdash_T (S_z^t \theta)^* \leftrightarrow \bigwedge w \bigvee s \left( S_{y_t}^s t^* \wedge S_z^s S_{x_i}^w \alpha^* \right). \quad (\text{E.42})$$

Por otra parte, el Metateorema E.5 nos garantiza que

$$\vdash_T \bigvee_{y_t}^1 t^*,$$

y como  $s$  no está libre en  $t^*$  el el Metateorema 3.7 (iii) nos da que

$$\vdash_T \bigvee_s^1 S_{y_t}^s t^*.$$

Juntando esto con el Metateorema E.6 (iii) (teniendo en cuenta que  $w$  no está libre en  $S_{y_t}^s t^*$  pues es distinta de  $s$  y no está en  $t$ ) obtenemos que

$$\vdash_T \bigwedge w \bigvee s \left( S_{y_t}^s t^* \wedge S_z^s S_{x_i}^w \alpha^* \right) \leftrightarrow \bigvee s \left( S_{y_t}^s t^* \wedge \bigwedge w S_z^s S_{x_i}^w \alpha^* \right). \quad (\text{E.43})$$

Además, observemos que como  $w \not\equiv z, s$  ( $w \not\equiv z$  pues  $w$  no está en  $\theta$  y  $z$  está libre en  $\theta$ ) por (1.36) se tiene que

$$\bigwedge w S_z^s S_{x_i}^w \alpha^* \equiv S_z^s \bigwedge w S_{x_i}^w \alpha^*. \quad (\text{E.44})$$

También, como  $w$  no está libre en  $\alpha^*$  (pues  $w$  no está en  $\theta$ ) y  $\theta^* \equiv \bigwedge x_i \alpha^*$ , el Metateorema 3.7 (i) nos da que

$$\vdash \theta^* \leftrightarrow \bigwedge w S_{x_i}^w \alpha^*, \quad (\text{E.45})$$

y de (E.44) y (E.45) (junto al Metateorema 1.18) obtenemos que

$$\vdash S_z^s \theta^* \leftrightarrow \bigwedge w S_z^s S_{x_i}^w \alpha^*. \quad (\text{E.46})$$

Usando ahora el Teorema 2.11 junto a (E.43) y (E.46) se obtiene que

$$\vdash_T \bigwedge w \bigvee s \left( S_{y_t}^s t^* \wedge S_z^s S_{x_i}^w \alpha^* \right) \leftrightarrow \bigvee s \left( S_{y_t}^s t^* \wedge S_z^s \theta^* \right) \quad (\text{E.47})$$

y usando la regla (MBB) junto a (E.42) y (E.47) concluimos que

$$\vdash_T (S_z^t \theta)^* \leftrightarrow \bigvee_s (S_{y_t}^s t^* \wedge S_z^s \theta^*). \quad (\text{E.48})$$

Finalmente, como  $s$  no está libre en  $t^*$  ni  $\theta^*$  y es distinta de  $u$ , de forma completamente análoga a lo visto para (E.32) se prueba que

$$\vdash \bigvee_s (S_{y_t}^s t^* \wedge S_z^s \theta^*) \leftrightarrow \bigvee_u (S_{y_t}^u t^* \wedge S_z^u \theta^*), \quad (\text{E.49})$$

con lo que juntando (E.48) y (E.49) (con la regla (MBB)) concluimos con lo deseado.

Esto concluye la demostración de los tres subcasos.

■ Si  $\theta \equiv x_i | \alpha$  distinguimos tres subcasos:

- Si  $z$  no está libre en  $\theta$ , entonces  $S_z^t \theta \equiv \theta$  y se tiene que

$$S_{y_{S_z^t \theta}}^y (S_z^t)^* \equiv S_{y_\theta}^y \theta^*. \quad (\text{E.50})$$

Además,  $z$  tampoco estará libre en  $S_{y_\theta}^y \theta^*$  (pues  $z \not\equiv y$  y si  $z \not\equiv y_\theta$ , entonces no puede estar libre en  $\theta^*$ , pues lo estaría en  $\theta$ ) con lo que

$$\bigvee_u (S_{y_t}^u t^* \wedge S_z^u S_{y_\theta}^y \theta^*) \equiv \bigvee_u (S_{y_t}^u t^* \wedge S_{y_\theta}^y \theta^*) \quad (\text{E.51})$$

Por tanto, por (E.50) y (E.51) obtenemos que basta ver que

$$\vdash_T S_{y_\theta}^y \theta^* \leftrightarrow \bigvee_u (S_{y_t}^u t^* \wedge S_{y_\theta}^y \theta^*),$$

y la prueba de este teorema es completamente análoga a la de (E.33) (teniendo en cuenta en este caso que  $u$  no está libre en  $S_{y_\theta}^y \theta^*$  al ser distinta de  $y$  y no estar en  $\theta$ ).

- Si  $z$  está libre en  $\theta$  y  $x_i$  no lo está en  $t$ , entonces

$$\begin{aligned} S_{y_{S_z^t \theta}}^y (S_z^t \theta)^* &\equiv S_{y_{S_z^t \theta}}^y (x_i | S_z^t \alpha)^* \\ &\equiv S_{y_{S_z^t \theta}}^y \left( \bigwedge x_i ((S_z^t \alpha)^* \leftrightarrow x_i = y_{S_z^t \theta}) \vee \left( \neg \bigvee_{x_i}^1 x_i (S_z^t \alpha)^* \wedge \phi(y_{S_z^t \theta}) \right) \right) \end{aligned}$$

y como  $y, y_{S_z^t \theta} \not\equiv x_i$  (pues no están en  $S_z^t \theta$ ) e  $y_{S_z^t \theta}$  no está libre en  $(S_z^t \alpha)^*$  (pues, de nuevo, no está en  $S_z^t \alpha$  al no estar en  $S_z^t \theta$ ) tenemos por (1.36) que

$$S_{y_{S_z^t \theta}}^y (S_z^t \theta)^* \equiv \bigwedge x_i ((S_z^t \alpha)^* \leftrightarrow x_i = y) \vee \left( \neg \bigvee_{x_i}^1 x_i (S_z^t \alpha)^* \wedge S_{y_{S_z^t \theta}}^y \phi(y_{S_z^t \theta}) \right). \quad (\text{E.52})$$

Además, por el Metateorema 1.21 tenemos que

$$\vdash S_{y_{S_z^t \theta}}^y \phi(y_{S_z^t \theta}) \leftrightarrow \phi(y), \quad (\text{E.53})$$

luego utilizando el Teorema 2.11 junto a (E.52) y (E.53) concluimos que

$$\vdash S_{y_{S_z^t \theta}}^y \left( S_z^t \theta \right)^* \leftrightarrow \bigwedge x_i \left( (S_z^t \alpha)^* \leftrightarrow x_i = y \right) \vee \left( \neg \bigvee^1 x_i (S_z^t \alpha)^* \wedge \phi(y) \right). \quad (\text{E.54})$$

Así, por hipótesis de inducción tenemos que si  $w$  es una variable que no está en  $\theta$  ni  $t$  y distinta de  $u, z, y, y_t, y_\theta, y_\alpha$ , entonces

$$\vdash_T \left( S_z^t \alpha \right)^* \leftrightarrow \bigvee w \left( S_{y_t}^w t^* \wedge S_z^w \alpha^* \right), \quad (\text{E.55})$$

luego usando el Teorema 2.11 junto a (E.54) y (E.55) se obtiene que

$$\begin{aligned} & \vdash_T S_{y_{S_z^t \theta}}^y \left( S_z^t \theta \right)^* \leftrightarrow \\ & \bigwedge x_i \left( \bigvee w \left( S_{y_t}^w t^* \wedge S_z^w \alpha^* \right) \leftrightarrow x_i = y \right) \vee \left( \neg \bigvee^1 x_i \bigvee w \left( S_{y_t}^w t^* \wedge S_z^w \alpha^* \right) \wedge \phi(y) \right). \end{aligned} \quad (\text{E.56})$$

Por otra parte, el Metateorema E.5 nos garantiza que

$$\vdash_T \bigvee^1 y_t t^*,$$

y como  $w$  no está libre en  $t^*$  (pues no está en  $t$  y es distinta de  $y_t$ ) el Metateorema 3.7 (iii) nos da que

$$\vdash_T \bigvee^1 w S_{y_t}^w t^*.$$

Utilizando el Metateorema E.6 (iv) junto a este último teorema de  $T$  (y teniendo en cuenta que  $w$  no está libre en  $x_i = y$  ni en  $\phi(y)$ ) obtenemos que

$$\begin{aligned} & \vdash_T \bigwedge x_i \left( \bigvee w \left( S_{y_t}^w t^* \wedge S_z^w \alpha^* \right) \leftrightarrow x_i = y \right) \vee \left( \neg \bigvee^1 x_i \bigvee w \left( S_{y_t}^w t^* \wedge S_z^w \alpha^* \right) \wedge \phi(y) \right) \\ & \leftrightarrow \bigvee w \left( S_{y_t}^w t^* \wedge \left( \bigwedge x_i (S_z^w \alpha^* \leftrightarrow x_i = y) \vee \left( \neg \bigvee^1 x_i S_z^w \alpha^* \wedge \phi(y) \right) \right) \right). \end{aligned} \quad (\text{E.57})$$

Para concluir basta pues ver que

$$\begin{aligned} & \vdash \bigvee w \left( S_{y_t}^w t^* \wedge \left( \bigwedge x_i (S_z^w \alpha^* \leftrightarrow x_i = y) \vee \left( \neg \bigvee^1 x_i S_z^w \alpha^* \wedge \phi(y) \right) \right) \right) \leftrightarrow \\ & \bigvee w \left( S_{y_t}^w t^* \wedge S_z^w S_{y_\theta}^y \theta^* \right), \end{aligned} \quad (\text{E.58})$$

pues análogo a lo visto para (teo3.32-3imp4) (donde aquí se tiene que  $w$  no está libre en  $S_{y_t}^u t^*$  por no estar en  $t$  y ser distinta de  $u$ , no está libre en  $S_z^u S_{y_\theta}^y \theta^*$  por ser distinta de  $u$  e  $y$  y no estar en  $\theta$  y  $u$  no está libre en  $S_{y_\theta}^y \theta^*$  por ser distinta de  $y$  y no estar en  $\theta$ ) se prueba que

$$\vdash \bigvee w \left( S_{y_t}^w t^* \wedge S_z^w S_{y_\theta}^y \theta^* \right) \leftrightarrow \bigvee u \left( S_{y_t}^u t^* \wedge S_z^u S_{y_\theta}^y \theta^* \right) \quad (\text{E.59})$$

y juntando (E.56), (E.57), (E.58) y (E.59) (junto a la regla (MBB)) se obtiene lo deseado.

