- 240 es el mayor número para el cual se cumple que si p, q son primos mayores o iguales a 7, entonces

$$240 \mid p^4 - q^4$$

Observemos que $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$, luego basta ver que si $p, q \geq 7$ son primos, entonces

$$2^4 \mid p^4 - q^4 \quad (1)$$

$$3 \mid p^4 - q^4 \quad (2)$$

$$5 \mid p^4 - q^4 \quad (3)$$

Para (3) observemos que, por el pequeño teorema de Fermat,

$$\left.\begin{array}{l} p^4 \equiv_5 1 \\ q^4 \equiv_5 1 \end{array}\right\} \Rightarrow p^4 - q^4 \equiv_5 0 \Rightarrow (3)$$

Y, para (2),

$$\left.\begin{array}{l} p^2 \equiv_3 1 \\ q^2 \equiv_3 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p^4 \equiv_3 1 \\ q^4 \equiv_3 1 \end{array}\right\} \Rightarrow p^4 - q^4 \equiv_3 0 \Rightarrow (2)$$

Por último, para (1) observemos que

$$\{n^2 : n \in \mathbb{Z}_{16}\} = \{0, 1, 4, 9\}$$

$$\{n^4 : n \in \mathbb{Z}_{16}\} = \{0, 1\}$$

Como p, q son impares debe ser entonces que

$$\left.\begin{array}{l} p^4 \equiv_{16} 1 \\ q^4 \equiv_{16} 1 \end{array}\right\} \Rightarrow p^4 - q^4 \equiv_{16} 0 \Rightarrow (1)$$

Otra forma sería es observar que $\varphi(2^4) = 8$, luego $|\mathbb{Z}_{16}^*| = 8$ y debe ser pues $o(p) \mid 8$. Pero, $\mathbb{Z}_{16}^*$ no es cíclico, así que en cualquier caso

$$p^4 \equiv_{16} 1$$

Para finalizar observemos que si es $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \mid p^4 - q^4 \ , \forall p, q \geq 7 \text{ primos}$$

entonces

$$\left.\begin{array}{l} n \mid 11^4 - 7^4 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 17 \\ n \mid 13^4 - 11^4 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 29 \end{array}\right\}$$

Por tanto, $n \mid mcd(2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 17, 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 29) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 = 240$, y así, $n \leq 240$.