En virtud del Teorema 2.11, para probar (E.58) basta ver que

$$\vdash S_z^w S_{y_\theta}^y \theta^* \leftrightarrow \bigwedge x_i (S_z^w \alpha^* \leftrightarrow x_i = y) \vee \left( \neg \bigvee^1 x_i S_z^w \alpha^* \wedge \phi(y) \right). \quad (\text{E.60})$$

Como  $w, z \not\equiv x_i$  (pues  $z$  está libre en  $\theta$  y  $x_i$  no lo está) e  $y \not\equiv z$  por (1.36) tenemos que

$$S_z^w S_{y_\theta}^y \theta^* \equiv \bigwedge x_i (S_z^w \alpha^* \leftrightarrow x_i = y) \vee \left( \neg S_z^w \bigvee^1 x_i \alpha^* \wedge S_{y_\theta}^y \phi(y_\theta) \right), \quad (\text{E.61})$$

mientras que por el Metateorema 1.11 se tiene que

$$\vdash S_z^w \bigvee^1 x_i \alpha^* \leftrightarrow \bigvee^1 x_i S_z^w \alpha^* \quad (\text{E.62})$$

y por el Metateorema 1.21

$$\vdash S_{y_\theta}^y \phi(y_\theta) \leftrightarrow \phi(y). \quad (\text{E.63})$$

Utilizando el Teorema 2.11 junto a (E.61), (E.62) y (E.63) se obtiene (E.60) y con ello concluimos la prueba.

- Si  $z$  está libre en  $\theta$  y  $x_i$  lo está en  $t$ , tenemos que

$$S_z^t \theta \equiv w \mid S_z^t S_{x_i}^w \alpha$$

siendo  $w$  la variable de menor índice que no está en  $\theta$  ni en  $t$ .

Tomando entonces  $s$  una variable que no está en  $\theta$ ,  $S_{x_i}^w \alpha$  ni en  $t$  y distinta de  $u, w, y, y_\theta, y_\alpha$  y de  $z, y_{S_{x_i}^w \alpha}$  e  $y_t$ , de forma análoga a lo visto en el tercer subcaso del generalizador obtenemos que

$$\vdash_T \left( S_z^t S_{x_i}^w \alpha \right)^* \leftrightarrow \bigvee s \left( S_{y_t}^s t^* \wedge S_z^s S_{x_i}^w \alpha^* \right). \quad (\text{E.64})$$

Por otra parte, como  $y, y_{S_z^t \theta} \not\equiv w$  (pues no están en  $S_z^t \theta$ ) e  $y_{S_z^t \theta}$  no está libre en  $(S_z^t S_{x_i}^w \alpha)^*$  (pues no está en  $S_z^t \theta$ ), tenemos que

$$S_{y_{S_z^t \theta}}^y \left( S_z^t \theta \right)^* \equiv \bigwedge w \left( \left( S_z^t S_{x_i}^w \alpha \right)^* \leftrightarrow w = y \right) \vee \left( \neg \bigvee^1 w \left( S_z^t S_{x_i}^w \alpha \right)^* \wedge S_{y_{S_z^t \theta}}^y \phi \left( y_{S_z^t \theta} \right) \right),$$

y utilizando el Teorema 2.11 junto al teorema lógico (dado por el Metateorema 1.21)

$$\vdash S_{y_{S_z^t \theta}}^y \phi \left( y_{S_z^t \theta} \right) \leftrightarrow \phi(y),$$

obtenemos que

$$\vdash S_{y_{S_z^t \theta}}^y \left( S_z^t \theta \right)^* \leftrightarrow \bigwedge w \left( \left( S_z^t S_{x_i}^w \alpha \right)^* \leftrightarrow w = y \right) \vee \left( \neg \bigvee^1 w \left( S_z^t S_{x_i}^w \alpha \right)^* \wedge \phi(y) \right). \quad (\text{E.65})$$



Usando el Teorema 2.11 junto a (E.64) y (E.65) obtenemos que

$$\begin{aligned} \vdash_T S_{y_{S_z^t \theta}}^y (S_z^t \theta)^* &\leftrightarrow \bigwedge w \left( \bigvee s \left( S_{y_t}^s t^* \wedge S_z^s S_{x_i}^w \alpha^* \right) \leftrightarrow w = y \right) \vee \\ &\quad \left( \neg \bigvee^1 w \bigvee s \left( S_{y_t}^s t^* \wedge S_z^s S_{x_i}^w \alpha^* \right) \wedge \phi(y) \right). \end{aligned} \quad (\text{E.66})$$

Ahora, por el Metateorema E.5 tenemos que

$$\vdash_T \bigvee^1 y_t t^*,$$

y como  $s$  no está libre en  $t^*$  (pues no está en  $t$  y es distinta de  $y_t$ ) el Metateorema 3.7 (iii) nos da que

$$\vdash_T \bigvee^1 s S_{y_t}^s t^*.$$

Utilizando el Metateorema E.6 (iv) junto a este último teorema de  $T$  (y teniendo en cuenta que  $s$  no está libre en  $w = y$  ni en  $\phi(y)$ ) obtenemos que

$$\begin{aligned} \vdash_T \bigwedge w \left( \bigvee s \left( S_{y_t}^s t^* \wedge S_z^s S_{x_i}^w \alpha^* \right) \leftrightarrow w = y \right) \vee \left( \neg \bigvee^1 w \bigvee s \left( S_{y_t}^s t^* \wedge S_z^s S_{x_i}^w \alpha^* \right) \wedge \phi(y) \right) \\ \leftrightarrow \bigvee s \left( S_{y_t}^s t^* \wedge \left( \bigwedge w \left( S_z^s S_{x_i}^w \alpha^* \leftrightarrow w = y \right) \vee \left( \neg \bigvee^1 w S_z^s S_{x_i}^w \alpha^* \wedge \phi(y) \right) \right) \right). \end{aligned} \quad (\text{E.67})$$

Además, como  $w \not\equiv z, s$  (pues  $z$  está libre en  $\theta$  y  $w$  no lo está) tenemos que

$$\begin{aligned} \bigwedge w \left( S_z^s S_{x_i}^w \alpha^* \leftrightarrow w = y \right) &\equiv S_z^s \bigwedge w \left( S_{x_i}^w \alpha^* \leftrightarrow w = y \right) \\ &\equiv S_z^s \bigwedge w S_{x_i}^w (\alpha^* \leftrightarrow x_i = y), \end{aligned} \quad (\text{E.68})$$

y por el Metateorema 3.7 (i) (teniendo en cuenta que  $w$  no está libre en  $\alpha^* \leftrightarrow x_i = y$ , pues no está en  $\theta$  e  $y$  no está en  $S_z^t \theta$ ) también obtenemos que

$$\vdash \bigwedge x_i (\alpha^* \leftrightarrow x_i = y) \leftrightarrow \bigwedge w S_{x_i}^w (\alpha^* \leftrightarrow x_i = y). \quad (\text{E.69})$$

Aplicando el Metateorema 1.18 a (E.69) y teniendo en cuenta (E.68) obtenemos que

$$\vdash \bigwedge w \left( S_z^s S_{x_i}^w \alpha^* \leftrightarrow w = y \right) \leftrightarrow S_z^s \bigwedge x_i (\alpha^* \leftrightarrow x_i = y). \quad (\text{E.70})$$

También tenemos que por ser  $w \not\equiv z, s$  el Metateorema 1.11 nos da que

$$\vdash S_z^s \bigvee^1 w S_{x_i}^w \alpha^* \leftrightarrow \bigvee^1 w S_z^s S_{x_i}^w \alpha^*,$$

con lo que por el Teorema 2.11 (usando también que el Metateorema 1.21 nos da que  $\vdash \phi(y) \leftrightarrow S_{y_\theta}^y \phi(y_\theta)$ ) obtenemos que

$$\vdash \left( \neg \bigvee^1 w S_z^s S_{x_i}^w \alpha^* \wedge \phi(y) \right) \leftrightarrow \left( \neg S_z^s \bigvee^1 w S_{x_i}^w \alpha^* \wedge S_{y_\theta}^y \phi(y_\theta) \right). \quad (\text{E.71})$$

Usando ahora que  $w$  no está libre en  $\alpha^*$  el Metateorema 3.7 (iii) nos da que

$$\vdash \bigvee^1 x_i \alpha^* \leftrightarrow \bigvee^1 w S_{x_i}^w \alpha^*,$$

luego por el Metateorema 1.18 tenemos que

$$\vdash S_z^s \bigvee^1 x_i \alpha^* \leftrightarrow S_z^s \bigvee^1 w S_{x_i}^w \alpha^*$$

y el Teorema 2.11 nos da que

$$\vdash \left( \neg S_z^s \bigvee^1 w S_{x_i}^w \alpha^* \wedge S_{y_\theta}^y \phi(y_\theta) \right) \leftrightarrow \left( \neg S_z^s \bigvee^1 x_i \alpha^* \wedge S_{y_\theta}^y \phi(y_\theta) \right). \quad (\text{E.72})$$

Como además  $z$  no está libre en  $S_{y_\theta}^y \phi(y_\theta)$  (pues  $y \neq z$ ) se tiene que

$$\neg S_z^s \bigvee^1 x_i \alpha^* \wedge S_{y_\theta}^y \phi(y_\theta) \equiv S_z^s \left( \neg \bigvee^1 x_i \alpha^* \wedge S_{y_\theta}^y \phi(y_\theta) \right),$$

con lo que aplicando la regla (MBB) a (E.71) y (E.72) obtenemos que

$$\vdash \left( \neg \bigvee^1 w S_z^s S_{x_i}^w \alpha^* \wedge \phi(y) \right) \leftrightarrow S_z^s \left( \neg \bigvee^1 x_i \alpha^* \wedge S_{y_\theta}^y \phi(y_\theta) \right). \quad (\text{E.73})$$

Así el Teorema 2.11 junto a (E.70) y (E.73) nos da que

$$\begin{aligned} \vdash \bigwedge w \left( S_z^s S_{x_i}^w \alpha^* \leftrightarrow w = y \right) \vee \left( \neg \bigvee^1 w S_z^s S_{x_i}^w \alpha^* \wedge \phi(y) \right) \leftrightarrow \\ S_z^s \bigwedge x_i (\alpha^* \leftrightarrow x_i = y) \vee S_z^s \left( \neg \bigvee^1 x_i \alpha^* \wedge S_{y_\theta}^y \phi(y_\theta) \right) \end{aligned}$$

donde (en estas identidades usamos (1.36) junto a que  $y \neq x_i$ , pues  $y$  no está en  $\theta$ )

$$\begin{aligned} S_z^s \bigwedge x_i (\alpha^* \leftrightarrow x_i = y) \vee S_z^s \left( \neg \bigvee^1 x_i \alpha^* \wedge S_{y_\theta}^y \phi(y_\theta) \right) &\equiv \\ S_z^s \left( \bigwedge x_i (\alpha^* \leftrightarrow x_i = y) \vee \left( \neg \bigvee^1 x_i \alpha^* \wedge S_{y_\theta}^y \phi(y_\theta) \right) \right) &\equiv \\ S_z^s S_{y_\theta}^y \left( \bigwedge x_i (\alpha^* \leftrightarrow x_i = y_\theta) \vee \left( \neg \bigvee^1 x_i \alpha^* \wedge \phi(y_\theta) \right) \right) &\equiv \\ S_z^s S_{y_\theta}^y \theta^*, & \end{aligned}$$

es decir, obtenemos que

$$\begin{aligned} \vdash \bigwedge w \left( S_z^s S_{x_i}^w \alpha^* \leftrightarrow w = y \right) \vee \left( \neg \bigvee^1 w S_z^s S_{x_i}^w \alpha^* \wedge \phi(y) \right) \leftrightarrow \\ S_z^s S_{y_\theta}^y \theta^* \end{aligned}$$

y el Teorema 2.11 nos da que

$$\begin{aligned} \vdash \bigvee_s \left( S_{y_i}^s t^* \wedge \bigwedge w \left( S_z^s S_{x_i}^w \alpha^* \leftrightarrow w = y \right) \vee \left( \neg \bigvee^1 w S_z^s S_{x_i}^w \alpha^* \wedge \phi(y) \right) \right) \leftrightarrow \\ \bigvee_s \left( S_{y_i}^s t^* \wedge S_z^s S_{y_\theta}^y \theta^* \right). \end{aligned} \quad (\text{E.74})$$

Más aún, análogo a lo visto para (E.32) (donde aquí se tiene que  $s$  no está libre en  $S_{y_i}^u t^*$  por no estar en  $t$  y ser distinta de  $u$ , no está libre en  $S_z^u S_{y_\theta}^y \theta^*$  por ser distinta de  $u$  e  $y$  y no estar en  $\theta$  y  $u$  no está libre en  $S_{y_\theta}^y \theta^*$  por ser distinta de  $y$  y no estar en  $\theta$ ) se prueba que

$$\vdash \bigvee_s \left( S_{y_i}^s t^* \wedge S_z^s S_{y_\theta}^y \theta^* \right) \leftrightarrow \bigvee_u \left( S_{y_i}^u t^* \wedge S_z^u S_{y_\theta}^y \theta^* \right), \quad (\text{E.75})$$

luego de (E.74) y (E.75) obtenemos que

$$\begin{aligned} \vdash \bigvee_s \left( S_{y_i}^s t^* \wedge \bigwedge w \left( S_z^s S_{x_i}^w \alpha^* \leftrightarrow w = y \right) \vee \left( \neg \bigvee^1 w S_z^s S_{x_i}^w \alpha^* \wedge \phi(y) \right) \right) \leftrightarrow \\ \bigvee_u \left( S_{y_i}^u t^* \wedge S_z^u S_{y_\theta}^y \theta^* \right). \end{aligned} \quad (\text{E.76})$$

Finalmente, la regla (MBB) junto a (E.66), (E.67) y (E.76) prueba lo deseado.

Esto concluye la demostración de los tres subcasos.

Esto concluye la inducción y con ello la demostración. 

### Metateorema E.8

Si  $\theta$  es un axioma de  $K_{\mathcal{L}'}$ , entonces se cumple que  $\vdash_T \theta^*$ .

Si  $\theta$  es un **axioma de tipo K1, K2 o K3** en  $K_{\mathcal{L}'}$ , es decir, es de una de las siguientes formas para ciertas fórmulas  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  de  $\mathcal{L}'$

$$\begin{aligned} \theta &\equiv \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha), \\ \theta &\equiv (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)), \\ \theta &\equiv (\neg \alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha), \end{aligned}$$

entonces  $\theta^*$  es de una de las siguientes formulas respectivamente

$$\begin{aligned} \theta^* &\equiv \alpha^* \rightarrow (\beta^* \rightarrow \alpha^*), \\ \theta^* &\equiv (\alpha^* \rightarrow (\beta^* \rightarrow \gamma^*)) \rightarrow ((\alpha^* \rightarrow \beta^*) \rightarrow (\alpha^* \rightarrow \gamma^*)), \\ \theta^* &\equiv (\neg \alpha^* \rightarrow \neg \beta^*) \rightarrow (\beta^* \rightarrow \alpha^*), \end{aligned}$$

con lo que vemos que  $\theta^*$  es un axioma de  $K_{\mathcal{L}}$  del mismo tipo, luego en particular es un teorema de  $T$ .

También, si  $\theta$  es un **axioma de tipo K5** en  $K_{\mathcal{L}'}$ , es decir,

$$\theta \equiv \bigwedge u (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \bigwedge u \beta)$$

para ciertas fórmulas  $\alpha$  y  $\beta$  de  $\mathcal{L}'$  de modo que  $u$  no está libre en  $\alpha$ , entonces se tiene que  $u$  no está libre en  $\alpha^*$  (Metateorema E.2) y como

$$\theta^* \equiv \bigwedge u(\alpha^* \rightarrow \beta^*) \rightarrow (\alpha^* \rightarrow \bigwedge u\beta^*),$$

concluimos que  $\theta^*$  es un axioma de tipo K5 en  $K_{\mathcal{L}}$ , luego en particular un teorema de  $T$ . Si  $\theta$  es un axioma de tipo K4, es decir,

$$\theta \equiv \bigwedge u\alpha \rightarrow S_u^t\alpha,$$

entonces

$$\theta^* \equiv \bigwedge u\alpha^* \rightarrow (S_u^t\alpha)^*.$$

Ahora bien, por el Metateorema E.7 tenemos que si  $v$  es una variable que no está en  $\alpha$  ni en  $t$  y que es distinta de  $u, y_\alpha$  e  $y_t$ , se cumple que

$$\vdash_T (S_u^t\alpha)^* \leftrightarrow \bigvee v(S_{y_t}^v t^* \wedge S_u^v\alpha^*),$$

luego por el Teorema 2.11 2) obtenemos que

$$\vdash_T \theta^* \leftrightarrow \left( \bigwedge u\alpha^* \rightarrow \bigvee v(S_{y_t}^v t^* \wedge S_u^v\alpha^*) \right). \quad (\text{E.77})$$

Por la regla (SE) y (E.77) basta ver que

$$\vdash_T \bigwedge u\alpha^* \rightarrow \bigvee v(S_{y_t}^v t^* \wedge S_u^v\alpha^*) \quad (\text{E.78})$$

para concluir que, en efecto,  $\theta^*$  es un teorema de  $T$ .

Para ello, observemos que el Metateorema E.5 nos garantiza que

$$\vdash_T \bigvee^1 y_t t^*$$

y como  $v$  no está libre en  $t^*$  (pues es distinta de  $y_t$  y no está en  $t$ ) el Metateorema 3.7 (iii) nos da que

$$\vdash_T \bigvee^1 v S_{y_t}^v t^*.$$

Con esto, podemos demostrar fácilmente (E.78):

|     |                                                                                 |                           |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| (1) | $\bigwedge u\alpha^*$                                                           | Hipótesis                 |
| (2) | $\bigvee^1 v S_{y_t}^v t^*$                                                     | Teo. $T$                  |
| (3) | $\bigvee v S_{y_t}^v t^*$                                                       | SE 2, Tma. 2.9 3)         |
| (4) | $S_{y_t}^v t^*$                                                                 | EP 3 ( $v$ no libre en 1) |
| (5) | $S_u^v\alpha^*$                                                                 | EG 1                      |
| (6) | $S_{y_t}^v t^* \wedge S_u^v\alpha^*$                                            | IC 4, 5                   |
| (7) | $\bigvee v(S_{y_t}^v t^* \wedge S_u^v\alpha^*)$                                 | IP 6 ( $v$ no libre)      |
| (8) | $\bigwedge u\alpha^* \rightarrow \bigvee v(S_{y_t}^v t^* \wedge S_u^v\alpha^*)$ | Tma. deducción            |

Si  $\theta$  es un axioma de tipo **K6**, es decir,

$$\theta \equiv \bigwedge u(u = t \rightarrow \alpha) \leftrightarrow S_u^t \alpha$$

con  $u$  no libre en  $t$ , tenemos que

$$\theta^* \equiv \bigwedge u((u = t)^* \rightarrow \alpha^*) \leftrightarrow (S_u^t \alpha)^*. \quad (\text{E.79})$$

Como antes, si  $v$  es una variable que no está en  $\alpha$  ni en  $t$  y que es distinta de  $u, y_\alpha, y_t$  e  $y_{u=t}$ , el Metateorema **E.7** nos garantiza que

$$\vdash_T (S_u^t \alpha)^* \leftrightarrow \bigvee v(S_{y_t}^v t^* \wedge S_u^v \alpha^*). \quad (\text{E.80})$$

Por otra parte, veamos que, en general (incluso aunque no se cumpla que  $u$  no esté libre en  $t$ ), se cumple que

$$\vdash (u = t)^* \leftrightarrow S_{y_t}^u t^*. \quad (\text{E.81})$$

Por el Metateorema **E.3** tenemos que tomando  $r, w$  variables distintas que no estén en  $u = t$  y distintas de  $y_t$  e  $y_{u=t}$  se cumple que

$$\vdash (u = t)^* \leftrightarrow \bigvee wr(S_{y_u}^w u^* \wedge S_{y_t}^r t^* \wedge w = r),$$

luego teniendo en cuenta que

$$S_{y_u}^w u^* \equiv S_{y_u}^w (y_u = u) \equiv w = u$$

obtenemos que

$$\vdash (u = t)^* \leftrightarrow \bigvee wr(w = u \wedge S_{y_t}^r t^* \wedge w = r). \quad (\text{E.82})$$

Ahora bien, a continuación veremos que podemos demostrar fácilmente que

$$\vdash \bigvee wr(w = u \wedge S_{y_t}^r t^* \wedge w = r) \leftrightarrow S_{y_t}^u t^*, \quad (\text{E.83})$$

con lo que aplicando la regla (MBB) junto a (E.82) y (E.83) concluimos la prueba de (E.81).

En efecto, una demostración de (E.83) es la siguiente (donde se tiene que cuenta que  $w, r$  no están libres en  $S_{y_t}^u t^*$  pues son distintas de  $u$  y no están libres en  $t^*$  al ser distintas de  $y_t$  y no estar en  $t$ ):

|     |                                                                                 |                                   |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|
| (1) | $\bigvee wr(w = u \wedge S_{y_t}^r t^* \wedge w = r)$                           | Hipótesis                         |
| (2) | $\bigvee r(w = u \wedge S_{y_t}^r t^* \wedge w = r)$                            | EP 1 ( $w$ no libre en 1)         |
| (3) | $w = u \wedge S_{y_t}^r t^* \wedge w = r$                                       | EP 2 ( $r$ no libre en 1 ni 2)    |
| (4) | $u = w$                                                                         | SI (EC 3)                         |
| (5) | $u = r$                                                                         | TI (EC 3), 4                      |
| (6) | $S_{y_t}^u t^*$                                                                 | ETI (EC 3), 5 ( $w, r$ no libres) |
| (7) | $\bigvee wr(w = u \wedge S_{y_t}^r t^* \wedge w = r) \rightarrow S_{y_t}^u t^*$ | Tma. deducción                    |
| (8) | $S_{y_t}^u t^*$                                                                 | Hipótesis                         |

|      |                                                                                     |                          |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|
| (9)  | $u = u$                                                                             | I                        |
| (10) | $u = u \wedge S_{y_t}^u t^* \wedge u = u$                                           | IC (IC 8, 9), 9          |
| (11) | $S_r^u(u = u \wedge S_{y_t}^r t^* \wedge u = r)$                                    | Teo. 2.11, 10, Mteo. 2.3 |
| (12) | $\forall r(u = u \wedge S_{y_t}^r t^* \wedge u = r)$                                | IP 11                    |
| (13) | $S_w^u \forall r(w = u \wedge S_{y_t}^r t^* \wedge w = r)$                          | R 12 [(1.37)]            |
| (14) | $\forall wr(w = u \wedge S_{y_t}^r t^* \wedge w = r)$                               | IP 13                    |
| (15) | $S_{y_t}^u t^* \rightarrow \forall wr(w = u \wedge S_{y_t}^r t^* \wedge w = r)$     | Tma. deducción           |
| (16) | $\forall wr(w = u \wedge S_{y_t}^r t^* \wedge w = r) \leftrightarrow S_{y_t}^u t^*$ | IB 7, 15                 |

Utilizando el Teorema 2.11 junto a (E.79), (E.80) y (E.81) obtenemos que

$$\vdash_T \theta^* \leftrightarrow \left( \bigwedge u (S_{y_t}^u t^* \rightarrow \alpha^*) \leftrightarrow \bigvee v (S_{y_t}^v t^* \wedge S_u^v \alpha^*) \right)$$

y basta probar que

$$\vdash_T \bigwedge u (S_{y_t}^u t^* \rightarrow \alpha^*) \leftrightarrow \bigvee v (S_{y_t}^v t^* \wedge S_u^v \alpha^*) \quad (\text{E.84})$$

para concluir que, en efecto,  $\theta^*$  es un teorema de  $T$ .

Para ello, observemos en primer lugar que el Metateorema E.5 nos garantiza que

$$\vdash_T \bigvee_{y_t}^1 t^* \quad (\text{E.85})$$

y como  $v$  no está libre en  $t^*$  (pues es distinta de  $y_t$  y no está en  $t$ ) el Metateorema 3.7 (iii) nos da que

$$\vdash_T \bigvee_v^1 S_{y_t}^v t^*. \quad (\text{E.86})$$

Por otra parte, observemos que si  $u \equiv y_t$ , entonces

$$S_u^v S_{y_t}^u t^* \equiv S_{y_t}^v t^*,$$

mientras que si  $u \not\equiv y_t$ , entonces  $u$  no está libre en  $t^*$  (pues  $u$  no está libre en  $t$ ) y por el Metateorema 2.3 tenemos que

$$\vdash S_u^v S_{y_t}^u t^* \leftrightarrow S_{y_t}^v t^*,$$

luego en cualquier caso (en el primero por el Teorema 2.7) podemos asegurar que

$$\vdash S_u^v S_{y_t}^u t^* \leftrightarrow S_{y_t}^v t^*. \quad (\text{E.87})$$

Con esto, podemos demostrar fácilmente (E.84) y concluir esta parte de la demostración (teniendo en cuenta que  $v$  no está libre en  $S_{y_t}^u t^*$ , pues es distinta de  $u$  y de  $y_t$  y no está en  $t$ , tampoco lo está en  $\alpha^*$ , pues no está en  $\alpha$  y  $u$  no está libre en  $S_{y_t}^v t^*$ , pues es distinta de  $v$  y si es distinta de  $y_t$  no puede estar libre en  $t^*$  al no estar libre en  $t$ ):

|     |                                                    |                   |
|-----|----------------------------------------------------|-------------------|
| (1) | $\bigvee_v^1 S_{y_t}^v t^*$                        | (E.86)            |
| (2) | $\bigvee v S_{y_t}^v t^*$                          | SE 1, Tma. 2.9 3) |
| (3) | $\bigwedge u (S_{y_t}^u t^* \rightarrow \alpha^*)$ | Hipótesis         |
| (4) | $S_u^v S_{y_t}^u t^* \rightarrow S_u^v \alpha^*$   | EG 3              |

|      |                                                                                                                  |                                               |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| (5)  | $S_{yt}^v t^* \rightarrow S_u^v \alpha^*$                                                                        | SE 4, MP (Teo. 2.11 2) (IC (E.87), Teo. 2.7)) |
| (6)  | $S_{yt}^v t^*$                                                                                                   | EP 2 ( $v$ no libre en 3)                     |
| (7)  | $S_u^v \alpha^*$                                                                                                 | MP 5, 6                                       |
| (8)  | $S_{yt}^v t^* \wedge S_u^v \alpha^*$                                                                             | IC 6, 7                                       |
| (9)  | $\bigvee v (S_{yt}^v t^* \wedge S_u^v \alpha^*)$                                                                 | IP 8 ( $v$ no libre)                          |
| (10) | $\bigwedge u (S_{yt}^u t^* \rightarrow \alpha^*) \rightarrow \bigvee v (S_{yt}^v t^* \wedge S_u^v \alpha^*)$     | Tma. deducción                                |
| (11) | $\bigvee v (S_{yt}^v t^* \wedge S_u^v \alpha^*)$                                                                 | Hipótesis                                     |
| (12) | $S_{yt}^u t^*$                                                                                                   | Hipótesis                                     |
| (13) | $S_{yt}^v t^* \wedge S_u^v \alpha^*$                                                                             | EP 11 ( $v$ no libre en 11 ni 12)             |
| (14) | $\bigvee^1 y_t t^*$                                                                                              | (E.85)                                        |
| (15) | $u = v$                                                                                                          | Mteo. 2.4 12, 14, (EC 13)                     |
| (16) | $\alpha^*$                                                                                                       | ETI (EC 13), 15 ( $v$ no libre)               |
| (17) | $S_{yt}^u t^* \rightarrow \alpha^*$                                                                              | Tma. deducción                                |
| (18) | $\bigwedge u (S_{yt}^u t^* \rightarrow \alpha^*)$                                                                | IG 18 ( $u$ no libre en 11)                   |
| (19) | $\bigvee v (S_{yt}^v t^* \wedge S_u^v \alpha^*) \rightarrow \bigwedge u (S_{yt}^u t^* \rightarrow \alpha^*)$     | Tma. deducción                                |
| (20) | $\bigwedge u (S_{yt}^u t^* \rightarrow \alpha^*) \leftrightarrow \bigvee v (S_{yt}^v t^* \wedge S_u^v \alpha^*)$ | IB 10, 19                                     |

Si  $\theta$  es un axioma de tipo K7, es decir,

$$\theta \equiv \bigvee^1 u \alpha \rightarrow S_u^{u|\alpha} \alpha,$$

tenemos que

$$\theta^* \equiv \left( \bigvee^1 u \alpha \right)^* \rightarrow \left( S_u^{u|\alpha} \alpha \right)^*. \quad (\text{E.88})$$

Veamos en primer lugar que

$$\vdash \left( \bigvee^1 u \alpha \right)^* \leftrightarrow \bigvee^1 u \alpha^*. \quad (\text{E.89})$$

Por definición tenemos que

$$\bigvee^1 u \alpha \equiv \bigvee v \bigwedge u (\alpha \leftrightarrow v = u)$$

con  $v$  la variable de menor índice que no está en  $\bigwedge u \alpha$ , luego que

$$\left( \bigvee^1 u \alpha \right)^* \equiv \bigvee v \bigwedge u (\alpha^* \leftrightarrow (v = u)^*). \quad (\text{E.90})$$

Además, por (E.81) se cumple que

$$\vdash (v = u)^* \leftrightarrow S_{yu}^v u^*,$$

siendo

$$S_{yu}^v u^* \equiv S_{yu}^v (y_u = u) \equiv v = u,$$

luego

$$\vdash (v = u)^* \leftrightarrow v = u. \quad (\text{E.91})$$

Utilizando el Teorema 2.11 junto a (E.90) y (E.91) obtenemos que

$$\vdash \left( \bigvee^1 u \alpha \right)^* \leftrightarrow \bigvee v \bigwedge u (\alpha^* \leftrightarrow v = u),$$

y como  $v$  no está libre en  $\alpha^*$  y es distinta de  $u$  (pues no está en  $\bigwedge u \alpha$ ), el Teorema 2.9 3) nos da que

$$\vdash \bigvee^1 u \alpha^* \leftrightarrow \bigvee v \bigwedge u (\alpha^* \leftrightarrow v = u).$$

Aplicando la regla (MBB) a estos dos últimos teoremas lógicos obtenemos una demostración de (E.89).

Por otra parte, el Metateorema E.7 nos da que

$$\vdash_T \left( S_u^{u|\alpha} \alpha \right)^* \leftrightarrow \bigvee v \left( S_{y_{u|\alpha}}^v (u|\alpha)^* \wedge S_u^v \alpha^* \right) \quad (\text{E.92})$$

para cualquier variable  $v$  que no esté en  $u|\alpha$  y que sea distinta de  $y_\alpha$  e  $y_{u|\alpha}$ , luego utilizando el Teorema 2.11 2) junto a (E.88), (E.89) y (E.92) obtenemos que

$$\vdash_T \theta^* \leftrightarrow \bigvee^1 u \alpha^* \rightarrow \bigvee v \left( S_{y_{u|\alpha}}^v (u|\alpha)^* \wedge S_u^v \alpha^* \right)$$

y basta ver que

$$\vdash_T \bigvee^1 u \alpha^* \rightarrow \bigvee v \left( S_{y_{u|\alpha}}^v (u|\alpha)^* \wedge S_u^v \alpha^* \right) \quad (\text{E.93})$$

para concluir con que, en efecto,  $\theta^*$  es un teorema de  $T$ .

Sin más, sabemos que el Metateorema E.5 nos garantiza que

$$\vdash_T \bigvee^1 y_{u|\alpha} (u|\alpha)^*$$

y como  $v$  no está libre en  $(u|\alpha)^*$  (pues es distinta de  $y_{u|\alpha}$  y no está en  $u|\alpha$ ) el Metateorema 3.7 (iii) nos da que

$$\vdash_T \bigvee^1 v S_{y_{u|\alpha}}^v (u|\alpha)^*. \quad (\text{E.94})$$

Con esto es fácil demostrar (E.93):

|     |                                                                                                                                           |                           |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| (1) | $\bigvee^1 v S_{y_{u \alpha}}^v (u \alpha)^*$                                                                                             | (E.94)                    |
| (2) | $\bigvee v S_{y_{u \alpha}}^v (u \alpha)^*$                                                                                               | SE 1, Tma. 2.9 3)         |
| (3) | $\bigvee^1 u \alpha^*$                                                                                                                    | Hipótesis                 |
| (4) | $S_{y_{u \alpha}}^v (u \alpha)^*$                                                                                                         | EP 2 ( $v$ no libre en 3) |
| (5) | $\bigwedge u (\alpha^* \leftrightarrow u = v) \vee \left( \neg \bigvee^1 u \alpha^* \wedge S_{y_{u \alpha}}^v \phi(y_{u \alpha}) \right)$ | R 4                       |



|      |                                                                                                                   |                       |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| (6)  | $\neg\neg\bigvee^1 u \alpha^*$                                                                                    | DN 3                  |
| (7)  | $\neg\neg\bigvee^1 u \alpha^* \vee \neg S_{y_{u \alpha}}^v \phi(y_{u \alpha})$                                    | ID 6                  |
| (8)  | $\neg\left(\neg\bigvee^1 u \alpha^* \wedge S_{y_{u \alpha}}^v \phi(y_{u \alpha})\right)$                          | DM 7                  |
| (9)  | $\wedge u(\alpha^* \leftrightarrow u = v)$                                                                        | MTP 5, 8              |
| (10) | $S_u^v \alpha^* \leftrightarrow v = v$                                                                            | EG 9                  |
| (11) | $v = v$                                                                                                           | I                     |
| (12) | $S_u^v \alpha^*$                                                                                                  | SE 10, 11             |
| (13) | $S_{y_{u \alpha}}^v (u \alpha)^* \wedge S_u^v \alpha^*$                                                           | IC 4, 12              |
| (14) | $\bigvee v \left( S_{y_{u \alpha}}^v (u \alpha)^* \wedge S_u^v \alpha^* \right)$                                  | IP 13 ( $v$ no libre) |
| (15) | $\bigvee^1 u \alpha^* \rightarrow \bigvee v \left( S_{y_{u \alpha}}^v (u \alpha)^* \wedge S_u^v \alpha^* \right)$ | Tma. deducción        |

Si  $\theta$  es un axioma de tipo **K8**, es decir,

$$\theta \equiv \neg\bigvee^1 u \alpha \rightarrow u|\alpha = v|(v = v),$$

entonces

$$\theta^* \equiv \neg\left(\bigvee^1 u \alpha\right)^* \rightarrow (u|\alpha = v|(v = v))^*$$

donde por el Metateorema **E.3**

$$\vdash (u|\alpha = v|(v = v))^* \leftrightarrow \bigvee u_1 u_2 \left( S_{y_{u|\alpha}}^{u_1} (u|\alpha)^* \wedge S_{y_{v|(v=v)}}^{u_2} (v|(v = v))^* \wedge u_1 = u_2 \right) \quad (\text{E.95})$$

siendo  $u_1, u_2$  variables que no están en  $u|\alpha = v|(v = v)$  y distintas de  $y_{u|\alpha=v|(v=v)}, y_{u|\alpha}$  e  $y_{v|(v=v)}$ .

Así, por el Teorema 2.11 2), (**E.89**) y (**E.95**) tenemos que

$$\vdash \theta^* \leftrightarrow \left( \neg\bigvee^1 u \alpha^* \rightarrow \bigvee u_1 u_2 \left( S_{y_{u|\alpha}}^{u_1} (u|\alpha)^* \wedge S_{y_{v|(v=v)}}^{u_2} (v|(v = v))^* \wedge u_1 = u_2 \right) \right). \quad (\text{E.96})$$

Por otra parte, si  $w$  es una variable que no está en  $u|\alpha$  y distinta de  $v, u_1, u_2, y_{u|\alpha}$  e  $y_{v|(v=v)}$  se tiene que

$$\begin{aligned} \vdash \bigvee u_1 u_2 \left( S_{y_{u|\alpha}}^{u_1} (u|\alpha)^* \wedge S_{y_{v|(v=v)}}^{u_2} (v|(v = v))^* \wedge u_1 = u_2 \right) &\leftrightarrow \\ \bigvee w \left( S_{y_{u|\alpha}}^w (u|\alpha)^* \wedge S_{y_{v|(v=v)}}^w (v|(v = v))^* \right). & \end{aligned} \quad (\text{E.97})$$

En efecto, tenemos la siguiente demostración (donde se usa que  $w$  no está libre en  $(u|\alpha)^*$  ni en  $(v|(v = v))^*$  por no estar en  $u|\alpha$  y ser distinta de  $v, y_{u|\alpha}$  e  $y_{v|(v=v)}$ ):

|     |                                                                                                                                  |                                                     |
|-----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| (1) | $\bigvee u_1 u_2 \left( S_{y_{u \alpha}}^{u_1} (u \alpha)^* \wedge S_{y_{v (v=v)}}^{u_2} (v (v = v))^* \wedge u_1 = u_2 \right)$ | Hipótesis                                           |
| (2) | $S_{y_{u \alpha}}^{u_1} (u \alpha)^* \wedge S_{y_{v (v=v)}}^{u_2} (v (v = v))^* \wedge$<br>$u_1 = u_2$                           | EP 1 ( $\times 2$ )<br>( $u_1, u_2$ no libres en 1) |
| (3) | $S_{y_{u \alpha}}^{u_1} (u \alpha)^*$                                                                                            | EC 2                                                |
| (4) | $S_w^{u_1} S_{y_{u \alpha}}^w (u \alpha)^*$                                                                                      | SE 3, Mteo. <b>2.3</b>                              |
| (5) | $u_2 = u_1$                                                                                                                      | SI (EC 2)                                           |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                   |                                    |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------|
| (6)  | $S_w^{u_2} S_{y_{u \alpha}}^w (u \alpha)^*$                                                                                                                                                                                                       | ETI 4, 5                           |
| (7)  | $S_{y_{v (v=v)}}^{u_2} (v (v=v))^*$                                                                                                                                                                                                               | EC 2                               |
| (8)  | $S_w^{u_2} S_{y_{v (v=v)}}^w (v (v=v))^*$                                                                                                                                                                                                         | SE 7, Mteo. 2.3                    |
| (9)  | $S_w^{u_2} \left( S_{y_{u \alpha}}^w (u \alpha)^* \wedge S_{y_{v (v=v)}}^w (v (v=v))^* \right)$                                                                                                                                                   | IC 6, 8                            |
| (10) | $\forall w \left( S_{y_{u \alpha}}^w (u \alpha)^* \wedge S_{y_{v (v=v)}}^w (v (v=v))^* \right)$                                                                                                                                                   | IP 9 ( $u_1, u_2$ no libres)       |
| (11) | $\forall u_1 u_2 \left( S_{y_{u \alpha}}^{u_1} (u \alpha)^* \wedge S_{y_{v (v=v)}}^{u_2} (v (v=v))^* \wedge u_1 = u_2 \right)$<br>$\rightarrow \forall w \left( S_{y_{u \alpha}}^w (u \alpha)^* \wedge S_{y_{v (v=v)}}^w (v (v=v))^* \right)$     | Tma. deducción                     |
| (12) | $\forall w \left( S_{y_{u \alpha}}^w (u \alpha)^* \wedge S_{y_{v (v=v)}}^w (v (v=v))^* \right)$                                                                                                                                                   | Hipótesis                          |
| (13) | $S_{y_{u \alpha}}^w (u \alpha)^* \wedge S_{y_{v (v=v)}}^w (v (v=v))^*$                                                                                                                                                                            | EP 12 ( $w$ no libre en 12)        |
| (14) | $S_{y_{u \alpha}}^w (u \alpha)^* \wedge S_{y_{v (v=v)}}^w (v (v=v))^* \wedge w = w$                                                                                                                                                               | IC 13, I                           |
| (15) | $S_{u_2}^w \left( S_{y_{u \alpha}}^w (u \alpha)^* \wedge S_{y_{v (v=v)}}^{u_2} (v (v=v))^* \wedge w = u_2 \right)$                                                                                                                                | Teo. 2.11, 14, Mteo. 2.3           |
| (16) | $\forall u_2 \left( S_{y_{u \alpha}}^w (u \alpha)^* \wedge S_{y_{v (v=v)}}^{u_2} (v (v=v))^* \wedge w = u_2 \right)$                                                                                                                              | IP 15                              |
| (17) | $S_{u_1}^w \forall u_2 \left( S_{y_{u \alpha}}^{u_1} (u \alpha)^* \wedge S_{y_{v (v=v)}}^{u_2} (v (v=v))^* \wedge u_1 = u_2 \right)$                                                                                                              | Teo. 2.11, 16, Mteo. 2.3<br>(1.37) |
| (18) | $\forall u_1 u_2 \left( S_{y_{u \alpha}}^{u_1} (u \alpha)^* \wedge S_{y_{v (v=v)}}^{u_2} (v (v=v))^* \wedge u_1 = u_2 \right)$                                                                                                                    | IP 17 ( $w$ no libre)              |
| (19) | $\forall w \left( S_{y_{u \alpha}}^w (u \alpha)^* \wedge S_{y_{v (v=v)}}^w (v (v=v))^* \right) \rightarrow$<br>$\forall u_1 u_2 \left( S_{y_{u \alpha}}^{u_1} (u \alpha)^* \wedge S_{y_{v (v=v)}}^{u_2} (v (v=v))^* \wedge u_1 = u_2 \right)$     | Tma. deducción                     |
| (20) | $\forall u_1 u_2 \left( S_{y_{u \alpha}}^{u_1} (u \alpha)^* \wedge S_{y_{v (v=v)}}^{u_2} (v (v=v))^* \wedge u_1 = u_2 \right)$<br>$\leftrightarrow \forall w \left( S_{y_{u \alpha}}^w (u \alpha)^* \wedge S_{y_{v (v=v)}}^w (v (v=v))^* \right)$ | IB 11, 19                          |

Por (E.96) y (E.97) (junto al Teorema 2.11 y la regla (MBB)) obtenemos que

$$\vdash \theta^* \leftrightarrow \left( \neg \bigvee^1 u \alpha^* \rightarrow \forall w \left( S_{y_{u|\alpha}}^w (u|\alpha)^* \wedge S_{y_{v|(v=v)}}^w (v|(v=v))^* \right) \right)$$

y basta ver que

$$\vdash_T \neg \bigvee^1 u \alpha^* \rightarrow \forall w \left( S_{y_{u|\alpha}}^w (u|\alpha)^* \wedge S_{y_{v|(v=v)}}^w (v|(v=v))^* \right) \quad (\text{E.98})$$

para concluir con que, en efecto,  $\theta^*$  es un teorema de  $T$ .

Para ello, veamos en primer lugar que si  $\psi$  es una fórmula cualquiera de  $\mathcal{L}'$  y  $r, s$  son dos variables distintas de modo que  $s$  no está en  $\psi$ , entonces

$$\vdash \neg \bigvee^1 r \psi^* \rightarrow \bigwedge s \left( S_{y_{r|\psi}}^s (r|\psi)^* \leftrightarrow \phi(s) \right) \quad (\text{E.99})$$

En efecto, tenemos la siguiente demostración (donde en la línea 4 realmente se utiliza también el Teorema 2.11 junto al teorema lógico  $r = s \leftrightarrow s = r$ ):

|     |                                                        |                   |
|-----|--------------------------------------------------------|-------------------|
| (1) | $\neg \bigvee^1 r \psi^*$                              | Hipótesis         |
| (2) | $\bigwedge r (\psi^* \leftrightarrow r = s)$           | Hipótesis (RA)    |
| (3) | $\bigvee s \bigwedge r (\psi^* \leftrightarrow r = s)$ | IP 2              |
| (4) | $\bigvee^1 r \psi^*$                                   | SE 3, Tma. 2.9 3) |

|      |                                                                                                                               |                          |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|
| (5)  | $\neg \wedge r(\psi^* \leftrightarrow r = s)$                                                                                 | Red. absurdo             |
| (6)  | $S_{y_{r \psi}}^s(r \psi)^*$                                                                                                  | Hipótesis                |
| (7)  | $\wedge r(\psi^* \leftrightarrow r = s) \vee \left( \neg \bigvee^1 r \psi^* \wedge S_{y_{r \psi}}^s \phi(y_{r \psi}) \right)$ | R 6                      |
| (8)  | $\wedge r(\psi^* \leftrightarrow r = s) \vee \left( \neg \bigvee^1 r \psi^* \wedge \phi(s) \right)$                           | Tma. 2.11, 7, Mteo. 1.21 |
| (9)  | $\neg \bigvee^1 r \psi^* \wedge \phi(s)$                                                                                      | MTP 5, 8                 |
| (10) | $\phi(s)$                                                                                                                     | EC 9                     |
| (11) | $S_{y_{r \psi}}^s(r \psi)^* \rightarrow \phi(s)$                                                                              | Tma. deducción           |
| (12) | $\phi(s)$                                                                                                                     | Hipótesis                |
| (13) | $S_{y_{r \psi}}^s \phi(y_{r \psi})$                                                                                           | SE 12, Mteo. 1.21        |
| (14) | $\neg \bigvee^1 r \psi^* \wedge S_{y_{r \psi}}^s \phi(y_{r \psi})$                                                            | IC 1, 13                 |
| (15) | $\wedge r(\psi^* \leftrightarrow r = s) \vee \left( \neg \bigvee^1 r \psi^* \wedge S_{y_{r \psi}}^s \phi(y_{r \psi}) \right)$ | ID 15                    |
| (16) | $S_{y_{r \psi}}^s(r \psi)^*$                                                                                                  | R 15                     |
| (17) | $\phi(s) \rightarrow S_{y_{r \psi}}^s(r \psi)^*$                                                                              | Tma. deducción           |
| (18) | $S_{y_{r \psi}}^s(r \psi)^* \leftrightarrow \phi(s)$                                                                          | IB 11, 17                |
| (19) | $\wedge s \left( S_{y_{r \psi}}^s(r \psi)^* \leftrightarrow \phi(s) \right)$                                                  | IG 18 (s no libre en 1)  |
| (20) | $\neg \bigvee^1 r \psi^* \rightarrow \wedge s \left( S_{y_{r \psi}}^s(r \psi)^* \leftrightarrow \phi(s) \right)$              | Tma. deducción           |

En particular, de (E.99) obtenemos que

$$\vdash \neg \bigvee^1 u \alpha^* \rightarrow \wedge w \left( S_{y_{u|\alpha}}^w(u|\alpha)^* \leftrightarrow \phi(w) \right), \quad (\text{E.100})$$

y teniendo en cuenta que

$$\vdash (v = v)^* \leftrightarrow v = v$$

(ver (E.91)) y usando también el Teorema 2.11 obtenemos que

$$\vdash \neg \bigvee^1 v v = v \rightarrow \wedge w \left( S_{y_{v|(v=v)}}^w(v|(v=v))^* \leftrightarrow \phi(w) \right). \quad (\text{E.101})$$

También necesitaremos el siguiente teorema lógico

$$\vdash \bigvee^1 y y = y \rightarrow \wedge r s s = r \quad (\text{E.102})$$

donde  $y, r, s$  son variables distintas cualesquiera:

|     |                                                  |                                              |
|-----|--------------------------------------------------|----------------------------------------------|
| (1) | $\bigvee^1 y y = y$                              | Hipótesis                                    |
| (2) | $r = r$                                          | I                                            |
| (3) | $S_y^r(y = y)$                                   | R 2                                          |
| (4) | $s = s$                                          | I                                            |
| (5) | $S_y^s(y = y)$                                   | R4                                           |
| (6) | $s = r$                                          | Mteo. 2.4 1, 3, 5                            |
| (7) | $\wedge r s s = r$                               | IG 6 ( $\times 2$ ) ( $s, r$ no libres en 1) |
| (8) | $\bigvee^1 y y = y \rightarrow \wedge r s s = r$ | Tma. deducción                               |

También, como en demostraciones anteriores, observemos que el Metateorema E.5 nos garantiza que

$$\vdash_T \bigvee^1 y_{u|\alpha} (u|\alpha)^*$$

y

$$\vdash_T \bigvee^1 y_{v|(v=v)} (v|(v=v))^*,$$

luego como  $w$  no está libre en  $(u|\alpha)^*$  (pues es distinta de  $y_{u|\alpha}$  y no está en  $u|\alpha$ ) el Meta-teorema 3.7 (iii) nos da que

$$\vdash_T \bigvee^1 w S_{y_{u|\alpha}}^w (u|\alpha)^*, \quad (\text{E.103})$$

y tomando  $r$  una variable que no esté en  $u|\alpha$  y distinta de  $w, v, y_{u|\alpha}$  e  $y_{v|(v=v)}$ , de igual modo tenemos que

$$\vdash_T \bigvee^1 r S_{y_{v|(v=v)}}^r (v|(v=v))^*. \quad (\text{E.104})$$

Con todo podemos finalmente demostrar (E.98):

|      |                                                                                                                         |                                   |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|
| (1)  | $\neg \bigvee^1 u \alpha^*$                                                                                             | Hipótesis                         |
| (2)  | $\bigwedge w (S_{y_{u \alpha}}^w (u \alpha)^* \leftrightarrow \phi(w))$                                                 | MP 1, (E.100)                     |
| (3)  | $\bigvee^1 v v = v$                                                                                                     | Hipótesis                         |
| (4)  | $\bigwedge r w w = r$                                                                                                   | MP 3, (E.102)                     |
| (5)  | $\bigvee^1 w S_{y_{u \alpha}}^w (u \alpha)^*$                                                                           | (E.103)                           |
| (6)  | $\bigvee^1 w S_{y_{u \alpha}}^w (u \alpha)^*$                                                                           | SE 5, Teo. 2.9 3)                 |
| (7)  | $S_{y_{u \alpha}}^w (u \alpha)^*$                                                                                       | EP 6 ( $w$ no libre 1 ni 3)       |
| (8)  | $\bigvee^1 r S_{y_{v (v=v)}}^r (v (v=v))^*$                                                                             | (E.104)                           |
| (9)  | $\bigvee^1 r S_{y_{v (v=v)}}^r (v (v=v))^*$                                                                             | SE 8, Teo. 2.9 3)                 |
| (10) | $S_{y_{v (v=v)}}^r (v (v=v))^*$                                                                                         | EP 9 ( $r$ no libre en 1, 3 ni 7) |
| (11) | $w = r$                                                                                                                 | EG 4 ( $\times 2$ )               |
| (12) | $S_{y_{v (v=v)}}^w (v (v=v))^*$                                                                                         | ETI 10, 11                        |
| (13) | $S_{y_{u \alpha}}^w (u \alpha)^* \wedge S_{y_{v (v=v)}}^w (v (v=v))^*$                                                  | IC 7, 12 ( $r$ no libre)          |
| (14) | $\bigvee^1 w (S_{y_{u \alpha}}^w (u \alpha)^* \wedge S_{y_{v (v=v)}}^w (v (v=v))^*)$                                    | IP 13 ( $w$ no libre)             |
| (15) | $\bigvee^1 v v = v \rightarrow$<br>$\bigvee^1 w (S_{y_{u \alpha}}^w (u \alpha)^* \wedge S_{y_{v (v=v)}}^w (v (v=v))^*)$ | Tma. deducción                    |
| (16) | $\neg \bigvee^1 v v = v$                                                                                                | Hipótesis                         |
| (17) | $\bigwedge w (S_{y_{v (v=v)}}^w (v (v=v))^* \leftrightarrow \phi(w))$                                                   | MP 16, (E.101)                    |
| (18) | $\bigvee^1 w \phi(w)$                                                                                                   | (E.1)                             |
| (19) | $\bigvee^1 w \phi(w)$                                                                                                   | SE 18, Teo. 2.9 3)                |
| (20) | $\phi(w)$                                                                                                               | EP 19 ( $w$ no libre en 1 ni 16)  |
| (21) | $S_{y_{u \alpha}}^w (u \alpha)^* \leftrightarrow \phi(w)$                                                               | EG 2                              |

|      |                                                                                                                                                                               |                       |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| (22) | $S_{y_{u \alpha}}^w (u \alpha)^*$                                                                                                                                             | SE 20, 21             |
| (23) | $S_{y_{v (v=v)}}^w (v (v=v))^* \leftrightarrow \phi(w)$                                                                                                                       | EG 17                 |
| (24) | $S_{y_{v (v=v)}}^w (v (v=v))^*$                                                                                                                                               | SE 20, 23             |
| (25) | $S_{y_{u \alpha}}^w (u \alpha)^* \wedge S_{y_{v (v=v)}}^w (v (v=v))^*$                                                                                                        | IC 22, 24             |
| (26) | $\forall w \left( S_{y_{u \alpha}}^w (u \alpha)^* \wedge S_{y_{v (v=v)}}^w (v (v=v))^* \right)$                                                                               | IP 25 ( $w$ no libre) |
| (27) | $\neg \bigvee^1 v v = v \rightarrow$<br>$\forall w \left( S_{y_{u \alpha}}^w (u \alpha)^* \wedge S_{y_{v (v=v)}}^w (v (v=v))^* \right)$                                       | Tma. deducción        |
| (28) | $\left( \bigvee^1 v v = v \vee \neg \bigvee^1 v v = v \right) \rightarrow$<br>$\forall w \left( S_{y_{u \alpha}}^w (u \alpha)^* \wedge S_{y_{v (v=v)}}^w (v (v=v))^* \right)$ | Dil 15, 27            |
| (29) | $\bigvee^1 v v = v \vee \neg \bigvee^1 v v = v$                                                                                                                               | TND                   |
| (30) | $\forall w \left( S_{y_{u \alpha}}^w (u \alpha)^* \wedge S_{y_{v (v=v)}}^w (v (v=v))^* \right)$                                                                               | MP 28, 29             |
| (31) | $\neg \bigvee^1 u \alpha^* \rightarrow$<br>$\forall w \left( S_{y_{u \alpha}}^w (u \alpha)^* \wedge S_{y_{v (v=v)}}^w (v (v=v))^* \right)$                                    | Tma. deducción        |

Con esto concluye (por fin) la demostración. 

### Metateorema E.9

Si  $\theta$  es un axioma de  $T'$ , entonces se cumple que  $\vdash_T \theta^*$ .

Por el Metateorema E.8 sabemos que el resultado es cierto para los axiomas lógicos. Además, el Metateorema E.4 nos asegura que el resultado también es cierto para los axiomas de  $T$ . En efecto, si  $\theta$  es un axioma de  $T$  será una fórmula de  $\mathcal{L}$ , luego no tendrá descriptor, y por el Metateorema E.4 obtenemos que

$$\vdash_T \theta^* \leftrightarrow \theta,$$

con lo que la regla (SE) nos asegura que  $\theta^*$  es un teorema de  $T$ .

Con todo, resta únicamente ver que  $\theta^*$  es un teorema de  $T$  para el axioma

$$\theta \equiv \phi(x|x=x) \equiv S_x^{x|x=x} \phi.$$

Por el Metateorema E.7 tenemos que si  $u$  es una variable que no está en  $\phi$  y distinta de  $x, y_\phi, y_{x|x=x}$  se cumple que

$$\vdash_T \theta^* \leftrightarrow \bigvee u \left( S_{y_{x|x=x}}^u (x|x=x)^* \wedge S_x^u \phi^* \right). \quad (\text{E.105})$$

Ahora bien, como  $\phi$  es una fórmula de  $\mathcal{L}$  no tiene descriptores y el Metateorema E.4 nos asegura que

$$\vdash_T \phi^* \leftrightarrow \phi,$$

luego por el Metateorema 1.18 obtenemos que

$$\vdash_T S_x^u \phi^* \leftrightarrow \phi(u). \quad (\text{E.106})$$

Aplicando el Teorema 2.11 junto a (E.105) y (E.106) obtenemos entonces que

$$\vdash_T \theta^* \leftrightarrow \bigvee u \left( S_{y_{x|x=x}}^u (x|x=x)^* \wedge \phi(u) \right),$$

con lo que basta ver que

$$\vdash_T \bigvee u \left( S_{y_{x|x=x}}^u (x|x=x)^* \wedge \phi(u) \right) \quad (\text{E.107})$$

para concluir que  $\theta^*$  es, en efecto, un teorema de  $T$ .

El Metateorema E.5 nos asegura que

$$\vdash_T \bigvee^1 y_{x|x=x} (x|x=x)^*$$

y tomando  $v$  una variable distinta de  $u, x$  y de  $y_{x|x=x}$  se tiene que no está libre en  $(x|x=x)^*$ , con lo que el Metateorema 3.7 (iii) nos da que

$$\vdash_T \bigvee^1 v S_{y_{x|x=x}}^v (x|x=x)^*. \quad (\text{E.108})$$

Además, por (E.99) y teniendo en cuenta que

$$\vdash (v=v)^* \leftrightarrow v=v$$

(ver (E.91)), el Teorema 2.11 nos da que

$$\vdash \neg \bigvee^1 x x=x \rightarrow \bigwedge u \left( S_{y_{x|(x=x)}}^u (x|(x=x))^* \leftrightarrow \phi(u) \right). \quad (\text{E.109})$$

Con todo, tenemos la siguiente demostración de (E.107)

|      |                                                                                                 |                                |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|
| (1)  | $\bigvee^1 u \phi(u)$                                                                           | (E.1)                          |
| (2)  | $\bigvee^1 v S_{y_{x x=x}}^v (x x=x)^*$                                                         | (E.108)                        |
| (3)  | $\bigvee^1 x x=x$                                                                               | Hipótesis                      |
| (4)  | $\bigwedge v u u=v$                                                                             | MP 3, (E.102)                  |
| (5)  | $\bigvee u \phi(u)$                                                                             | SE 1, Teo. 2.9 3)              |
| (6)  | $\phi(u)$                                                                                       | EP 5 ( $u$ no libre en 3)      |
| (7)  | $\bigvee v S_{y_{x x=x}}^v (x x=x)^*$                                                           | SE 2, Teo. 2.9 3)              |
| (8)  | $S_{y_{x x=x}}^v (x x=x)^*$                                                                     | EP 7 ( $v$ no libre en 3 ni 6) |
| (9)  | $u=v$                                                                                           | EG 4 ( $\times 2$ )            |
| (10) | $S_{y_{x x=x}}^u (x x=x)^*$                                                                     | ETI 8, 9                       |
| (11) | $S_{y_{x x=x}}^u (x x=x)^* \wedge \phi(u)$                                                      | IC 6, 10                       |
| (12) | $\bigvee u \left( S_{y_{x x=x}}^u (x x=x)^* \wedge \phi(u) \right)$                             | IP 11 ( $u, v$ no libres)      |
| (13) | $\bigvee^1 x x=x \rightarrow \bigvee u \left( S_{y_{x x=x}}^u (x x=x)^* \wedge \phi(u) \right)$ | Tma. deducción                 |
| (14) | $\neg \bigvee^1 x x=x$                                                                          | Hipótesis                      |
| (15) | $\bigwedge u \left( S_{y_{x (x=x)}}^u (x (x=x))^* \leftrightarrow \phi(u) \right)$              | MP 14, (E.109)                 |
| (16) | $\bigvee u \phi(u)$                                                                             | SE 1, Teo. 2.9 3)              |

|      |                                                                                                                                |                             |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------|
| (17) | $\phi(u)$                                                                                                                      | EP 16 ( $u$ no libre en 14) |
| (18) | $S_{y_{x (x=x)}}^u(x (x=x))^* \leftrightarrow \phi(u)$                                                                         | EG 15                       |
| (19) | $S_{y_{x (x=x)}}^u(x (x=x))^*$                                                                                                 | SE 17, 18                   |
| (20) | $S_{y_{x (x=x)}}^u(x (x=x))^* \wedge \phi(u)$                                                                                  | IC 17, 19                   |
| (21) | $\forall u (S_{y_{x x=x}}^u(x x=x)^* \wedge \phi(u))$                                                                          | IP 20 ( $u$ no libre)       |
| (22) | $\neg \bigvee^1 x x = x \rightarrow \forall u (S_{y_{x x=x}}^u(x x=x)^* \wedge \phi(u))$                                       | Tma. deducción              |
| (23) | $\left( \bigvee^1 x x = x \vee \neg \bigvee^1 x x = x \right) \rightarrow \forall u (S_{y_{x x=x}}^u(x x=x)^* \wedge \phi(u))$ | Dil 13, 22                  |
| (24) | $\bigvee^1 x x = x \vee \neg \bigvee^1 x x = x$                                                                                | TND                         |
| (25) | $\forall u (S_{y_{x x=x}}^u(x x=x)^* \wedge \phi(u))$                                                                          | MP 23, 24                   |

Con esto queda demostrado que cualquier axioma de  $T'$  es un teorema de  $T$  tal y como se buscaba. 

Con todos estos resultados ya podemos finalizar la prueba del Teorema 3.32.

El primer punto ya lo hemos demostrado, pues por el Metateorema E.4 cualquier fórmula  $\alpha$  de  $\mathcal{L}'$  es equivalente en  $T'$  a  $\alpha^*$ , que por el Metateorema E.2 sabemos que es una fórmula de  $\mathcal{L}$  con las mismas variables libres que  $\alpha$ .

Para la segunda parte, supongamos que una fórmula  $\alpha$  de  $\mathcal{L}$  es demostrable en  $T'$  y sea  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  una demostración. Basta entonces con ver, de forma inductiva, que cada  $\alpha_i^*$  es un teorema de  $T$ , pues en particular obtenemos que  $\alpha_m^* \equiv \alpha^*$  será un teorema de  $T$ , y como por el Metateorema E.4 tenemos que

$$\vdash_T \alpha^* \leftrightarrow \alpha$$

(pues  $\alpha$  no tiene descriptores al ser una fórmula de  $\mathcal{L}$ ), concluimos que  $\alpha$  es también un teorema de  $T$  como queríamos ver.

Supongamos pues que cada  $\alpha_j^*$  es un teorema de  $T$  para  $j < i \leq m$  y veamos que entonces  $\alpha_i^*$  es un teorema de  $T$ . Distinguimos tres casos:

- Si  $\alpha_i$  es un axioma de  $T'$ , por el Metateorema E.9 obtenemos que  $\alpha_i^*$  es un teorema de  $T$ .
- Si  $\alpha_i$  se deduce por (MP) de fórmulas anteriores  $\alpha_j, \alpha_k$  con  $j, k < i$ , debe ser entonces  $\alpha_k \equiv \alpha_j \rightarrow \alpha_i$ . Como por hipótesis tenemos que  $\alpha_j^*$  y  $\alpha_k^* \equiv \alpha_j^* \rightarrow \alpha_i^*$  son teoremas de  $T$ , aplicando la regla (MP) a dichos teoremas obtenemos que, en efecto,  $\alpha_i^*$  es también un teorema de  $T$ .
- Si  $\alpha_i$  se deduce por (IG) de alguna fórmula anterior  $\alpha_j$  con  $j < i$ , entonces debe ser  $\alpha_i \equiv \bigwedge u \alpha_j$ . Así pues, tenemos que  $\alpha_i^* \equiv \bigwedge u \alpha_j^*$  y como por hipótesis  $\alpha_j^*$  es un teorema de  $T$ , al aplicarle la regla (IG) obtenemos que, en efecto,  $\alpha_i^*$  es también un teorema de  $T$ .

Esto concluye la inducción, y con ello la demostración del Teorema 3.32.





# Bibliografía

- [End01] Enderton, Herbert B.: *A mathematical introduction to logic*. Harcourt/Academic Press, segunda edición, 2001.
- [Ivoa] Ivorra, Carlos: *La lógica del finitismo*. Universidad de Valencia.
- [Ivob] Ivorra, Carlos: *Lógica matemática*. Universidad de Valencia.